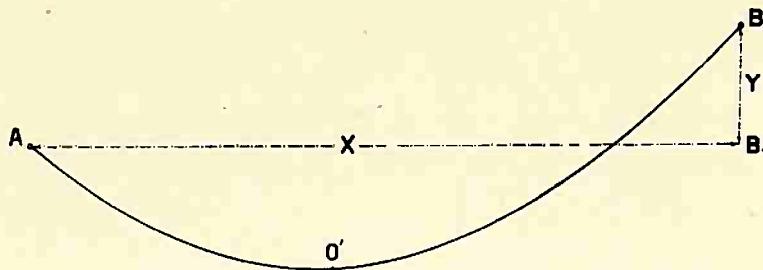


Do Professor
Dr. Paulo de Toledo Artigas
as homenagens de
Paulo Ferraz de Mesquita
São Paulo, 12-3-1962

Análise de Niveldiastímetro



Biblioteca da Escola Politécnica
São Paulo

Tese apresentada à Congregação da Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo,
em concurso para o preenchimento efetivo da
cadeira "Topografia, Geodesia Elementar
e Astronomia de Campo".

F. 1. 308

PAULO FERRAZ DE MESQUITA
Engenheiro Civil e Geógrafo

São Paulo, agosto de 1959.

Os exemplares são numerados e rubricados
pelo autor.

Nº _____

Biblioteca da Escola Politécnica
São Paulo

P R E F A C I O

O presente trabalho encerra, por assim dizer, memórias de pesquisas realizadas em torno da possibilidade, descoberta e verificada, de medir-se, direta e simultaneamente, distância e diferença de nível com padrão de comprimento flexível.

Essa possibilidade, inédita até 1948, foi defendida e confirmada em prova de concurso à livre docência com a tese intitulada "NIVELDIASTIMETRO".

Sob o tópico I - INTRODUÇÃO - encontra-se um resumo da primeira tese e, consequentemente, a relação com o presente trabalho.

Sob o tópico II - INTERPRETAÇÃO RACIONAL DA TEORIA E SUAS CONSEQUÉNCIAS - encontram-se o desenvolvimento do estudo prometido no prefácio da tese anterior, as suas conclusões e consequências resumidas como transição para o tópico III seguinte.

Sob o tópico III - GENERALIZAÇÃO DA IDEIA DE NIVELDIASTIMETRO; uma apresentação daquelas consequências previstas na Conclusão da primeira tese.

Sob tópico IV - CONCLUSÃO.

A tese anterior, reconhecida e aprovada em concurso regular de livre docência, teve um caráter apenas empírico e experimental.

A presente tese tem um caráter essencialmente racional. Ela enfeixa a primeira análise físico-matemática, que vem de ser dada a público, de objeto de resumida comunicação feita à Academia Brasileira de Ciências em 25-11-1952 e de patentes de invenção já reconhecidas no Brasil (nº 36311 em 9-8-1950 e nº 47657 em 18-4-1955), nos E E. U U. da América do Norte (nº 2 604 690 em 29-7-1952) e na Argentina (nº 94889 em 30-8-1954), os únicos países onde foram solicitadas pelo autor.

Com este trabalho, que fere questão fundamental, inaugura e penetra um novo campo de estudo encontrado na matéria em concurso, procuramos fazer jus e honrar a cadeira nº 6 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, à qual já dedicamos integralmente mais de vinta seis anos de nossos esforços, e, cuja regência

efetiva aspiramos para poder continuar a servi-la por mais alguns anos.

Apresentando o trabalho primeiramente aos meios os mais competentes, antes de divulgá-lo em outros, tivemos em mira, além de procurar vencer as provas de um concurso e honrar a Escola, evitar a sua incompreensão, dadas as possibilidades atuais e avançadas de interesse prático e científico que ele propicia e que os especialistas, melhor do que outrem, podem compreender, promover os reparos e a divulgação de seu conhecimento.

Em matéria científica os especialistas é que são os credenciados a julgar o alcance de uma tese fundamental para que não fiquem adiadas e prejudicadas indefinidamente as consequências que ela naturalmente encerra.

Não se tratando de assunto de mera compilação didática e aplicação de experiências alheias, mas, sim, o resultado de pesquisa físico-matemática de experiência própria, adquirida em mais de uma dúzia de anos de meditação, contados a partir das primeiras idéias, a confiança do autor, além da convicção da tese, baseia-se no fato de não vivermos em época na qual as idéias novas, apesar de demonstradas numa verdadeira tese, só podiam ser compreendidas por gerações futuras; do contrário, não se arriscaria a apresentá-la em prova de concurso para uma cátedra universitária.

O leitor talvez tome maior interesse por esta tese, lendo e meditando antes êste prefácio, a introdução, a conclusão e os principais títulos do índice, ou aqueles que possam, naturalmente, despertar maior atenção.

Agradecemos à direção da Escola a autorização para o serviço de impressão desta obra no seu Departamento de Publicações, bem como aos funcionários desse Departamento pela dedicação e os cuidados tomados na sua realização.

São Paulo, agosto de 1959.

PAULO FERRAZ DE MESQUITA

INDICE
DA MATERIA E DAS FIGURAS

	pag.
<u>P R E F A C I O</u>	I
I. I N T R O D U Ç A O	1
A - PRIMEIRO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO CONSTRUIDO - PROCES SO DE MEDIDA	4
B - INTERPRETAÇÃO ELEMENTAR DA TEORIA	
1. Caso ideal	6
2. Caso real	8
3. Fórmulas principais	10
4. Construção empírica do gráfico representativo das correções (K) ou (Δm)	12
5. Aplicação das fórmulas com auxílio do gráfico .	15
II. I N T E R P R E T A Ç A O R A C I O N A L D A T E O R I A E S U A S C O N S E Q U E N C I A S . . .	
A - O PROBLEMA CONTIDO NO CASO REAL DO NIVELDIASTIMETRO ESTUDADO	17
Esquema de uma solução racional	18
B - ESTUDO DA CATENÁRIA HOMOGENEA RELATIVA A UM ARCO	
1. Breves considerações sobre os dois arcos de ca- tenária que se observam no NIVELDIASTIMETRO . .	18
2. A forma clássica da equação da catenária . . .	21
Interpretação mecânica	21
3. Algumas convenções	22
4. Expressão das tangentes dos ângulos de inclina- ção da curva nos extremos de um arco	23
5. Comprimento de um arco de catenária	26
6. Algumas funções empregadas neste estudo da ca- tenária relativa a um arco	
a) As funções fundamentais S_{HV} e S_{HO} .	27
b) A função G_{HV}	28
c) A função g_H	31

d) As funções ρ_{HV} e \mathcal{R}_{HV}	32
e) As funções ρ_{HV} e γ_{HV}	34
f) Nota sobre as tabelas dos \mathfrak{G} , q , ρ e γ	37
7. Equação da catenária relativa a um arco	39
Outras formas da equação da catenária relativa a um arco	40
8. Tangente do ângulo de inclinação da catenária em cada ponto da curva	42
9. A tensão tangencial num ponto qualquer da catenária	43
Exemplo numérico - Cálculo das componentes horizontal e vertical da tensão	45
10. Expressão da ordenada conhecendo-se a abcissa de um ponto da catenária relativa a um arco	46
Exemplo numérico	50
C - REPRESENTAÇÃO PARABÓLICA DE UM ARCO DE CATENÁRIA	
1. A equação parabólica do arco de catenária	53
2. Equação das tangentes	54
3. Nota sobre a interpretação parabólica	55
4. Expressão da ordenada de uma abcissa dada	55
Exemplo numérico	59
D - O FIO SUSPENSO SUJEITO A CARGA CONCENTRADA DO INDICADOR DE LEITURAS NUM NIVELDIASTÍMETRO	
1. Considerações	61
2. Uma expressão do parâmetro c da catenária relativa a um arco	61
3. Exemplos numéricos	
Primeiro exemplo	64
Segundo exemplo	65
4. Declividade $\operatorname{tg} \psi_1$ da corda de um arco em função da declividade $\operatorname{tg} \psi_2$ da corda do outro arco	68
5. Exemplo numérico	69
6. Construção do gráfico de $\frac{\gamma}{G}$ e do gráfico de \mathfrak{G} em função de S e de $\operatorname{tg} \psi$	70
E - CONSTRUÇÃO RACIONAL DO GRÁFICO REPRESENTATIVO DAS	

CORREÇÕES (K)	
1. Considerações	72
2. Fórmulas reunidas para o cálculo numérico e racional dos K	73
3. Exemplos numéricos de aplicação das fórmulas .	78
4. Comparação dos dois gráficos, o experimental e o racional	87
F - UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PRINCIPAL PROBLEMA CONTI DO NO CASO REAL DO NIVELDIASTÍMETRO ESTUDADO	
1. O caminho da solução. Exemplo	92
2. A componente horizontal da tensão na fita mé- trica	96
3. Verificação e conclusão.	102
G - VERIFICAÇÃO POR MEIO DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS	
1. Primeiras considerações	104
2. Cálculo das tangentes dos ângulos de inclina- ção nos extremos dos arcos	105
3. Algumas analogias e relações conhecidas entre funções circulares e funções hiperbólicas li- gadas à catenária	107
4. Expressões de cálculo e verificação das distâ- ncias e diferenças de nível	
1º) Pelas funções hiperbólicas	112
2º) Pelas funções circulares das amplitudes hiperbólicas	113
3º) Exemplos numéricos	114
4º) Comparação dos resultados	116
H - CONCLUSÕES	116
I - ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DA TEORIA	
1. Considerações	117
2. Novos tipos de NIVELDIASTÍMETRO	118
Exemplo numérico	120
III. GENERALIZAÇÃO DA IDEIA DE NIVELDIASTÍMETRO	
A - ESCLARECIMENTOS. NIVELDIASTIMETRIA	124
B - AS FUNÇÕES NIVELDIASTIMÉTRICAS	
1. O objetivo	126

2. Expressão das funções $\operatorname{senn} S$ e $\operatorname{cosn} S$ em térmos de funções hiperbólicas	128
3. Expressão das funções $\operatorname{senn} S$ e $\operatorname{cosn} S$ em térmos de funções circulares das amplitudes hiperbólicas	130
4. Precisão teórica de um NIVELDIASTIMETRO	132
a) Considerando em primeiro lugar a função $\operatorname{senn} S$	132
b) Considerando em segundo lugar a função $\operatorname{cosn} S$	135
c) Considerando em terceiro lugar a componente horizontal do esforço de distensão	138
C - SEGUNDO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO	
1. Características dominantes	140
Modélo rudimentar construído	143
2. Leituras corretas do efeito de desretificação dos níveis de bolha	143
Exemplo numérico	144
3. Correção da leitura de cada círculo devido ao efeito de curvatura do fio padrão em suas extremidades	146
4. Exemplo numérico de medida realizada com um NIVELDIASTIMETRO tipo angular	149
5. Correção e erro devido ao alongamento elástico do padrão de comprimento	152
Exemplos numéricos	153
6. Influência da variação de temperatura	156
7. Influência da variação da aceleração da gravidade	158
8. Influência da rigidez do fio padrão	160
D - OUTRO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO	
1. Considerações	163
2. Descrição sucinta	164
3. Cálculo da distância horizontal e da diferença de nível	164
Exemplo numérico	166

IV. CONCLUSÃO 168

BIBLIOGRAFIA 177

FIGURAS

Número	entre as páginas
1 e 2	3 e 4
3	4 e 5
4	5 a e 6
5	11 e 12
6	13 e 14
7	14 e 15
8 e 9	16 e 17
10	19 e 20
11	20 e 21
12	28 e 29
13	30 e 31
14	33 e 34
15	36 e 37
16 e 17	38 e 39
18	60 e 61
19	63 e 64
20	71 e 72
21	72 e 73
22 e 23	106 e 107
24	118 e 119
25 e 26	123 e 124
27 e 28	140 e 141
29	141 e 142
30	142 e 143
31	145 e 146
32 e 33	163 e 164

I - INTRODUÇÃO

NIVELDIASTIMETRO é o nome dado a dispositivo que criamos numa tentativa para suprir a deficiência existente nos processos fundamentais de medida direta e simultânea das grandezas lineares necessárias aos trabalhos de Topografia e Geodesia, a saber :

a) distâncias horizontais ou simplesmente distâncias e
b) distâncias verticais ou diferenças de nível,
uma vez que para a medida direta e simultânea das grandezas angulares :

a) ângulos azimutais ou horizontais e
b) ângulos zenitais ou verticais,
já existe o clássico Teodolito.

Nunca existiu antes, nem foi citado em obra nacional ou estrangeira conhecida do autor, qualquer aparelho típico capaz de proceder à medida direta e simultânea daquelas grandezas lineares acima referidas, empregando padrão de comprimento flexível como o faz o NIVELDIASTIMETRO.

O Teodolito ou os aparelhos de medidas angulares por si só são insuficientes para os trabalhos topográficos.

A importância do NIVELDIASTIMETRO e o interesse que pode despertar reside no fato de constituir por si só um aparelho completo para levantamentos topográficos, uma vez que fornece a medida das grandezas lineares fundamentais para a representação do terreno : a distância horizontal e a diferença de nível, isto é, a planta e o relêvo, em Topografia de superfície ou subterrânea. No entanto, o interesse não reside só neste simples fato que diz respeito à rotina comum do topógrafo mas ainda, tratando-se de medidas de grandezas fundamentais, em princípio rigorosas, reside também em consequências teóricas que podem se tornar notórias para os especialistas na matéria.

Repetimos, nesta introdução, algumas considerações sobre a evolução dos processos fundamentais de medidas de distâncias ho-

izontais.

Na medida de um arco de meridiano terrestre que serviu para uma primeira definição do metro padrão, base do sistema métrico decimal, os cientistas franceses Delambre, Méchain e Borda, no fim do século XVIII empregaram, para a medida direta das distâncias horizontais (bases de triangulação), o processo rudimentar de justapôr uma após outra, sucessivamente, três réguas metálicas rígidas padrão, cerca de quatro metros cada uma, apoiadas em cavaletes que se transportavam ao longo da distância procurada. Estas réguas eram usadas, de preferência, em posição horizontal, mas, quando inclinadas, havia necessidade de computar, por outro processo, o ângulo de inclinação ou o desnível entre as suas extremidades para se obter, por cálculo posterior, a distância horizontal procurada.

Por volta do ano de 1885, o professor Edw. Jäderin, da Escola Politécnica de Estocolmo, divulgou um outro processo de medida de distâncias horizontais em que o padrão de comprimento é representado por fios metálicos flexíveis munidos de pequenas réguas graduadas em suas extremidades por onde podem ser suspensos e submetidos a tensão constante conhecida. Assim êstes fios servem para a medida das distâncias parciais entre pontos de referência assinalados em marcos ou tripés colocados sucessivamente ao longo de toda a linha a ser medida. Este processo exige que se faça, além de outras, a correção em cada medida parcial do efeito da curvatura (a catenária) do fio suspenso, o qual devido ao próprio peso não pode ser mantido em posição retilínea horizontal ou inclinada em toda sua extensão. Além desta correção é necessário ainda que se conheça a diferença de nível entre as suas extremidades, obtida por qualquer outro processo particular e próprio, independentemente do processo de medida da distância horizontal procurada.

Por volta de 1897, o processo foi aperfeiçoado por Benoit e Guillaume, diretores do "Bureau Internacional de Pesos e Medidas", com sede em Sèvres, na França, os quais introduziram o emprego de fios e fitas métricas de metal invar, liga de aço com cerca de trinta e sete por cento (37%) de níquel que, possuindo baixo coeficiente de dilatação, permite elevar o controle da variação do comprimento do padrão por efeito da variação de temperatura, a um grau de precisão nunca antes atingido.

O processo de Jäderin é o que se emprega hoje em dia pelo menos quando se quer obter distâncias horizontais medidas com fios ou fitas métricas padrão, tendo em conta a correção da catenária em função do peso da fita, do esforço de distensão com que ela é suspensa (obtida comumente por um dinamômetro ou por pesos distensores constantes e conhecidos) e ainda da diferença de nível entre as suas extremidades.

Em nossos dias, segundo a presente tese, o dispositivo NIVELDIASTIMETRO permite medir direta e simultaneamente distância e diferença de nível com padrão de comprimento flexível (fio, fita ou corrente métrica, com ou sem graduação divisionária) provido de indicador de leituras baseado na ação da gravidade. São peças essenciais do dispositivo o nível de bolha ou o prumo e o padrão de comprimento flexível de características definidas como sejam, em última análise, massa, homogeneidade, secção, módulo de elasticidade e coeficiente de dilatação térmica.

A aplicação de rotina do dispositivo pode, em primeira aproximação, ser ensinada a pessoa sem grande preparo especializado além do conhecimento de simples operações com números, e permite obter, rapidamente, não só a distância horizontal já corrigida do efeito da curvatura da catenária, mas ainda, simultaneamente, a diferença de nível entre os dois pontos em cujas verticais são fixados os extremos da fita métrica para sua suspensão. Acresce ainda que os resultados não sofrem praticamente influência direta dos acidentes e da inclinação do terreno.

Dizemos que se trata de um processo de medida direta por que a fita métrica (ou o fio padrão) é aplicada diretamente entre os dois pontos dados ao longo do plano ou da superfície vertical que os contém, fornecendo as medidas procuradas.

Analisaremos nesta tese alguns tipos de NIVELDIASTIMETRO a começar, naturalmente, por aquele que constituiu o ponto de partida da pesquisa que nos levou à descoberta de outros, fato que permitiu generalizar a idéia de NIVELDIASTIMETRO.

A - PRIMEIRO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO
CONSTRUIDO - PROCESSO DE MEDIDA

Sejam A e B (fig. 1) dois pontos cuja distância horizontal $X = \overline{AB}_1$ e diferença de nível $Y = \overline{B_1B}$ existentes entre êles são procuradas.

1a. operação :

Suspende-se pelas extremidades, fixando-as aos pontos A e B, uma fita métrica ou um fio padrão graduado $\overline{Am_1m_2B}$ de comprimento 2a conhecido. Por exemplo, $2a = 10m = 10.000\text{mm}$ (milímetros). Assim o padrão fica no plano vertical que contém os dois pontos dados.

2a. operação :

Faz-se deslisar ao longo da fita métrica um indicador de leituras de sua graduação que pode ser constituído de um nível de bolha N preso a um suporte ab (figs. 1 e 3), suspenso por meio de duas roldanas. Este indicador de leituras sob a ação do próprio peso tenderá a deslisar naturalmente para uma única posição de equilíbrio no trecho horizontal $\overline{m_1m_2}$ mais baixo da fita. Ele indicará o mesmo ponto de sua graduação sempre que a bolha do nível fôr centrada, e, com o rigor que depende principalmente da sensibilidade desse nível e da homogeneidade e uniformidade da espessura do fio padrão ou da fita métrica.

Consideremos o ponto m_1 genérico (figs. 1 e 3) indicado na fita métrica que se encontra sob uma das roldanas de apoio do indicador suspenso, quando a bolha do nível, convenientemente retificado, estiver centrada e a linha $\overline{m_1m_2}$ dos dois apoios estiver horizontal. Seja, por exemplo, $m_1 = 4700 - 250 = 4450\text{ mm}$ obtido pela leitura 4700 mm feita no índice J de referência (fig.3) menos 250 mm que representa o pequeno comprimento conhecido entre o ponto indicado por J e o ponto m_1 de apoio de uma das roldanas.

Supondo o zero da graduação da fita métrica em coincidência com o ponto A (fig. 1), a leitura $m_1 = 4450\text{ mm}$ representa o comprimento $\overline{Am_1}$ desenvolvido ao longo da fita desde A até m_1 .

3a. operação :

Eleva-se uma das extremidades da fita métrica em relação à outra de um comprimento conhecido $\overline{BB'} = \Delta Y$ (fig. 2) sobre a mesma vertical de B. Por exemplo, $\overline{BB'} = 1\text{ m} = 1000\text{ mm}$. Com a extremidade da fita fixa agora em B' , o indicador de leituras provido de nível, deslisará até o trecho $\overline{m_1 m_2}$ mais baixo e nessa posição permitirá obter, da mesma maneira, nova leitura m'_1 na graduação da fita após a bolha do nível haver sido centrada.

Seja, por exemplo, $m'_1 = 3100 - 250 = 2850\text{ mm}$ a nova leitura feita com o auxílio do índice J do indicador de leituras (fig. 3).

Resultado :

Essas duas simples leituras genéricas m_1 e m'_1 colhidas respectivamente nas 2a. e 3a. operações acima indicadas, permitem obter imediatamente a distância horizontal X e a diferença de nível Y procuradas entre os dois pontos A e B dados, por meio de uma tabela numérica de dupla entrada, própria para o NIVELDIAS-TIMETRO empregado.

Representamos na página dupla 5-a um exemplar de página da tabela que serve ao aparelho construído conforme o modelo da figura 3. Neste aparelho o indicador de leituras pesa cerca de 439 gramas e a distância $\overline{m_1 m_2}$ entre os dois apoios das roldanas suspensas é de 500 milímetros. A fita métrica tem o peso cerca de 12,3 gramas por metro linear; é graduada de centímetro em centímetro, de zero a 2a e fizemos

$$2a = 1000\text{ cm} = 2a' + \overline{m_1 m_2} = (9500 + 500)\text{ mm}.$$

O valor $m_1 = 4450\text{ mm}$ da primeira leitura acima exemplificada, obtido na segunda operação, pode ser encontrado na margem direita ou na margem esquerda da página da tabela. E o valor $m'_1 = 2850\text{ mm}$ da segunda leitura acima exemplificada, obtido na terceira operação, pode ser encontrado na margem superior ou na margem inferior da mesma página da tabela. No cruzamento da linha de quadriculas que corresponde à leitura $m_1 = 4450$, com a coluna de quadriculas que corresponde à leitura $m'_1 = 2850$, acha-se a quadricula onde figuram uma distância parcial $H = 9093,2\text{ mm}$ e a diferença de nível $Y = V = +190,1\text{ mm}$ procurada. A distância horizontal será

$$X = H + \overline{m_1 m_2} = 9093,2 + 500 = 9593,2\text{ mm}$$

onde $\overline{m_1 m_2} = 500\text{ mm}$ é o comprimento constante entre os pontos de

2850 ou 6650	2860 ou 6640	2870 ou 6630	2880 ou 6620	2890 ou 6610	2900 ou 6600	m'_1 m'_1 ou m'_1 m'_1
9065,1 $\pm 228,8$	9059,1 $\pm 230,3$	9053,0 $\pm 231,8$	9047,0 $\pm 233,3$	9041,0 $\pm 234,8$	9034,9 $\pm 236,3$	H 4400 V 5100
9070,7 $\pm 221,1$	9064,8 $\pm 222,5$	9058,9 $\pm 223,9$	9053,0 $\pm 225,3$	9047,1 $\pm 226,8$	9041,2 $\pm 228,2$	H 4410 V 5090
9076,3 $\pm 213,3$	9070,5 $\pm 214,7$	9064,8 $\pm 216,0$	9059,0 $\pm 217,4$	9053,3 $\pm 218,8$	9047,5 $\pm 220,1$	H 4420 V 5080
9082,0 $\pm 205,6$	9076,4 $\pm 206,8$	9070,7 $\pm 208,2$	9065,1 $\pm 209,4$	9059,4 $\pm 210,7$	9053,8 $\pm 212,0$	H 4430 V 5070
9087,6 $\pm 197,8$	9082,1 $\pm 199,0$	9076,6 $\pm 200,3$	9071,1 $\pm 201,5$	9065,5 $\pm 202,7$	9060,1 $\pm 203,9$	H 4440 V 5060
9093,2 $\pm 190,1$	9087,8 $\pm 191,2$	9082,5 $\pm 192,4$	9077,1 $\pm 193,5$	9071,8 $\pm 194,7$	9066,4 $\pm 195,8$	H 4450 V 5050
9098,3 $\pm 182,8$	9093,0 $\pm 183,8$	9087,8 $\pm 185,0$	9082,5 $\pm 186,0$	9077,3 $\pm 187,2$	9072,0 $\pm 188,2$	H 4460 V 5040
9103,5 $\pm 175,4$	9098,3 $\pm 176,4$	9093,2 $\pm 177,5$	9088,0 $\pm 178,5$	9082,9 $\pm 179,6$	9077,7 $\pm 180,6$	H 4470 V 5030
9108,6 $\pm 168,1$	9103,5 $\pm 169,1$	9098,5 $\pm 170,1$	9093,4 $\pm 171,1$	9088,4 $\pm 172,1$	9083,3 $\pm 173,1$	H 4480 V 5020
9113,8 $\pm 160,7$	9108,8 $\pm 161,7$	9103,9 $\pm 162,6$	9098,9 $\pm 163,6$	9094,0 $\pm 164,5$	9089,0 $\pm 165,5$	H 4490 V 5010
9118,9 $\pm 153,4$	9114,0 $\pm 154,3$	9109,2 $\pm 155,2$	9104,3 $\pm 156,1$	9099,5 $\pm 157,0$	9094,6 $\pm 157,9$	H 4500 V 5000
2850 ou 6650	2860 ou 6640	2870 ou 6630	2880 ou 6620	2890 ou 6610	2900 ou 6600	m'_1 m'_1 ou m'_1 m'_1

apoio das roldanas do indicador de leituras a que já nos referimos (figs. 1, 2 e 3).

Convém notar, no exemplo numérico dado acima para o empêço da tabela, que o sinal positivo do valor $Y = V = + 190,1$ mm serve para indicar que nas condições estudadas o ponto B está em nível superior ao do ponto A (fig. 2). Se as leituras indicadas pelo NIVELDIASTÍMETRO forem por exemplo $m_1 = 6650$ e $m'_1 = 5050$ mm encontradas na mesma página da tabela, iremos identificar a mesma quadricula em que H e V são os mesmos em valor absoluto, porém, V deve ser tomado com o sinal negativo $V = -190,1$ mm, para indicar que nesse caso o ponto B está em nível inferior ao do ponto A.

Toda vez que a primeira leitura m_1 feita na segunda operação com o NIVELDIASTÍMETRO for superior ao comprimento genérico

$$a' = \frac{2a - \overline{m_1 m_2}}{2} \text{ ou } \frac{10.000 - 500}{2} = 4750 \text{ mm, neste aparelho}$$

constante da fita métrica, o ponto B estará em nível inferior em relação ao ponto A. Por isso, os pares de números que somados dão a constante $2a' = 9500$ mm, neste aparelho, figuram no mesmo lugar nas margens de cada página da tabela e permitem obter sempre os mesmos valores de H e V, porém, o valor de V pode ser positivo ou negativo.

Se as leituras m_1 e m'_1 forem feitas até unidades de milímetro, pode-se obter H e V em última aproximação, por meio de interpolação linear entre os dados próximos figurados na tabela.

B - INTERPRETAÇÃO ELEMENTAR DA TEORIA

I. CASO IDEAL

Consideremos um fio ou uma fita métrica de massa homogênea e inextensível Amm_dB (fig. 4), sem peso próprio apreciável, suspenso pelas suas extremidades nos pontos A e B, e um indicador de leituras mm_d de forma simétrica e de massa homogênea bastante apreciável, com peso P , suspenso pelos pontos m e m_d em roldanas de dimensões e atrito desprezáveis. O indicador de leituras

podendo deslizar ao longo da fita, irá estacionar em posição de equilibrio natural, por ação da gravidade, no trecho mais baixo $\overline{mm_d}$.

Nessas condições, a fita não possuindo peso próprio apre^cciável, as linhas \overline{Am} e $\overline{Bm_d}$ podem ser consideradas retas e direções de duas forças componentes, ambas inclinadas de um mesmo ângulo α em relação ao horizonte desde que a reta de apoio $\overline{mm_d}$ seja horizontal. A resultante dessas duas forças equilibra uma terceira força vertical, dirigida para baixo, isto é, o peso do indicador de leituras.

Se elevarmos a extremidade B da fita métrica para o ponto B' sobre a vertical de B, o indicador de leituras irá deslizar novamente por ação da gravidade, procurando sua posição de equilibrio, no novo trecho $\overline{m'm'_d}$ (fig. 4), e as retas $\overline{Am'}$ e $\overline{B'm'_d}$ conservarão a mesma inclinação α sobre o horizonte desde que, em princípio, a reta de apoio $\overline{m'm'_d}$ se mantenha horizontal.

Sejam m e m' as duas leituras indicadas na fita métrica no ponto de apoio do indicador de leituras mais próximo de A e $Am_d B$ ou $Am'm'_d B'$ igual a

$$2a = 2a' + \overline{mm_d}$$

o comprimento total da fita com o zero em A. Nessas condições a distância horizontal

$$X = \overline{AB_1} = \overline{AB'_2} + \overline{B'_2B_1} = \overline{AB'_2} + \overline{m'm_d}$$

e a diferença de nível $Y = \overline{B_1B}$ entre os dois pontos A e B podem ser expressas por fórmulas trigonométricas simples, conhecendo-se o comprimento vertical $\Delta Y = \overline{BB'}$.

Tendo sempre em vista a figura 4, podemos escrever neste caso ideal baseados na Trigonometria plana :

$$Y = \overline{B_1B} = (\overline{m_d B} - \overline{Am}) \operatorname{sen} \alpha = [(2a' - m) - m] \operatorname{sen} \alpha = 2(a' - m) \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y + \Delta Y = (\overline{m'_d B} - \overline{Am'}) \operatorname{sen} \alpha = [(2a' - m') - m'] \operatorname{sen} \alpha = 2(a' - m') \operatorname{sen} \alpha$$

ou

$$(1) \quad Y = 2(a' - m) \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y + \Delta Y = 2(a' - m') \operatorname{sen} \alpha$$

e por diferença

$$(1a) \quad \Delta Y = 2(m' - m) \operatorname{sen} \alpha$$

de onde

$$(2) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\Delta Y}{2(m' - m)}$$

em que $\operatorname{sen} \alpha$ ou α se mantém constante, qualquer que seja o valor

de Y quando X não varia.

Por sua vez

$$(3) \quad X = 2a' \cos \alpha + \overline{mm}_d = X' + \overline{mm}_d$$

em que \overline{mm}_d é um comprimento horizontal constante e conhecido;

$$2a' = 2a - \overline{mm}_d$$

é um comprimento constante e conhecido na fita métrica; e

$$(4) \quad \cos \alpha = \cos(\text{arc sen } \alpha)$$

que pode ser obtido numéricamente numa tábua de senos e cossenos naturais. Portanto, X só varia com α ou $\cos \alpha$.

As fórmulas (1), (2), (3) e (4) indicadas para esse NI-VELDIASTÍMETRO permitem calcular a diferença de nível Y e a distância horizontal X (fig. 4) entre os dois pontos dados A e B , com as simples leituras m e m' , no caso ideal em que se supõe: a fita métrica ou o fio padrão sem peso apreciável e consequentemente seus ramos retilíneos, quando suspensa; e o indicador de leituras de peso apreciável e com a constante \overline{mm}_d horizontal entre os seus dois pontos de apoio. A horizontalidade desta reta \overline{mm}_d é realizada por meio de um nível de bolha.

Se o indicador de leituras fosse representado por um peso suspenso num único ponto m , a constante \overline{mm}_d reduzir-se-ia a zero e resultaria $2a = 2a'$ nas expressões (1) e (3) acima obtidas.

Entretanto, na realização prática, o peso do fio ou da fita métrica não deve ser desprezado como supusemos acima, nesse caso ideal, pois essa hipótese acarreta um erro sistemático variável e apreciável que vamos considerar a seguir.

2. CASO REAL

O peso próprio da fita métrica ou do fio padrão não sendo desprezável, os seus ramos suspensos, mais acentuadamente os ramos longos \widehat{Am}_1 e \widehat{Bm}_2 (fig. 1), constituem arcos de curvas transientes (catenárias) e assim, não sendo retilíneos, os termos $\text{sen } \alpha$ e $\cos \alpha$ das fórmulas (1), (2), (3) e (4) indicadas na página 7 e acima precisam agora ser devidamente interpretados para que elas possam ser utilizadas no caso real.

Esta interpretação necessária é feita tendo em vista que a cada par de pontos ou leituras m_1 e m'_1 colhidas no caso real de

ve corresponder um e único par de pontos m e m' do caso ideal.

Vejamos como realizar essa interpretação e obter os elementos necessários ao cálculo numérico.

Quando, por exemplo, se eleva a extremidade B da fita métrica para B' (fig. 4), sobre a mesma vertical de B , da quantidade ΔY , o cálculo numérico de $\sin \alpha$ é dado, como vimos no caso ideal por

$$\sin \alpha = \frac{\Delta Y}{2(m - m')}$$

sendo m e m' as leituras dadas pelo indicador de leituras, de peso P , que deslisa na fita métrica, quando uma extremidade se encontra em B e B' respectivamente.

Entretanto, tendo em vista o peso próprio da fita, este se combina com o peso P do indicador e a resultante real faz com que este atinja sua posição de equilíbrio indicando um ponto da graduação da fita que não é o mesmo suposto no caso ideal. Quando a extremidade B da fita está mais alta que a extremidade A , o trecho \widehat{Bm}_d (fig. 4) é maior e por isso mais pesado que o trecho \widehat{Am} . Assim a resultante das forças representadas pelos pesos de \widehat{Am} e \widehat{Bm}_d e P estará mais próxima da extremidade B ao longo da fita métrica de que a força representada apenas pelo peso P quando se supõe (no caso ideal) que \widehat{Am} e \widehat{Bm}_d não têm peso. Dessa maneira se pode compreender que na realidade o índice que o peso P arrasta ao longo da fita indica sempre o ponto m_1 (real) (fig. 1) diferente de m (ideal) (fig. 4).

O ponto mais baixo m_1 (do caso real, fig. 1) estará mais afastado da extremidade A ao longo da fita do que o ponto mais baixo m (do caso ideal, fig. 4), quando esta extremidade A se encontra em nível inferior em relação à extremidade oposta da fita, isto é, quando \widehat{Am} é menor do que \widehat{Bm}_d (fig. 4) ou ainda quando \widehat{Am}_1 é menor do que \widehat{Bm}_2 (fig. 1) ou, quando as leituras m_1 obtidas operando com o NIVELDIASTIMETRO real, são menores que o comprimento genérico

$$a' = \frac{2a - m_1 m_2}{2} = \frac{2a - m \ m_d}{2}$$

da fita métrica, caracterizado a pags. 5 a 8.

Porém, inversamente, quando a extremidade A estiver em nível mais elevado que a extremidade oposta, isto é, quando \widehat{Am} é maior que \widehat{Bm}_d (fig. 4) ou ainda, quando \widehat{Am}_1 é maior que \widehat{Bm}_2 (fig.

1) (ou $m_1 > a'$), então o ponto m_1 indicado sendo uma leitura real estará mais próximo da extremidade A do que m do caso ideal (fig. 4), pelo mesmo motivo acima indicado.

Por esse motivo, as leituras m_1 obtidas operando com o NIVELDIASTIMETRO real sendo corrigidas de uma certa quantidade Δm_1 variável com X e Y, se transformam em leituras m que correspondem ao caso do NIVELDIASTIMETRO ideal; ou genéricamente

$$m = m_1 + (\Delta m_1)$$

onde o termo Δm_1 é negativo quando $m_1 < a'$ e positivo quando $m_1 > a'$, pela razão indicada.

Resta saber depois como obter numéricamente a correção (Δm_1) que se deverá somar algébricamente à leitura m_1 que se faz quando se opera com o NIVELDIASTIMETRO real, para se poder usar as mesmas fórmulas (1), (2) da página 7, como fórmulas práticas fazendo nelas

$$m = m_1 + (\Delta m_1) \quad \text{e} \quad m' = m'_1 + (\Delta m'_1).$$

3. FÓRMULAS PRINCIPAIS

Em resumo, são as seguintes as fórmulas para o cálculo numérico da distância horizontal X e da diferença de nível Y entre os dois pontos dados, empregando-se um NIVELDIASTIMETRO real do modelo da figura 3.

$$(1) \quad Y = 2(a' - m) \operatorname{sen} \alpha$$

$$(2) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\Delta Y}{2(m - m')}$$

$$(3) \quad X = 2a' \cdot \operatorname{cos} \alpha + \overline{m_1 m_2} = X' + \overline{m_1 m_2}$$

$$(4) \quad \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} \alpha)$$

$$(5) \quad \begin{cases} m = m_1 + (\Delta m_1) \\ m' = m'_1 + (\Delta m'_1) \end{cases}$$

$$(6) \quad 2a = 2a' + \overline{m_1 m_2}$$

Este $2a$ é o comprimento total da fita ou do fio padrão.

Sendo o trecho $\overline{m_1 m_2}$ (fig. 1) relativamente pequeno admitimo-lo retilíneo e horizontal.

O termo (Δm_1) ou $(\Delta m'_1)$ será positivo quando $m_1 > a'$ ou $m'_1 > a'$ e negativo quando $m_1 < a'$ ou $m'_1 < a'$, respectivamente.

Embora não se conheçam inicialmente os valores numéricos de (Δm_1) e $(\Delta m'_1)$, eles podem ser obtidos praticamente empregando um gráfico apropriado o qual pode ser construído empiricamente, como vamos indicar a seguir, e racionalmente como veremos depois.

Para o estudo desse gráfico, vamos empregar as fórmulas fundamentais (1), (2), (3), (4), (5) e (6), convenientemente combinadas.

Assim, por exemplo, substituindo as (5) em (1) e (2) e fazendo :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta m_1 = \frac{K_1}{\sin \alpha} \\ \Delta m'_1 = \frac{K'_1}{\sin \alpha} \end{array} \right.$$

resulta

$$(1') \quad Y = 2 \left[a' - \{ m_1 + (\Delta m_1) \} \right] \sin \alpha = 2(a' - m_1) \sin \alpha - 2(K_1)$$

e

$$(2') \quad \sin \alpha = \frac{\Delta Y}{2 \left[\{ m_1 + (\Delta m_1) \} - \{ m'_1 + (\Delta m'_1) \} \right]} \quad \text{ou}$$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta Y}{2 (m_1 - m'_1) + 2 \left[\left(\frac{K_1}{\sin \alpha} \right) - \left(\frac{K'_1}{\sin \alpha} \right) \right]}$$

ou

$$\sin \alpha (m_1 - m'_1) + \left[(K_1) - (K'_1) \right] = \frac{\Delta Y}{2}$$

onde

$$(2'') \quad \sin \alpha = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - \left[(K_1) - (K'_1) \right]}{m_1 - m'_1}$$

onde os termos (K_1) ou (K'_1) têm o mesmo sinal que (Δm_1) ou $(\Delta m'_1)$, como ficou convencionado à página anterior.

O termo ΔY será positivo quando o ponto B' estiver acima de B (figs. 2 e 4) e será negativo quando B' estiver abaixo de B . Nestas condições $\sin \alpha$ representa nas fórmulas estudadas uma quantidade essencialmente positiva, pois, o zero da graduação da fita sendo sempre colocado em coincidência com o ponto A , como foi admitido antes, o denominador de qualquer das expressões (2) ou (2'') ou (2'') acima, é positivo ou negativo, respectivamente, conforme ΔY seja também positivo ou negativo.

Nas condições já indicadas para as operações de medida (v. pag. 4 e seguintes) e para o cálculo numérico com as fórmulas

las estudadas, o valor de Y será positivo quando o ponto B (figs. 2 e 4) se encontrar em nível superior ao do ponto A , e negativo, quando se encontrar em nível inferior ao de A . E o valor de X se-
rá sempre positivo, uma vez que o comprimento $2a$ ou $2a'$ da fita ou do fio padrão é uma quantidade sempre representada em valor absolu-
to.

Vejamos, em sequência como se pôde, experimentalmente, construir o gráfico que permite o uso das fórmulas no cálculo de X e de Y .

4. CONSTRUÇÃO EMPÍRICA DO GRÁFICO REPRE- SENTATIVO DAS CORREÇÕES (K) OU (Δ_m)

Consideremos as duas hastas (A) e (B) graduadas e verti-
calizadas (fig. 5) e seja (C) um plano horizontal sobre o qual se
medem diretamente, por meio de um padrão de comprimento, as distâ-
ncias horizontais X_c , variáveis à vontade, entre as verticais das
graduações daquelas hastas (A) e (B). Pode-se obter, por processo
clássico de Topografia, empregando nível de luneta, as alturas Y_c
de quaisquer dos pontos da graduação de (A) em relação a pontos da
graduação de (B).

Admitamos assim as distâncias X_c e as diferenças de ni-
vel (Y_{ci}) conhecidas.

Suponhamos inicialmente para um dado X_c a extremidade ze-
ro da fita métrica fixa ao ponto A (fig. 5) e a outra extremidade
 $2a$ podendo fixar-se num ponto qualquer B_i da haste vertical (B),
de modo que Y_{ci} seja a altura entre A (fixo) e B_i (variável).

Operando com o indicador de leituras provido de nível de
bolha, podemos obter para cada ponto B_i uma leitura m_{li} da fita mé-
trica indicada quando, em cada posição conveniente, a bolha esti-
ver centrada.

Fazendo variar B_i , por exemplo, com intervalos iguais
desde B (fig. 5) abaixo de A até B_1 no mesmo nível que A , as
leituras da fita variarão desde próximo de $2a'$ até a' .

Fixando agora a extremidade $2a$ da fita métrica em B_1
(fig. 5) e fazendo a outra extremidade zero variar de posição ao
longo da haste vertical (A) desde A no mesmo nível de B_1 até A_1 ,

abaixo de B_1 de maneira semelhante, as leituras da fita métrica nesta série variarão desde a' até próximo de zero.

Esta segunda série de leituras é simétrica à primeira em relação a a' , supondo o indicador de leituras com o nível retificado e a fita métrica de massa homogênea.

Conhecendo a distância horizontal X_c e a série de valores (Y_{ci}) da diferença de nível variável, as fórmulas (3) e (1') (pag. 10 e 11) permitem, como vamos ver, calcular as leituras ideais definidas pelas expressões (5) (pag. 10) ou genéricamente

$$(5') \quad m_i = m_{li} + (\Delta m_{li})$$

onde m_{li} representa as leituras reais executadas como foi indicado nas páginas 4 e 5 e (Δm_{li}) as correções que essas leituras devem sofrer para se obter as leituras ideais m_i que seriam indicadas na fita métrica se o peso próprio desta fosse desprezável.

Com efeito, da expressão (3) da página 10 se obtém :

$$(8) \quad \cos \alpha_c = \frac{X_c - \overline{m_1 m_2}}{2a'} = \frac{X_c'}{2a'}$$

que pode ser calculado numéricamente, pois X_c é a distância horizontal suposta conhecida; $\overline{m_1 m_2}$ é o comprimento conhecido entre os apoios das roldanas do nível de bolha suspenso; e $2a' = 2a - \overline{m_1 m_2}$ onde $2a$ é o comprimento total da fita métrica.

Uma vez calculado $\cos \alpha_c$, pode-se obter

$$(9) \quad \sin \alpha_c = \sin (\arccos \alpha_c)$$

com auxílio de uma tabela de senos e cossenos naturais.

E pela expressão (1') da página 11, tendo em vista a (5') acima, pode-se obter :

$$(5'') \quad m_i = m_{li} + (\Delta m_{li}) = a' - \frac{(Y_{ci})}{2 \sin \alpha_c}$$

em que os termos que figuram no último membro sendo conhecidos permitem calcular uma série de leituras ideais m_i que correspondem a um único valor de $\sin \alpha_c$ ou de X_c e a uma série de valores da diferença de nível (Y_{ci}).

Se tomarmos algumas poucas distâncias X_c que correspondam a valores de α_c próximos daqueles que mais frequentemente aparecem nas operações de medidas, as expressões (8), (9) e (5'') permitem calcular novas séries de leituras ideais m_i cada uma correspondendo a um valor de $\sin \alpha_c$ ou de X_c .

Assim, a cada valor de $\text{sen} \alpha_c$ corresponde uma série de valores de (Δm_{li}) dado na (5") por

$$(10) \quad (\Delta m_{li}) = m_i - m_{li}$$

e uma série de valores de (K_i) dados genéricamente, segundo as (7) da página 11, por

$$(11) \quad K_i = (\Delta m_{li}) \text{sen} \alpha_c$$

onde $\text{sen} \alpha_c$ sendo uma grandeza sempre positiva, K_i tem o sinal de Δm_{li} . Segundo vimos à página 10, o termo Δm_{li} é negativo quando $m_{li} < a'$ e positivo quando $m_{li} > a'$.

Consideremos num gráfico de eixos cartesianos as leituras reais m_{li} representadas no eixo das abcissas. Se tomarmos para cada valor m_{li} de uma série de leituras, uma ordenada proporcional ao valor de K_i correspondente, calculado numéricamente pela (11), podemos construir por pontos uma curva isométrica que corresponde ao $\text{sen} \alpha_c$ da série considerada.

Construindo-se algumas poucas curvas isométricas que têm o aspecto daquelas da figura 6, pode-se traçar por interpolação gráfica outras curvas que indicam outros valores de $\text{sen} \alpha_c$, ficando assim construído o gráfico que temos em vista.

Notando que os ramos negativos das curvas são simétricos aos ramos positivos em relação ao ponto a' , pode-se na prática eliminar um dos feixes de ramos e o gráfico utilizável fica com dimensões reduzidas à metade do original. No gráfico assim utilizado (fig. 7), a graduação m_{li} cresce de zero até a' , da esquerda para a direita e de a' até $2a'$, da direita para a esquerda. Para seu uso convém lembrar que se $m_{li} < a'$ K_i será negativo e se $m_{li} > a'$ K_i será positivo, excepto nas proximidades de zero e de $2a'$ em que as curvas foram agora interrompidas devido à dificuldade experimental de obter pontos nessas regiões.

Esse gráfico serve para um dos primeiros aparelhos que desenhámos (fig. 3) e construimos com algumas características já definidas à página 5.

Veremos mais tarde que o mesmo gráfico pode ser construído racionalmente em toda sua extensão conhecendo-se o peso P do indicador de leituras e o peso unitário p da fita métrica (figs. 6 e 21).

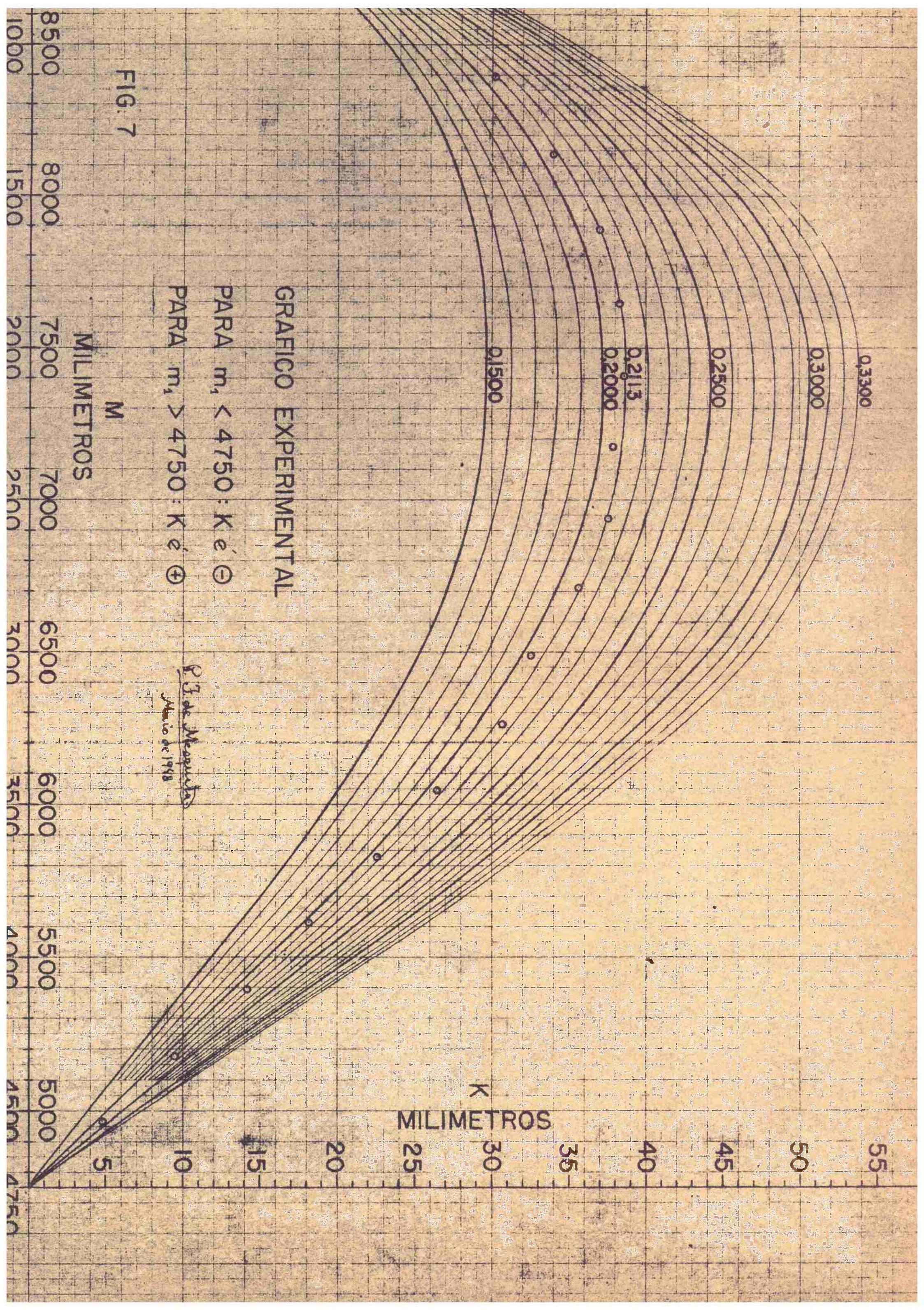
GRAFICO EXPERIMENTAL

PARA $m_1 < 4750$: $K \approx \Theta$

PARA $m_1 > 4750$: $K \approx \Theta$

CF de Mezquita
Mayo de 1948

FIG. 7



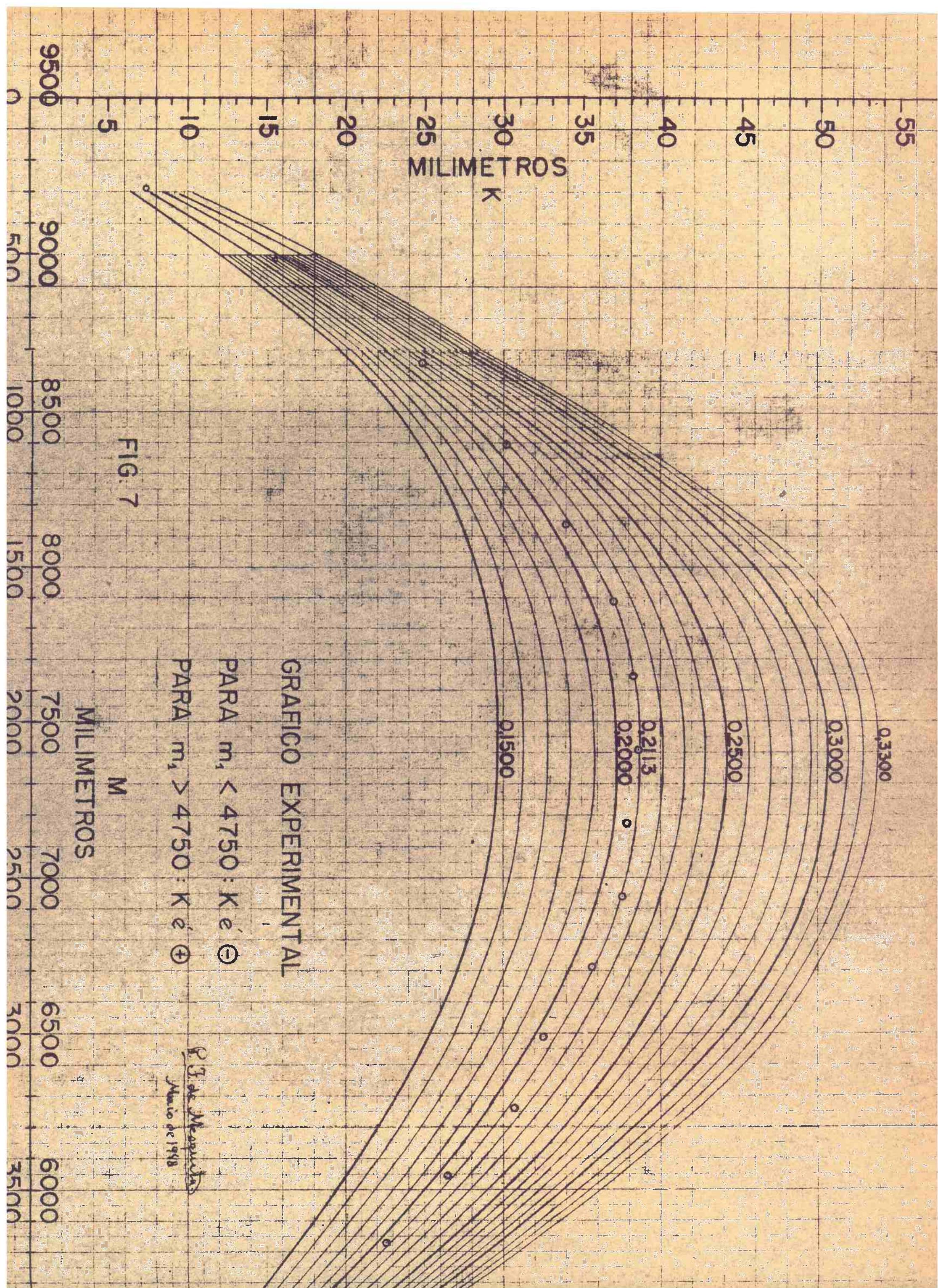


FIG. 7

5. APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS COM AUXÍLIO DO GRÁFICO

A distância horizontal X e a diferença de nível Y podem ser obtidas através do par de leituras m_1 e m'_1 indicado pelo aparelho, das fórmulas estudadas antes (pag. 10) e auxílio do gráfico construído (fig. 7), mediante as indicações seguintes

$$(1') \quad Y = 2(a' - m_1) \operatorname{sen} \alpha - 2(K_1) \quad (\text{pag. 11})$$

$$(3) \quad X = 2a' \operatorname{cos} \alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} = X' + \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} \quad \text{onde}$$

$$(4) \quad \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} \alpha)$$

Nessas expressões são conhecidos o padrão de comprimento $2a'$, o segmento constante $\frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}$ (fig. 1) e a leitura m_1 indicada pelo aparelho. O termo (K_1) pode ser obtido pelo gráfico (fig. 7) como a ordenada de abcissa m_1 desde que se conheça $\operatorname{sen} \alpha$.

Acontece assim que o valor de $\operatorname{sen} \alpha$ [vêr fórmula (2'') à pág. 11] é chave da solução e pode ser obtido por aproximações sucessivas que formulamos em seguida

$$(2_0) \quad \operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\Delta Y}{2(m_1 - m'_1)}$$

$$(2_1) \quad \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_0 - (K'_1)_0]}{m_1 - m'_1}$$

$$(2_2) \quad \operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_1 - (K'_1)_1]}{m_1 - m'_1}$$

.....

$$(2_n) \quad \operatorname{sen} \alpha_n = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_{n-1} - (K'_1)_{n-1}]}{m_1 - m'_1}$$

Nessa sucessão $\operatorname{sen} \alpha_n$ tende para $\operatorname{sen} \alpha$ quando n cresce. Em casos correntes n não precisa ser superior a 2.

Por exemplo, sejam as duas leituras

$$m_1 = 9182,8 \text{ mm} \quad \text{e} \quad m'_1 = 6577,8 \text{ mm}$$

$$\Delta Y = 1000 \text{ mm.}$$

Pela fórmula (2_0) resulta

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{1000}{2 \times 2605,0} = 0,1919$$

Esta fórmula empregada equivale à (2') ou (2'') (pag. 11) porque, em primeira aproximação, admitimos que Δm_1 ou K_1 e $\Delta m'_1$ ou K'_1 são nulos. Equivale também à fórmula (2) (pag. 10) admitindo, em primeira aproximação, $m_1 = m$ e $m'_1 = m'$ do caso ideal em que êsses comprimentos m e m' são considerados retilíneos.

Na fórmula (2₁) (pág. anterior) os valores de $(K_1)_0$ e $(K'_1)_0$ são obtidos em primeira aproximação no gráfico construído (fig. 7). Cada um destes valores vem a ser a ordenada do ponto da curva identificada por $\text{sen } \alpha_0$, já calculado, e cuja abcissa é o valor correspondente m_1 e m'_1 respetivamente. No exemplo dado, para a abcissa $m_1 = 9182,8$ mm e para a curva interpolada no gráfico que corresponde a $\text{sen } \alpha_0 = 0,1919$ encontramos a ordenada $(K_1)_0 = +8,6$ mm.

Para $m'_1 = 6577,8$ mm encontramos $(K'_1)_0 = +31,9$ mm.

Assim

$$\text{sen } \alpha_1 = \frac{500 - (-23,3)}{2605} = 0,20088$$

representa um valor de $\text{sen } \alpha$ em segunda aproximação.

Com este último valor $\text{sen } \alpha_1$ e as mesmas leituras m_1 e m'_1 se obtém, semelhantemente, no gráfico, os valores $(K_1)_1 = +8,7$ mm e $(K'_1)_1 = +33,0$ mm que vão servir na fórmula (2₂) a saber:

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{500 - (-24,3)}{2605} = 0,20127$$

que representa novo valor de $\text{sen } \alpha$ em terceira aproximação.

Esta aproximação é suficiente com as características (pag. 5) do aparelho estudado (fig. 3) em que a fita métrica era graduada em centímetros e as leituras foram dadas como médias de leituras diretas realizadas até meio milímetro por mera estimativa.

Com o valor de $\text{sen } \alpha$ assim calculado, obtém-se pelas expressões (4), (3) e (1') da página 15:

$$\cos \alpha = 0,97954$$

$$X = 9500,0 \times 0,97954 + 500,0 = 9805,6 \text{ mm}$$

$$Y = 2(4750,0 - 9182,8)0,20127 - 2(+8,7) = -1801,8 \text{ mm}$$

Numa série de 49 medidas de X e Y calculadas dessa maneira com pares de leituras m_1 e m'_1 que serviram para a construção do próprio gráfico (fig. 7), encontramos os seguintes erros médios quadráticos obtidos comparando-as com medidas realizadas por outro processo: erro em X $\varepsilon_x \approx \pm 0,9$ mm

$$\text{erro em } Y \quad \varepsilon_y \approx \pm 1,3 \text{ mm}$$

II - INTERPRETAÇÃO RACIONAL
DA TEORIA E SUAS
CONSEQUÉNCIAS

A - O PROBLEMA CONTIDO NO CASO REAL DO
NIVELDIASTÍMETRO ESTUDADO

Consideremos a fita métrica graduada Am_1B ou Am'_1B' (fig. 8) suposta homogênea, flexível e inextensível com peso unitário p (em gramas por metro linear, por exemplo) e de comprimento constante $2a'$ (em milímetros, por exemplo), suspensa pelas suas extremidades, em duas posições como indica a figura 8: a primeira posição entre os pontos dados A e B ; a segunda entre os pontos A e B' , sendo $BB' = \Delta Y$ um segmento vertical, constante, conhecido.

Suponhamos que um corpo de peso P (em gramas por exemplo) pode deslizar suspenso naquela fita métrica, solicitado exclusivamente pela ação da gravidade e servindo de indicador de leituras da graduação da fita. Nas duas posições de equilíbrio natural ele vai indicar os pontos m_1 e m'_1 os mais baixos da graduação que é contada a partir do zero situado em A até o número $2a'$ (de milímetros) situado em B e B' , respectivamente.

Isto posto, trata-se de determinar:

1º) a distância horizontal $X = \overline{AB}_1$ entre os dois pontos dados A e B ;

2º) a diferença de nível $Y = \overline{B_1B}$ entre êsses pontos.

Em outras palavras, são dados: o comprimento vertical $BB' = \Delta Y$ e os comprimentos dos arcos \widehat{Am}_1 , \widehat{Bm}_1 , \widehat{Am}'_1 , $\widehat{B'm}'_1$ de catenárias homogêneas formadas por uma fita métrica padrão, suposta flexível, inextensível, de comprimento total $2a'$ com peso unitário p conhecido, estando a fita alternadamente nas duas posições de equilíbrio Am_1B e Am'_1B' . O indicador de leituras de peso P , deslizando livremente por ação da gravidade, é que determina naturalmente os pontos m_1 e m'_1 os mais baixos da fita.

Pedem-se:

1º) a distância horizontal X e

2º) a diferença de nível Y entre os pontos A e B .

ESQUEMA DE UMA SOLUÇÃO RACIONAL

A página 15 e seguinte, sob o título "Aplicação das fórmulas com auxílio do gráfico" se encontra esquematizada uma solução do problema que consiste em calcular a distância X e a diferença de nível Y (fig. 8) por meio de duas leituras m_1 e m'_1 dadas por um NIVELDIASTÍMETRO do tipo estudado.

O esquema da solução racional que agora oferecemos é o mesmo, porém, com as seguintes considerações:

1a.) o indicador de leituras $\overline{m_1 m_2}$ ou $\overline{m'_1 m'_2}$ da figura 2 se reduz a um ponto m_1 ou m'_1 na figura 8; é

2a.) o gráfico indicado para a solução (fig. 7) será construído racionalmente em função do peso P do indicador, do peso unitário p da fita métrica e em escala conveniente para que não prejudique a aproximação dos resultados desejados.

Apoiados neste esquema, vamos estudar os elementos necessários à solução do problema contido no caso real do NIVELDIASTÍMETRO em questão. Veremos depois uma solução numérica. Para isso torna-se necessário um estudo da catenária homogênea.

B - ESTUDO DA CATENÁRIA HOMOGÊNEA RELATIVA A UM ARCO

1. BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE OS DOIS ARCOS DE CATENÁRIA QUE SE OBSERVAM NO NIVELDIASTÍMETRO

Uma vez que o fio (ou fita métrica) é considerado flexível, inextensível e homogêneo, formam-se entre os pontos fixos A e B de suspensão de suas extremidades e o ponto m_1 (fig. 8) de suspensão e equilíbrio natural do indicador de leituras, duas curvas de equilíbrio cujas características convém ter em vista e es-

tudas.

Notemos desde logo que se o indicador de leituras tivesse o seu peso P tendendo a zero, no limite, isto é, para $P = 0$, ele indicaria naturalmente o vértice O' de uma única curva de equilíbrio (fig. 9) formada pelo fio suspenso por suas extremidades fixas aos pontos A e B , curva essa que se interpreta como uma catenária homogênea.

Quando o indicador de leituras tem um peso P apreciável (diferente de zero), formam-se naturalmente dois arcos de catenárias homogêneas $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$ com características bem determinadas para equilibrarem o peso P (fig. 8).

Convém registrar, desde já, uma característica marcante: os dois arcos de catenárias $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$ são semelhantes entre si no sentido de admitirem pares de tangentes, nos pontos equidistantes do ponto m_1 , igualmente inclinadas em relação ao horizonte.

Com efeito, no ponto m_1 as duas tangentes aos dois arcos de catenária determinam com o horizonte ângulos θ iguais entre si, porque essas tangentes representam também as direções de duas forças F_1 e F_2 , componentes do peso P (fig. 8), que na posição de equilíbrio devem ser iguais entre si e formar ângulos $(90^\circ - \theta)$ também iguais com a direção da força P da gravidade.

Assim, estando o fio na posição de equilíbrio, formados os arcos de catenárias homogêneas $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$, as tangentes nos pontos sobre êsses dois arcos equidistantes de m_1 , isto é, simétricos em relação a m_1 , formarão ângulos com o horizonte também iguais entre si.

E também são semelhantes os arcos $\widehat{m'_1 A}$ e $\widehat{m'_1 B'}$ (fig. 8) correspondentes a nova posição de equilíbrio do fio.

Isto posto, conclui-se que os pares de pontos dos arcos de catenárias homogêneas $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$ (ou $\widehat{m'_1 A}$ e $\widehat{m'_1 B'}$) cujas distâncias ao ponto m_1 (ou m'_1) contadas ao longo do fio são iguais duas a duas, apresentam, em relação ao ponto m_1 (ou m'_1) a mesma distância horizontal e a mesma diferença de nível, e por isso, os vértices virtuais O'_A e O'_B (ou O''_A e O''_B) das duas curvas supostas prolongadas indefinidamente, estão a uma mesma altura e se encontram também equidistantes do ponto m_1 (ou m'_1) genérico.

Quando o peso do indicador de leituras cresce em relação ao peso do fio, tendendo para o infinito em relação a este, os pon-

tos A e B permanecendo fixos, o ponto m_1 genérico do fio varia, e os arcos $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$ das duas catenárias tendem a diminuir sua curvatura e, no limite, se transformam em dois segmentos de reta que fazem com o horizonte ângulos $\theta = \alpha$ iguais entre si (fig. 4).

Assim se verifica que várias características elementares geométricas e de estabilidade das duas catenárias relativas aos arcos $\widehat{m_1 A}$ e $\widehat{m_1 B}$ ($m'_1 A$ e $m'_1 B'$) (fig. 8) são idênticas.

Por esse motivo, vamos inicialmente fazer o estudo teórico e genérico de uma catenária isolada em função dos elementos que caracterizam um arco livre \widehat{MB} (fig. 10) entre dois pontos. Depois, com os conhecimentos convenientemente introduzidos, estudaremos as condições de equilíbrio do fio suspenso pelas suas extremidades A e B (ou A' e B') (fig. 8) sujeito à ação de uma carga livre e concentrada P do indicador de leituras m_1 (ou m'_1).

A equação da catenária homogênea (fig. 10) sob a forma clássica e unitária

$$Y' = \cosh X'$$

(isto é, Y' é igual ao cosseno hiperbólico de X') que é estudada tendo em vista as funções hiperbólicas, não se presta ao estudo e à solução do problema do NIVELDIASTÍMETRO da maneira como o enfrentamos na solução esquematizada antes à página 18.

Para resolvemos o problema do NIVELDIASTÍMETRO sob aquele aspecto, tivemos que tomar como fundamento a equação da catenária relativa a um arco \widehat{MB} (fig. 10) com outra forma mais apropriada para estas aplicações, isto é :

$$Y = \left(\frac{\mathcal{P}_{HV}}{\cos \Psi_{HV}} H - \frac{\mathcal{P}_{XY}}{\cos \Psi_{XY}} X \right) \frac{X}{2} + \frac{V}{H} X$$

Esta forma da equação da catenária referida a novos eixos XY com origem no ponto B do arco \widehat{MB} (fig. 16) substitui as funções hiperbólicas por novas funções que podem ser tabeladas com largos intervalos de proporcionalidade para interpolação linear e que oferecem a vantagem de uma representação gráfica com proximação necessária e suficiente, em ábacos de emprêgo relativamente simples.

Essa equação conduz a um método parabólico de cálculo aproximado dos elementos da catenária com os quais se pode obter, por meio de fórmulas de emprêgo simplificado, valores necessários

suficientemente exatos.

Encontrâmo-la estudando artigos de Ernesto Francesio escritos para a revista italiana "L'Elettrotecnica" (Ver Bibliografia).

2. A FORMA CLÁSSICA DA EQUAÇÃO DA CATENÁRIA

A forma clássica da equação da catenária homogênea, isto é, da curva de equilíbrio formada por um fio flexível, inextensível, de secção e densidade constantes e suspenso por suas extremidades em dois pontos A e B, por exemplo (fig. 11), é a seguinte

$$(1) \quad Y = \cosh \frac{X}{c} = \frac{e^{\frac{X}{c}} + e^{-\frac{X}{c}}}{2}$$

A curva prolongada indefinidamente e referida a dois eixos cartesianos ortogonais X, horizontal, e Y, vertical (eixo de simetria da curva), em seu ponto mais baixo, isto é, no vértice O' (fig. 11) corta este eixo Y ortogonalmente a uma distância c da origem do sistema de referência. Considerada unitária a distância c e medidas as coordenadas cartesianas x e y na mesma unidade em que é medida c (em milímetros por exemplo), tem-se

$$X = \frac{x}{c} \quad \text{e} \quad Y = \frac{y}{c}$$

E por definição

$$(1') \quad y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} = c \cdot \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2}$$

onde $e = 2,71828184$ representa a base dos logarítmos neperianos e c se diz o parâmetro da catenária e $\frac{x}{c}$ é um número puro, pois x e c são expressos na mesma unidade de comprimento, assim como y.

INTERPRETAÇÃO MECÂNICA

Aquela equação (1') representa não sómente a forma geométrica de equilíbrio que assume o fio suspenso mas ainda um diagrama das tensões $y = t_x$ a que fica submetido tangencialmente o fio

no ponto genérico de abscissa x , tensões expressas na mesma unidade de peso do fio.

Assim, por exemplo, a tensão no vértice O' da curva, onde $x = 0$, em um fio de peso p gramas por metro linear será

$$y = t_0 = p.c \text{ (gramas)}$$

onde c , neste exemplo, deverá ser expresso em metros.

E a tensão num ponto qualquer de abscissa x será, com as mesmas unidades,

$$(2) \quad y = t_x = p.c.cosh \frac{x}{c} \text{ (gramas)}$$

Num exemplo numérico, se o fio pesar $p = 12,5$ gramas por metro linear e se, por hipótese, pudermos medir com um dinamômetro a tensão t_0 no vértice O' (fig. 11) da curva e encontrarmos $t_0 = 234$ gramas, o parâmetro c da catenária será

$$c = \frac{t_0}{p} = \frac{234 \text{ grf}}{12,5 \text{ grf/m}} = 18,72 \text{ m}$$

A tensão num ponto do fio que tem a abscissa $x = 7,63$ m dada pela expressão (2) será :

$$t_x = 234 \text{ grf.cosh} \frac{7,63 \text{ m}}{18,72 \text{ m}} = 234 \text{ grf.cosh} 0,407 \quad \text{ou}$$

$$t_x \approx 234 \text{ grf.} 1,084 \approx 254 \text{ grf}$$

3. ALGUMAS CONVENÇÕES

Consideremos o arco \widehat{MB} de catenária formado por um fio suspenso pelos pontos M e B (fig. 11) e tenhamos em vista vários elementos característicos da curva assim formada e suposta prolongada indefinidamente.

Adotando uma certa unidade de comprimento, o metro ou o milímetro por exemplo, vamos designar com as letras minúsculas s , h , v , x , y , t , ℓ , c , respetivamente : o comprimento s do arco \widehat{MB} ; a distância horizontal h entre os pontos M e B ; a diferença de nível v entre êsses pontos; as coordenadas x e y de um ponto genérico da curva; a tensão t no fio em qualquer ponto da curva; o comprimento ℓ da corda \overline{MB} ; e o parâmetro c da catenária.

Tomando como unidade de comprimento o parâmetro c da catenária, vamos designar com as letras maiúsculas

$$S = \frac{s}{c} \quad H = \frac{h}{c} \quad V = \frac{v}{c} \quad X = \frac{x}{c} \quad Y = \frac{y}{c}$$

$$T = \frac{t}{c} \quad L = \frac{\ell}{c}$$

os elementos correspondentes na catenária unitária.

Vamos designar com θ o ângulo genérico que as retas tangentes à catenária fazem com o eixo X . Assim θ_B e θ_M são os ângulos que as tangentes nos pontos B e M fazem com a horizontal X .

Designemos com ϕ o ângulo formado pela reta que une as extremidades M e B de um arco considerado com a horizontal, isto é, o ângulo de inclinação da corda do arco de catenária considerado.

Chamemos ainda $i = \frac{V}{H} = \frac{v}{h} = \operatorname{tg} \phi$ a declividade daquela corda.

Um arco de catenária S_{HV} ou S_{Hi} que corresponde à distância horizontal H e à diferença de nível V ou à declividade i , é caracterizado pelos dois elementos

$$H = \frac{h}{c} \quad \text{e} \quad V = \frac{v}{c}$$

ou

$$i = \frac{v}{h} = \frac{V}{H}$$

4. EXPRESSÃO DAS TANGENTES DOS ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO DA CURVA NOS EXTREMOS DE UM ARCO

Aplicemos a expressão clássica (1) da página 21 aos pontos B e M da curva (fig. 11).

Assim, considerando que

$$Y_B = Y_M + V = \cosh(X_M + H)$$

vem

$$(3) \quad Y_B = \cosh X_M + V = \cosh(X_M + H) = \\ = \cosh X_M \cosh H + \operatorname{senh} X_M \operatorname{senh} H$$

E como a derivada de Y em relação a X no ponto B é a tangente do ângulo θ_B de inclinação da curva nesse ponto resulta

$$\operatorname{tg} \theta_B = \operatorname{senh}(X_M + H) = \operatorname{senh} X_M \cosh H + \cosh X_M \operatorname{senh} H$$

Vamos multiplicar membro a membro a expressão (3) por $\cosh H$ e esta última por $\operatorname{senh} H$ para eliminar $\operatorname{senh} X_M$ da expressão da $\operatorname{tg} \theta$.

$$\cosh X_M \cosh H + V \cdot \cosh H = \cosh X_M \cosh^2 H + \operatorname{senh} X_M \operatorname{senh} H \cdot \cosh H$$

$$\operatorname{tg} \theta_B \operatorname{senh} H = \operatorname{senh} X_M \cosh H \cdot \operatorname{senh} H + \cosh X_M \operatorname{senh}^2 H$$

Por subtração

$$\cosh X_M \cosh H + V \cdot \cosh H - \operatorname{tg} \theta_B \operatorname{senh} H = \cosh X_M (\cosh^2 H - \operatorname{senh}^2 H)$$

e como

$$\cosh^2 H - \operatorname{senh}^2 H = 1$$

vem

$$(4) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{\cosh X_M (\cosh H - 1) + V \cdot \cosh H}{\operatorname{senh} H}$$

Por outro lado a expressão (3) da página 23 pode ser escrita da maneira seguinte :

$$\cosh X_M (1 - \cosh H) + V = \operatorname{senh} X_M \operatorname{senh} X$$

e como

$$\operatorname{senh} X_M = \sqrt{\cosh^2 X_M - 1}$$

vem

$$\cosh X_M (1 - \cosh H) + V = \sqrt{\cosh^2 X_M - 1} \cdot \operatorname{senh} H ;$$

elevando ambos os membros ao quadrado

$$\cosh^2 X_M (1 - \cosh H)^2 + V^2 + 2V \cdot \cosh X_M (1 - \cosh H) = (\cosh^2 X_M - 1) \operatorname{senh}^2 H$$

ou

$$[(1 - \cosh H)^2 - \operatorname{senh}^2 H] \cosh^2 X_M + 2V(1 - \cosh H) \cosh X_M + V^2 + \operatorname{senh}^2 H = 0$$

ou ainda, tendo em vista que

$$(1 - \cosh H)^2 - \operatorname{senh}^2 H = (1 + \cosh^2 H - 2 \cosh H) - (\cosh^2 H - 1) = 2(1 - \cosh H)$$

e dividindo por $2(1 - \cosh H)$

$$\cosh^2 X_M + V \cdot \cosh X_M - \frac{V^2 + \operatorname{senh}^2 H}{2(\cosh H - 1)} = 0$$

equação do segundo grau em $\cosh X_M$ que permite escrever

$$(4a) \quad \cosh X_M = - \frac{V}{2} \pm \left[\frac{V^2}{4} + \frac{V^2 + \operatorname{senh}^2 H}{2(\cosh H - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo esta em (4) e tendo em vista que

$$\cosh H - 1 = 2 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}$$

vem

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta_B &= \frac{\left[-\frac{v}{2} \pm \left(\frac{v^2}{4} + \frac{v^2 + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}}{4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}} \right)^{1/2} \right] 2 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} + v \cdot \cosh H}{\operatorname{senh} H} \\ &\quad - \frac{v \left(\cosh H - \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right) \pm \left[v^2 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \left(1 + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right) + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \operatorname{senh}^2 H \right]^{1/2}}{\operatorname{senh} H} \end{aligned}$$

onde tendo em vista que

$$1 + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} = \cosh^2 \frac{H}{2}$$

e que

$$\operatorname{senh}^2 H = \operatorname{senh}^2 2 \frac{H}{2} = 4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \cosh^2 \frac{H}{2}$$

podemos escrever

$$\text{tg } \theta = \frac{v \left(\cosh H - \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right)}{\operatorname{senh} H} \pm \left[\frac{v^2 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \cosh^2 \frac{H}{2}}{4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \cosh^2 \frac{H}{2}} + \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \operatorname{senh}^2 H}{\operatorname{senh}^2 H} \right]^{1/2}$$

ou

$$\text{tg } \theta = \frac{v \left(\cosh H - \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right)}{\operatorname{senh} H} \pm \left[\frac{v^2}{4} + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right]^{1/2}$$

Tendo em conta que

$$\cosh H = \cosh 2 \frac{H}{2} = \cosh^2 \frac{H}{2} + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}$$

e

$$\operatorname{senh} H = \operatorname{senh} 2 \frac{H}{2} = 2 \operatorname{senh} \frac{H}{2} \cosh \frac{H}{2}$$

o termo

$$\frac{\cosh H - \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}}{\operatorname{senh} H}$$

se torna

$$\frac{\cosh^2 \frac{H}{2} + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} - \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}}{2 \operatorname{senh} \frac{H}{2} \cosh \frac{H}{2}} = \frac{1}{2} \coth \frac{H}{2}$$

o qual substituído na última expressão de $\text{tg } \theta$ dá finalmente

$$(5) \quad \text{tg } \theta = \frac{v}{2} \coth \frac{H}{2} \pm \frac{1}{2} \left(v^2 + 4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right)^{1/2}$$

Esta expressão fornece $\text{tg } \theta_B$ no ponto B empregando o sinal positivo do radical e fornece $\text{tg } \theta_M$ no ponto M (fig. 11) empregando o sinal negativo do mesmo radical.

5. COMPRIMENTO DE UM ARCO DE CATENÁRIA

A diferencial de um arco pode ser expressa por

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

A equação clássica da catenária sendo

$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$ para $\frac{y}{c} = \cosh \frac{x}{c}$ e $\frac{x}{c} = X$ a diferencial será

$$dy = \operatorname{senh} X dx \quad \text{que em } ds \text{ resulta}$$

$$ds = \left[(1 + \operatorname{senh}^2 X) dx^2 \right]^{1/2} = (\cosh^2 X dx^2)^{1/2} \quad \text{ou}$$

$$ds = \cosh X dx$$

Integrando esta expressão entre o vértice O' ($0, c$) da curva (fig. 11) e um ponto qualquer (X, Y) vem

$$(6) \quad s = \int_0^X \cosh X dx = \operatorname{senh} X$$

E o comprimento de um arco de catenária em metros, por exemplo, para c medido também em metros é dado por

$$(6') \quad s = c \cdot \operatorname{senh} \frac{x}{c} = c \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{c} - 1} = \sqrt{y^2 - c^2}$$

Essa expressão sugere uma construção simples que pode ser interpretada da seguinte maneira: o comprimento do arco de catenária entre o vértice O' e um ponto qualquer da curva, B por exemplo (fig. 11), é representado geométricamente pelo cateto $\overline{BB'}$ de um triângulo retângulo, medido sobre a tangente à curva nesse ponto, tendo como hipotenusa a sua ordenada Y_B e outro cateto o parâmetro c da catenária.

Assim, resulta nesse triângulo retângulo

$$(7) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{s}{c} = s = \sqrt{y^2 - 1}$$

onde

$$(7') \quad s = c \cdot \operatorname{tg} \theta = c \cdot S$$

que representa o comprimento do arco da catenária de parâmetro c , arco contado desde o vértice O' até um ponto de coordenadas X e Y .

Portanto, tomando como unidade de comprimento o parâmetro c da catenária, o comprimento

$$s_{HV} = \frac{1}{c} s_{HV}$$

do arco formado pelo fio suspenso ligando dois pontos M e B (fig. 11) entre os quais existe a distância horizontal $H = \frac{h}{c}$ e a diferença de nível $V = \frac{v}{c}$, poderá ser expresso por

$$(8) \quad s_{HV} = \operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M = \left(V^2 + 4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right)^{1/2}$$

a qual é obtida tomando a diferença algébrica efetuada entre os valores dados pela (5) (pag. 25).

Exemplo numérico :

Sendo

$$V = 0,30 \quad H = 0,60$$

pela expressão (8) :

$$s_{HV} = \sqrt{0,30^2 + 4 \operatorname{senh}^2 \frac{0,60}{2}} = \sqrt{0,09 + 4(0,3045^2)} =$$

$$= \sqrt{0,09 + 4(0,09272)} = \sqrt{0,09 + 0,37088} =$$

$$= \sqrt{0,46088} = 0,6789$$

Se $c = 126$ mm

$$s_{HV} = c \cdot s_{HV} = 0,6789 (126 \text{ mm}) = 85,5 \text{ mm}$$

Aquela construção gráfica sugerida pela expressão (6') (fig. 11) permite recordar ainda uma propriedade importante da catenária considerada como um diagrama de tensões a saber: a componente horizontal das tensões em todos os pontos da catenária é constante e igual ao seu parâmetro c , tomando como unidade de peso o peso da parcela de fio de comprimento igual ao daquele parâmetro.

6. ALGUMAS FUNÇÕES EMPREGADAS NESTE ESTUDO DA DA CATENÁRIA RELATIVA A UM ARCO

a) As funções fundamentais S_{HV} e S_{HO}

Dividindo ambos os membros da expressão (8) acima por H

e chamando-os de S_{HV} vem :

$$(9) \quad \frac{S_{HV}}{H} = \left[\frac{V^2}{H^2} + \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{H}{2}}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} \right]^{1/2} = S_{HV}$$

Dessa maneira, consideremos o arco S_{HV} ($\frac{s_{hv}}{c}$ metros) de catenária unitária (isto é, da catenária que tem o parâmetro c metros, por exemplo, suposto conhecido e tomado como unidade de comprimento), catenária formada por um fio de comprimento s_{hv} metros, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos fixos, M e B por exemplo (fig. 11), cuja distância horizontal H ($\frac{h}{c}$ metros) e diferença de nível V ($\frac{v}{c}$ metros) são dadas.

Aquêle valor S_{HV} pode ser expresso por

$$(10) \quad S_{HV} = H \cdot S_{HO}$$

em que S_{HO} é dado pela expressão (9) sob outro aspecto (9') por meio de uma série de potências que passamos a considerar.

Fazendo em (9) $V = 0$ resulta

$$(11) \quad S_{HO} = \frac{\operatorname{senh} \frac{H}{2}}{\frac{H}{2}} = \frac{2}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ou

$$(11') \quad S_{HO} = \frac{2}{H} \left(\frac{\frac{H^3}{8}}{6} + \frac{\frac{H^5}{32}}{120} + \frac{\frac{H^7}{128}}{5040} + \dots \right) = \\ = 1 + \frac{\frac{H^2}{24}}{1920} + \frac{\frac{H^4}{322560}}{322560} + \dots$$

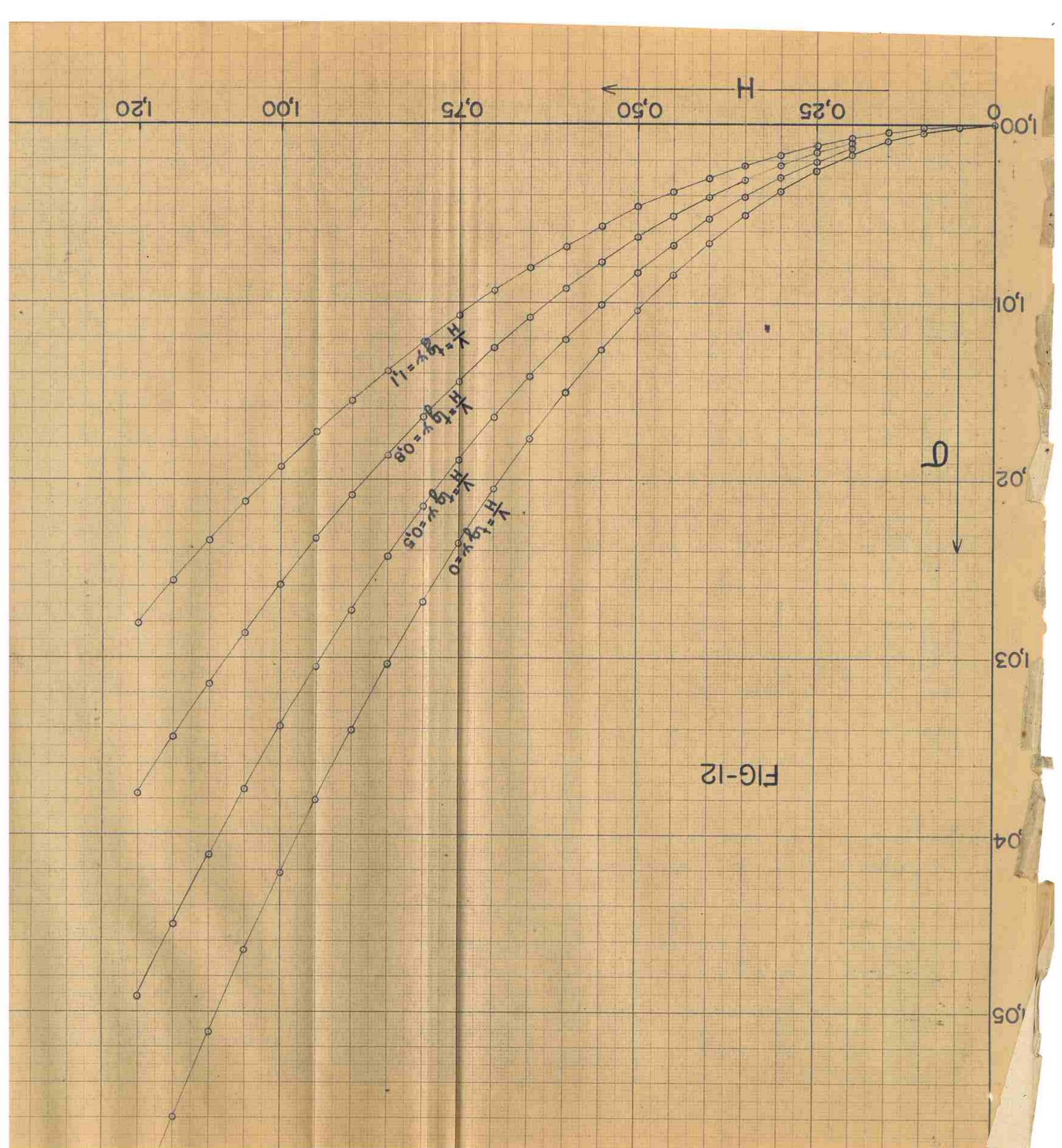
Substituindo (11) em (9) vem :

$$(9') \quad S_{HV} = \left[\left(\frac{V}{H}\right)^2 + S_{HO} \right]^{1/2}$$

A função S_{HO} calculável numéricamente pela série de potências (11') é fundamental no desenvolvimento do estudo da equação da catenária relativa a um arco como vamos ver depois.

b) A função \tilde{S}_{HV}

Se multiplicarmos ambos os membros da expressão (9') por



$\cos \psi$ e chamarmos σ_{HV} a esse produto, lembrando que ψ é o ângulo de inclinação da corda do arco MB da catenária com o horizonte (fig. 11), resulta a função

$$(12) \quad \sigma_{HV} = \sigma_{HO} \cos \psi = \left[\operatorname{tg}^2 \psi + \sigma_{HO}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos \psi$$

onde para $V = 0$ e de acordo com (11')

$$(12'') \quad \sigma_{HO} = \sigma_{HO} = \frac{\operatorname{senh} \frac{H}{2}}{\frac{H}{2}} = 1 + \frac{H^2}{24} + \frac{H^4}{1920} + \frac{H^6}{322560} + \dots$$

e assim

$$(12') \quad \sigma_{HV} = \left[\operatorname{tg}^2 \psi + \sigma_{HO}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos \psi$$

Exemplo :

Para $H = 0,60$ e $V = 0,30$ encontram-se para a (12') :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V}{H} = 0,5 \quad \psi = 26^{\circ} 33' 54'' \quad \cos \psi = 0,89443$$

$$\sigma_{HO} = \sigma_{HO} = 1,01507 \quad \sigma_{HV} = 1,13153 \quad \sigma_{HV} = 1,01207$$

E pela (10) da página 28

$$\sigma_{HV} = 0,60 \times 1,13153 = 0,67892$$

Representando a variação de σ_{HV} em ordenadas e a de H em abcissas de um gráfico cartesiano ortogonal (fig. 12) e a variação de $\frac{V}{H} = \operatorname{tg} \psi = i$ por meio de curvas isométricas nesse gráfico, verifica-se que σ_{HV} cresce quando H cresce e $\operatorname{tg} \psi$ ou V de crescem no intervalo considerado.

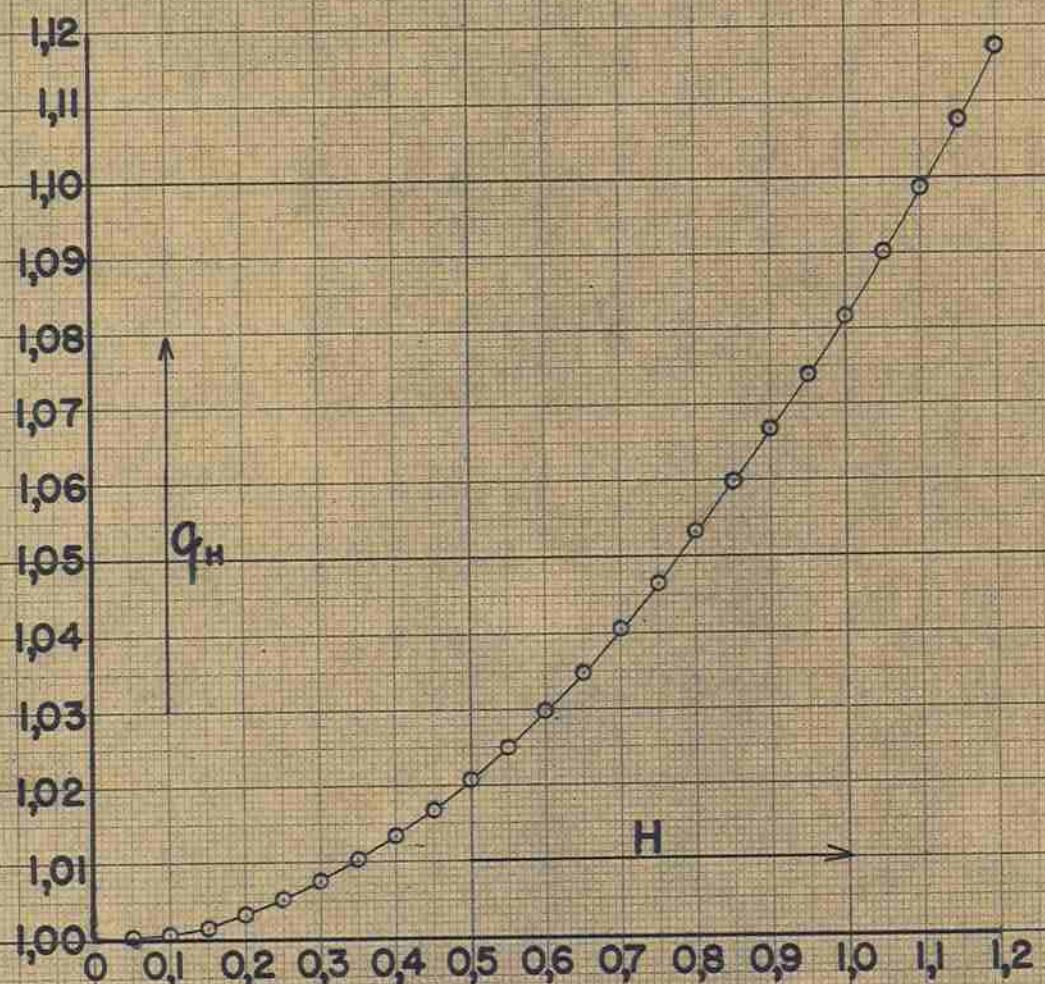
Verifica-se que $\operatorname{tg} \psi$ variando desde zero até aproximadamente 1,20 (com ψ variando de 0° até $\approx 48^{\circ} 14' 23''$) e H variando de zero até 1,20 o valor de σ_{HV} conserva-se próximo da unidade variando apenas de 1 até 1,05602.

Reproduzimos em tabela anexa (pag. 30) os valores de σ_{HV} com cinco decimais para H variando desde zero até 1,20 com intervalos de 0,05 e $\operatorname{tg} \psi$ variando desde zero até 1,20 com intervalo de 0,1.

σ_{HV}

ϕ	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
5	1,000010	1,000010	1,000010	1,000009	1,000009	1,000008	1,000007	1,000006	1,000006	1,000005	1,000005	1,000005	1,000004
0	1,000042	1,000042	1,000040	1,000038	1,000036	1,000034	1,000032	1,000027	1,000025	1,000023	1,000021	1,000019	1,000017
5	1,000094	1,000093	1,000091	1,000086	1,000081	1,000075	1,000069	1,000064	1,000058	1,000052	1,000047	1,000047	1,000042
0	1,00167	1,00165	1,00161	1,00153	1,00144	1,00133	1,00123	1,00111	1,00102	1,00092	1,00084	1,00076	1,00068
5	1,00260	1,00257	1,00250	1,00238	1,00224	1,00208	1,00191	1,00175	1,00159	1,00144	1,00130	1,00118	1,00107
0	1,00375	1,00371	1,00361	1,00347	1,00323	1,00299	1,00275	1,00251	1,00229	1,00209	1,00189	1,00170	1,00154
5	1,00509	1,00504	1,00490	1,00467	1,00439	1,00407	1,00374	1,00342	1,00311	1,00282	1,00255	1,00230	1,00210
0	1,00667	1,00661	1,00644	1,00614	1,00574	1,00533	1,00492	1,00448	1,00409	1,00369	1,00336	1,00302	1,00274
5	1,00846	1,00839	1,00814	1,00776	1,00730	1,00680	1,00623	1,00569	1,00518	1,00468	1,00424	1,00380	1,00348
0	1,01045	1,01035	1,01006	1,00959	1,00902	1,00839	1,00769	1,00703	1,00638	1,00580	1,00525	1,00474	1,00430
5	1,01266	1,01254	1,01217	1,01163	1,01093	1,01015	1,00934	1,00853	1,00776	1,00703	1,00635	1,00575	1,00522
0	1,01507	1,01493	1,01449	1,01385	1,01302	1,01207	1,01111	1,01005	1,00922	1,00836	1,00757	1,00687	1,00622
5	1,01770	1,01753	1,01703	1,01624	1,01527	1,01418	1,01304	1,01191	1,01082	1,00989	1,00889	1,00805	1,00730
0	1,02053	1,02033	1,01977	1,01886	1,01774	1,01647	1,01514	1,01384	1,01257	1,01140	1,01032	1,00934	1,00847
5	1,02360	1,02337	1,02270	1,02167	1,02038	1,01893	1,01740	1,01590	1,01446	1,01310	1,01187	1,01075	1,00974
0	1,02688	1,02662	1,02586	1,02468	1,02321	1,02156	1,01981	1,01813	1,01647	1,01494	1,01353	1,01225	1,01110
5	1,03038	1,03008	1,02923	1,02790	1,02624	1,02438	1,02243	1,02049	1,01863	1,01688	1,01530	1,01386	1,01256
0	1,03409	1,03376	1,03280	1,03133	1,02945	1,02736	1,02518	1,02300	1,02091	1,01898	1,01719	1,01557	1,01411
5	1,03803	1,03766	1,03660	1,03494	1,03287	1,03054	1,02810	1,02568	1,02336	1,02117	1,01920	1,01793	1,01576
0	1,04219	1,04178	1,04060	1,03877	1,03647	1,03387	1,03119	1,02850	1,02593	1,02353	1,02145	1,01930	1,01750
5	1,04657	1,04612	1,04482	1,04280	1,04027	1,03742	1,03445	1,03149	1,02865	1,02596	1,02356	1,02134	1,01934
0	1,05118	1,05069	1,04926	1,04705	1,04427	1,04115	1,03788	1,03463	1,03151	1,02860	1,02596	1,02348	1,02129
5	1,05602	1,05548	1,05392	1,05151	1,04847	1,04508	1,04184	1,03793	1,03452	1,03133	1,02840	1,02573	1,02351
0	1,06108	1,06049	1,05880	1,05617	1,05286	1,04915	1,04526	1,04139	1,03767	1,03419	1,03100	1,02808	1,02547

FIG-13



c) A função q_H

Chamando

$$(13) \quad q_H = \frac{H}{2} \coth \frac{H}{2}$$

e como

$$q_H = \frac{\frac{H}{2}}{\operatorname{senh} \frac{H}{2}} \cosh \frac{H}{2} \quad \text{e} \quad \cosh \frac{H}{2} = (1 + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2})^{1/2}$$

resulta

$$\begin{aligned} q_H &= \frac{\frac{H}{2}}{\operatorname{senh} \frac{H}{2}} (1 + \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2})^{1/2} = \\ &= \left[\left(\frac{\frac{H}{2}}{\operatorname{senh} \frac{H}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{H}{2}}{\operatorname{senh} \frac{H}{2}} \right)^2 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

onde pela expressão (11) da página 28

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{H}{2}}{\operatorname{senh} \frac{H}{2}} \right)^2 &= \frac{1}{\tilde{S}_{H0}^{-2}} = \tilde{S}_{H0}^{-2} \\ (14) \quad q_H &= \left(\frac{H^2}{4} + \tilde{S}_{H0}^{-2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

que é calculável numéricamente com o auxílio da série de potências (11') da página 28.

Exemplo :

$$\text{Para } H = 0,60 \quad \tilde{S}_{H0}^{-2} = \frac{1}{0,03036} = 0,97053 \quad \text{e}$$

$$q_H = 1,0298$$

Quando H varia desde zero até 1,20 o valor de q_H conserva-se próximo da unidade, variando de 1 até 1,1172 como está indicado no gráfico cartesiano anexo (fig. 13) em que H foi representado em abscissas e q_H em ordenadas.

Reproduzimos em tabela anexa (pag. 35) os valores de q_H com 4 decimais para H variando desde zero até 1,20 com intervalo de 0,05.

d) As funções \mathcal{P}_{HV} e \mathcal{S}_{HV}

Substituindo na expressão (5) (pag. 25) os valores

$$\coth \frac{H}{2} = 2 \frac{q_H}{H} \quad \text{dado pela (13) (pag. 31)}$$

e

$(V^2 + 4 \operatorname{senh}^2 \frac{H}{2})^{1/2} = S_{HV} = H \cdot S_{HV}$ dados pelas expressões (8) e (10) páginas 27 e 28, respectivamente, ela toma o seguinte aspecto

$$(15) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{V}{H} q_H \pm \frac{H}{2} S_{HV}$$

Essa expressão, como já vimos, permite obter :

1º) $\operatorname{tg} \theta_B$ no ponto B (fig. 11) superior, do arco de catenária \widehat{MB} , empregando o sinal algébrico positivo e

2º) $\operatorname{tg} \theta_M$ no ponto M, inferior, empregando o sinal negativo.

Exemplo :

Suponhamos $H = 0,60$ e $V = 0,30$.

Assim com

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg} \psi = 0,50$$

$$q_H = 1,0298 \quad \text{já obtido à página 31}$$

$$S_{HV} = 1,13153 \quad \text{já obtido à página 29, resul-}$$

ta :

$$\operatorname{tg} \theta_B = 0,5000(1,0298) + \frac{0,6000}{2} 1,13153 = 0,85436 = \begin{matrix} B \\ S \\ 0 \end{matrix}$$

$$\theta_B \approx 40^\circ 30' 33''$$

$$\operatorname{tg} \theta_M = 0,5000(1,0298) - \frac{0,6000}{2} 1,13153 = 0,17544 = \begin{matrix} M \\ S \\ 0 \end{matrix}$$

$$\theta_M \approx 9^\circ 57' 3''$$

$$\operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M = S_{HV} = 0,67892 \quad \text{também obtida à pag. 29.}$$

NOTA - Tratando-se de uma catenária em que seu parâmetro é $c = 126$ mm, resulta em milímetros $\begin{matrix} B \\ M \end{matrix} = c \cdot S_{HV} = 126 \text{ mm}(0,67892) \approx 85,5 \text{ mm}; h = c \cdot H = 126 \text{ mm}(0,60) = 75,6 \text{ mm};$

$$v = c \cdot V = 126 \text{mm}(0,30) = 37,8 \text{ mm}; \frac{B}{0} = 126 \text{mm}(0,854) = 107,6$$

mm. E da expressão (6') da página 26:

$$y_B = \sqrt{\frac{B}{0}^2 + c^2} \approx \sqrt{107,6^2 + 126^2} \approx \sqrt{27453,8} = 165,7 \text{ mm}$$

Fazendo na expressão (15) (pag. 32)

$$(16) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} q_H + \frac{H}{2} S_{HV} = \frac{V}{H} + \frac{\mathcal{P}_{HV}}{H} \frac{H}{2}$$

e

$$(17) \quad \operatorname{tg} \theta_M = \frac{V}{H} q_H - \frac{H}{2} S_{HV} = \frac{V}{H} - \frac{\mathcal{R}_{HV}}{H} \frac{H}{2}$$

obtemos as expressões das duas funções \mathcal{P}_{HV} e \mathcal{R}_{HV} :

$$(18) \quad \mathcal{P}_{HV} = S_{HV} + \frac{2V}{H^2} (q_H - 1)$$

$$(19) \quad \mathcal{R}_{HV} = S_{HV} - \frac{2V}{H^2} (q_H - 1)$$

e assim

$$(20) \quad \mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV} = 2 S_{HV}$$

E pelas (16) e (17)

$$(21) \quad \operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M = \frac{H}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV}) = H S_{HV} = S_{HV}$$

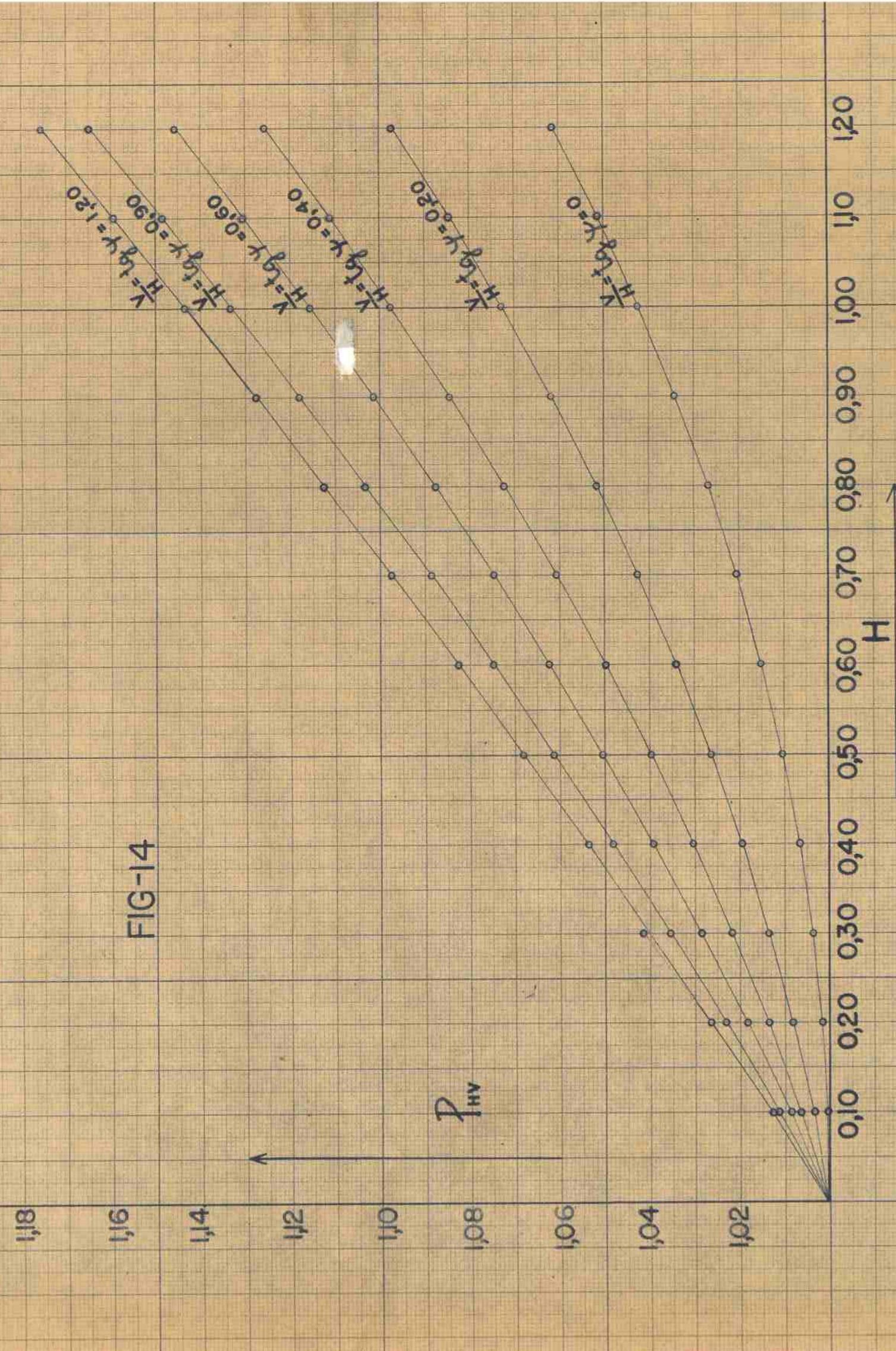
É de notar pelas (18), (19) e (20) que

$$(22) \quad \mathcal{P}_{H,-V} = \mathcal{R}_{HV} \quad \mathcal{R}_{H,-V} = \mathcal{P}_{HV} \quad \text{e} \quad S_{H,V} = S_{HV}$$

isto é, quando em \mathcal{P} a ordenada V tem sinal algébrico oposto ao da ordenada V em \mathcal{R} resulta que as duas funções \mathcal{P} e \mathcal{R} são iguais entre si, e, ainda, a função S de um caso será também igual à função S do outro caso.

Em outras palavras isso significa (como se compreende melhor tendo em vista as figuras 16 e 17 e a equação da catenária que vamos estudar depois) que os arcos MB iguais de duas catenárias, um arco (fig. 16) com origem em B e V positivo e outro (fig. 17) com origem em M e V negativo, têm as funções \mathcal{P} e S

FIG-14



no primeiro iguais respetivamente às funções \mathcal{R} e \mathcal{S} no outro, em valor absoluto.

Notemos ainda que as expressões (18) e (19) da página 33 e as (11) e (11'), (12) e (12') das páginas 28 e 29, no caso de $V = 0$ resultam

$$(23) \quad \mathcal{P}_{H0} = \mathcal{R}_{H0} = \mathcal{S}_{H0} = \sigma_{H0} = \frac{\operatorname{senh} \frac{H}{2}}{\frac{H}{2}} = 1 + \frac{H^2}{24} + \frac{H^4}{1920} + \frac{H^6}{322560} + \dots$$

e) As funções \mathcal{P}_{HV} e \mathcal{V}_{HV}

Se multiplicarmos ambos os membros das expressões (18) e (19) por $\cos \psi$ e chamarmos respetivamente de \mathcal{P}_{HV} e \mathcal{V}_{HV} a êsses dois produtos e ainda, lembrando pela expressão (12) que

$$\sigma_{HV} = \mathcal{S}_{HV} \cdot \cos \psi \text{ e que } \frac{V}{H} \cos \psi = \operatorname{tg} \psi \cos \psi = \operatorname{sen} \psi$$

resulta :

$$(24) \quad \mathcal{P}_{HV} = \sigma_{HV} + 2(a_H - 1) \frac{\operatorname{sen} \psi}{H} = \mathcal{R}_{HV} \cos \psi$$

$$(25) \quad \mathcal{V}_{HV} = \sigma_{HV} - 2(a_H - 1) \frac{\operatorname{sen} \psi}{H} = \mathcal{S}_{HV} \cos \psi$$

Estes valores são calculáveis numéricamente após o cálculo das σ_{HV} e a_H já estudadas antes e exemplificadas.

Exemplo :

Para $H = 0,60$ e $V = 0,30$ com auxílio de σ_{HV} e a_H já obtidas antes :

$$\mathcal{P}_{HV} = 1,01207 + 2(1,0298 - 1) \frac{0,447215}{0,60} \approx 1,0565$$

$$\mathcal{V}_{HV} = 1,01207 - 2(1,0298 - 1) \frac{0,447215}{0,60} \approx 0,9676$$

Representando a variação de \mathcal{P}_{HV} em ordenadas e a de H em abscissas num gráfico cartesiano ortogonal (Ver fig. 14) e a variação de $\frac{V}{H} = \operatorname{tg} \psi$ por meio de linhas isométricas nesse gráfico, verifica-se que \mathcal{P}_{HV} cresce quando H e $\operatorname{tg} \psi$ ou V crescem no intervalo considerado.

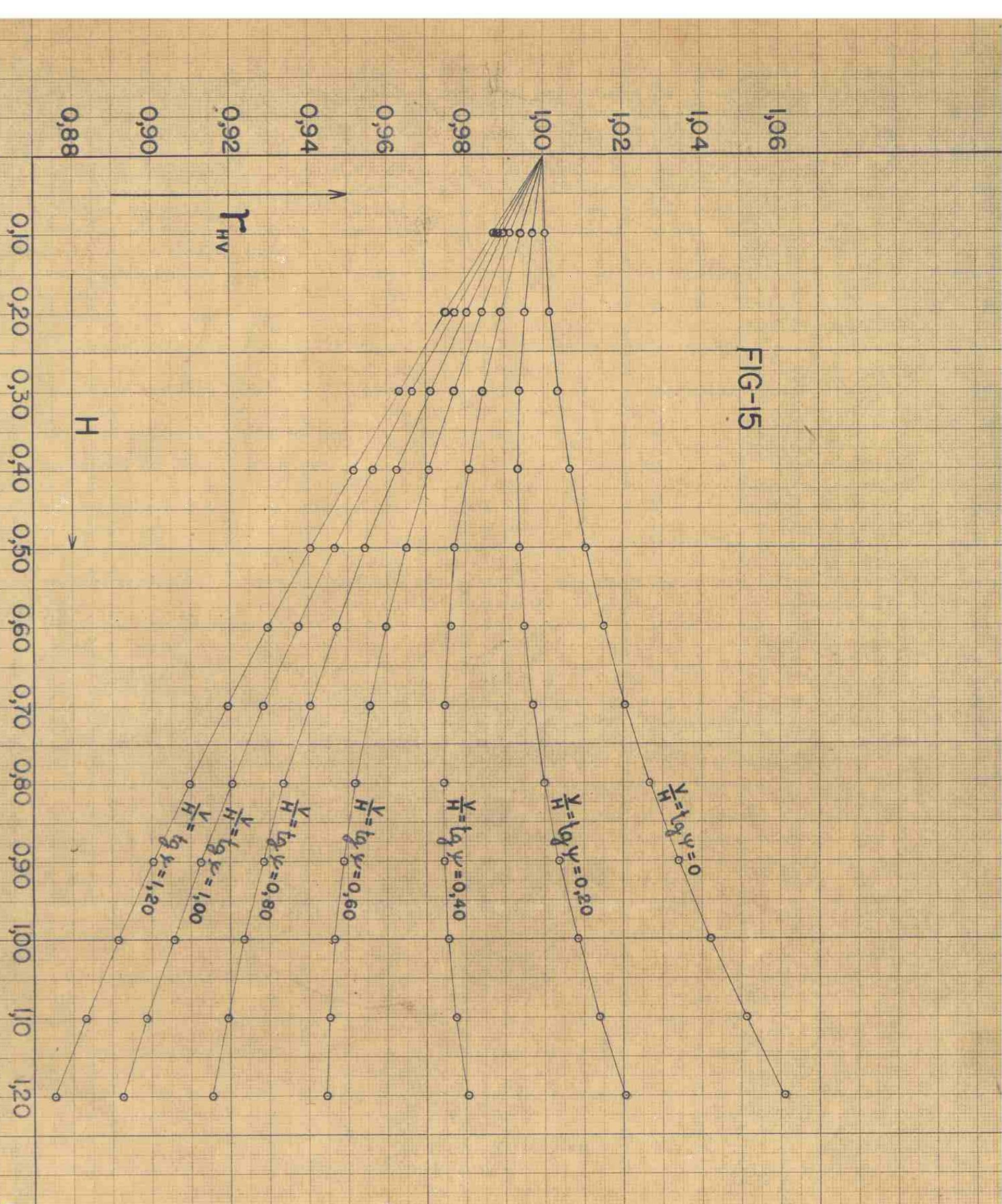
ρ_{HW}

$\frac{\text{tg}\psi}{H}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	q_H
0,05	1,0001	1,0010	1,0018	1,0025	1,0032	1,0039	1,0044	1,0049	1,0054	1,0057	1,0061	1,0063	1,0065	1,0002
0,10	1,0004	1,0021	1,0036	1,0051	1,0065	1,0078	1,0089	1,0098	1,0106	1,0112	1,0119	1,0123	1,0128	1,0008
0,15	1,0009	1,0034	1,0058	1,0080	1,0101	1,0119	1,0135	1,0150	1,0162	1,0172	1,0181	1,0188	1,0196	1,0018
0,20	1,0017	1,0049	1,0081	1,0111	1,0138	1,0162	1,0183	1,0201	1,0217	1,0231	1,0243	1,0254	1,0264	1,0033
0,25	1,0026	1,0067	1,0107	1,0144	1,0177	1,0207	1,0233	1,0256	1,0276	1,0293	1,0308	1,0329	1,0340	1,0052
0,30	1,0038	1,0086	1,0134	1,0178	1,0218	1,0253	1,0284	1,0312	1,0335	1,0355	1,0372	1,0404	1,0417	1,0075
0,35	1,0051	1,0109	1,0163	1,0214	1,0261	1,0302	1,0338	1,0369	1,0369	1,0418	1,0438	1,0463	1,0478	1,0102
0,40	1,0067	1,0132	1,0195	1,0253	1,0305	1,0351	1,0392	1,0426	1,0466	1,0481	1,0503	1,0523	1,0539	1,0133
0,45	1,0085	1,0158	1,0228	1,0292	1,0351	1,0402	1,0447	1,0486	1,0519	1,0547	1,0571	1,0592	1,0610	1,0168
0,50	1,0105	1,0186	1,0263	1,0334	1,0399	1,0455	1,0504	1,0546	1,0582	1,0613	1,0639	1,0662	1,0681	1,0207
0,55	1,0127	1,0216	1,0301	1,0378	1,0448	1,0509	1,0563	1,0608	1,0647	1,0680	1,0708	1,0733	1,0753	1,0250
0,60	1,0151	1,0248	1,0340	1,0424	1,0499	1,0566	1,0623	1,0671	1,0713	1,0749	1,0779	1,0804	1,0826	1,0298
0,65	1,0177	1,0282	1,0381	1,0472	1,0552	1,0623	1,0684	1,0736	1,0780	1,0818	1,0850	1,0876	1,0900	1,0349
0,70	1,0205	1,0318	1,0425	1,0521	1,0607	1,0682	1,0747	1,0802	1,0849	1,0888	1,0922	1,0948	1,0974	1,0405
0,75	1,0236	1,0357	1,0470	1,0573	1,0664	1,0743	1,0811	1,0869	1,0921	1,0959	1,0999	1,1023	1,1049	1,0466
0,80	1,0269	1,0398	1,0517	1,0626	1,0722	1,0806	1,0877	1,0938	1,0993	1,1032	1,1076	1,1099	1,1125	1,0531
0,85	1,0304	1,0441	1,0567	1,0682	1,0782	1,0869	1,0944	1,1008	1,1063	1,1105	1,1148	1,1174	1,1201	1,0598
0,90	1,0341	1,0485	1,0618	1,0739	1,0844	1,0934	1,1013	1,1079	1,1134	1,1180	1,1219	1,1251	1,1278	1,0666
0,95	1,0380	1,0532	1,0672	1,0798	1,0908	1,1002	1,1083	1,1151	1,1208	1,1255	1,1294	1,1328	1,1356	1,0739
1,00	1,0422	1,0581	1,0728	1,0859	1,0974	1,1072	1,1155	1,1225	1,1283	1,1332	1,1370	1,1406	1,1435	1,0817
1,05	1,0466	1,0633	1,0786	1,0922	1,1041	1,1143	1,1229	1,1300	1,1360	1,1408	1,1449	1,1485	1,1514	1,0900
1,10	1,0512	1,0686	1,0845	1,0987	1,1110	1,1215	1,1304	1,1377	1,1438	1,1485	1,1530	1,1565	1,1594	1,0988
1,15	1,0560	1,0743	1,0907	1,1054	1,1181	1,1289	1,1380	1,1455	1,1517	1,1566	1,1610	1,1645	1,1674	1,1078
1,20	1,0611	1,0799	1,0971	1,1123	1,1254	1,1365	1,1458	1,1534	1,1597	1,1649	1,1692	1,1727	1,1756	1,1172

γ_{HV}

$\operatorname{tg} \psi$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
H													
0,05	1,0001	-,0008	-,0016	-,0023	-,0030	-,0037	-,0043	-,0048	-,0053	-,0056	-,0060	-,0062	-,0064
0,10	1,0004	-,0013	-,0028	-,0043	-,0058	-,0071	-,0083	-,0093	-,0101	-,0108	-,0115	-,0119	-,0125
0,15	1,0009	-,0016	-,0040	-,0063	-,0085	-,0104	-,0122	-,0137	-,0150	-,0162	-,0172	-,0180	-,0189
0,20	1,0017	-,0017	-,0049	-,0080	-,0109	-,0135	-,0158	-,0179	-,0197	-,0213	-,0226	-,0239	-,0250
0,25	1,0026	-,0016	-,0057	-,0096	-,0132	-,0166	-,0196	-,0222	-,0244	-,0264	-,0282	-,0305	-,0319
0,30	1,0038	-,0013	-,0061	-,0109	-,0153	-,0193	-,0229	-,0262	-,0289	-,0313	-,0334	-,0369	-,0386
0,35	1,0051	-,0008	-,0065	-,0121	-,0172	-,0220	-,0263	-,0300	-,0335	-,0362	-,0387	-,0417	-,0436
0,40	1,0067	-,0000	-,0066	-,0130	-,0190	-,0244	-,0293	-,0337	-,0375	-,0407	-,0436	-,0463	-,0484
0,45	1,0085	1,0010	-,0065	-,0137	-,0205	-,0266	-,0322	-,0372	-,0415	-,0453	-,0486	-,0516	-,0540
0,50	1,0105	1,0021	-,0062	-,0143	-,0220	-,0287	-,0350	-,0406	-,0455	-,0497	-,0534	-,0567	-,0595
0,55	1,0127	1,0035	-,0058	-,0145	-,0229	-,0306	-,0376	-,0437	-,0492	-,0539	-,0581	-,0618	-,0649
0,60	1,0151	1,0051	-,0050	-,0147	-,0238	-,0324	-,0401	-,0470	-,0528	-,0581	-,0627	-,0667	-,0702
0,65	1,0177	1,0068	-,0041	-,0149	-,0247	-,0339	-,0423	-,0498	-,0564	-,0621	-,0672	-,0715	-,0754
0,70	1,0205	1,0088	-,0029	-,0144	-,0252	-,0353	-,0444	-,0525	-,0597	-,0660	-,0715	-,0761	-,0805
0,75	1,0236	1,0111	-,0014	-,0139	-,0257	-,0365	-,0463	-,0550	-,0631	-,0697	-,0757	-,0808	-,0854
0,80	1,0269	1,0135	1,0000	-,0132	-,0258	-,0375	-,0481	-,0575	-,0664	-,0734	-,0798	-,0854	-,0903
0,85	1,0304	1,0163	1,0020	-,0123	-,0257	-,0382	-,0496	-,0594	-,0690	-,0768	-,0837	-,0897	-,0950
0,90	1,0341	1,0190	1,0038	-,0112	-,0255	-,0388	-,0510	-,0612	-,0716	-,0801	-,0875	-,0940	-,0996
0,95	1,0380	1,0223	1,0062	-,0099	-,0250	-,0392	-,0522	-,0634	-,0741	-,0832	-,0909	-,0981	-,1041
1,00	1,0422	1,0255	1,0085	-,0084	-,0244	-,0395	-,0532	-,0655	-,0765	-,0862	-,0941	-,1020	-,1085
1,05	1,0466	1,0289	1,0110	-,0066	-,0236	-,0395	-,0540	-,0671	-,0787	-,0889	-,0978	-,1058	-,1127
1,10	1,0512	1,0327	1,0140	-,0046	-,0225	-,0392	-,0547	-,0684	-,0808	-,0913	-,1012	-,1096	-,1169
1,15	1,0560	1,0366	1,0171	-,0024	-,0122	-,0387	-,0543	-,0696	-,0827	-,0939	-,1042	-,1130	-,1208
1,20	1,0611	1,0411	1,0205	1,0000	-,0197	-,0382	-,0553	-,0706	-,0844	-,0965	-,1072	-,1165	-,1247

FIG-15



Verifica-se que $\operatorname{tg}\psi$ variando desde zero até $\approx 1,20$ (com ψ variando de 0° até $\approx 48^\circ 14' 23''$) e H variando de zero até aproximadamente 1,20 o valor de ρ_{HV} conserva-se ainda relativamente próximo da unidade, variando apenas de 1 até $\approx 1,1756$.

Reproduzimos em tabela anexa (pag. 35) os valores de ρ_{HV} com quatro decimais para H variando desde zero até $\approx 1,20$ com intervalo de 0,05 e $\operatorname{tg}\psi$ variando desde zero até $\approx 1,20$ com intervalo de 0,1.

Representando a variação de γ_{HV} em ordenadas e a de H em abscissas num gráfico cartesiano ortogonal (Ver fig. 15) e a variação de $\frac{V}{H} = \operatorname{tg}\psi$ por meio de curvas isométricas nesse gráfico, verifica-se que, num certo intervalo de H , o valor de γ_{HV} pode crescer ou decrescer passando por um mínimo para novamente crescer, ou ainda, pode só decrescer, quando H cresce naquele intervalo.

Porém, para cada valor de H verifica-se que γ_{HV} decresce quando $\operatorname{tg}\psi$ ou V cresce.

Verifica-se ainda que $\operatorname{tg}\psi$ variando desde zero até aproximadamente 1,20 (com ψ variando de 0° até $\approx 48^\circ 14' 23''$) e H variando de zero até $\approx 1,20$ o valor de γ_{HV} conserva-se ainda relativamente próximo da unidade variando apenas de $\approx 0,8753$ até $\approx 1,0611$.

Reproduzimos em tabela anexa (pag. 36) os valores de γ_{HV} com quatro decimais para H variando desde zero até $\approx 1,20$ com intervalo de 0,05 e $\operatorname{tg}\psi$ variando desde zero até $\approx 1,20$ com intervalo de 0,1.

Nesta tabela os valores de γ_{HV} menores que a unidade foram substituídos por $(\gamma_{HV} - 1)$.

f) Nota sobre as tabelas dos σ , q , ρ e γ

As tabelas dos valores de σ , q , ρ e γ podem ser utilizadas para valores intermediários por meio de simples interpolação linear com resultados suficientemente corretos até a quarta casa decimal, isto é, com erro geralmente menor do que uma unidade dessa casa.

Por exemplo, consideremos a fórmula de interpolação de Newton baseada nas diferenças sucessivas de funções tabeladas, a saber

$$y = f(x) = f(x_0 + nh) = y_0 + n \Delta^1 y_0 + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} \Delta^3 y_0 + \dots$$

onde h é o intervalo constante da variável independente da função tabelada,

$$|n| = \left| \frac{x - x_0}{h} \right| < 1$$

$$y_1 - y_0 = \frac{\Delta^1 y_0}{\Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0}} \\ y_2 - y_1 = \frac{\Delta^1 y_1}{\Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta^3 y_1}{\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1}} \\ y_3 - y_2 = \frac{\Delta^1 y_2}{\dots} \\ \dots \\ \text{etc.}$$

Suponhamos o caso da função $\phi = f(\operatorname{tg} \psi) = f(\operatorname{tg} \psi_0 + nh)$ dada pela tabela dos ϕ_{HV} (pag. 35) onde o intervalo $h = 0,1$; sendo $\operatorname{tg} \psi_0 = 0,30$ e $n = 0,5$ resulta $nh = 0,05$ e estaremos num caso desfavorável dessa função, bem como poderíamos considerar outros para quaisquer das funções acima tabeladas. Com êsses valores na tabela encontramos, na última linha, os valores de $\phi_0 = f(0,3)$ $\phi_1 = f(0,4)$ e $\phi_2 = f(0,5)$ que nos dão as diferenças sucessivas seguintes :

$$\phi_0 = f(0,30) = 1,1123 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta^1 \phi_0 = 0,0131 \\ \Delta^1 \phi_1 = 0,0111 \end{array} \right\} \Delta^2 \phi_0 = -0,0020 \\ \phi_1 = f(0,40) = 1,1254 \\ \phi_2 = f(0,50) = 1,1365$$

Com êsse valor $\Delta^2 \phi_0 = -0,0020$ podemos calcular o termo de segunda ordem da fórmula de interpolação de Newton dada acima, para o caso, a saber :

$$\frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 \phi_0 = \frac{0,5(-0,5)}{2} (-0,0020) = 0,00025$$

Assim se verifica que apenas em alguns casos desfavoráveis como este a interpolação linear nas tabelas, desprezando ter-

mos de segunda ordem, acarreta um êrro de duas ou três unidades da quarta casa decimal. Na grande maioria dos casos as variações ou primeiras diferenças das funções acima tabeladas assumem valores em que apenas algarismos da terceira ou quarta casa decimal são significativos, mas que nos têrmos de 2a. ordem da interpolação acarretam valores significativos depois da quarta casa decimal.

Por êsse motivo as curvas entre dois pontos próximos, desenhadas com dados calculados numéricamente e tabelados com intervalos convenientes, podem ser consideradas segmentos de retas.

Essas características daquelas funções tornam relativa - mente simples e útil a construção de ábacos cujo desenho pode ser feito em escala apropriada sem prejudicar o grau de precisão dos resultados obtidos com sua aplicação.

A escolha da escala, a extensão e o tipo de ábaco serão determinados em função da própria questão que se vai tratar. Assim é que nas aplicações que vamos fazer ao problema do NIVELDIASTI - METRO veremos que os ábacos serão empregados em extensões relativamente limitadas, com os H e $\operatorname{tg}\psi$ geralmente menores do que 0,5 .

7. EQUAÇÃO DA CATENÁRIA RELATIVA A UM ARCO

Vamos considerar um arco BM de catenária unitária e designar com H e V , respetivamente, a distância horizontal e a diferença de nível entre os pontos extremos M e B desse arco (fig. 16) considerado como um fio suspenso.

Vamos tomar como referência um sistema de eixos cartesianos ortogonais $X Y$ com origem na extremidade superior B do arco (H, V) dado, e sendo o sentido positivo do eixo vertical dos Y contado para baixo (fig. 16).

Reproduzimos a seguir a expressão (16), da página 33, da tangente do ângulo de inclinação da curva nesse ponto $B (H, V)$:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} + \frac{\rho}{H} \frac{H}{2}$$

Considerando um ponto qualquer N de coordenadas $X Y$ sobre a curva, podemos escrever, em virtude da mesma expressão (16),

o mesmo valor de $\operatorname{tg} \theta_B$ sob o seguinte aspecto genérico :

$$(16') \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{Y}{X} + \mathcal{R}_{XY} \frac{X}{2}$$

de onde se obtém

$$(26) \quad Y = \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{R}_{XY} \frac{X}{2} \right) x$$

que é a equação da catenária referida ao extremo superior B de um arco, sendo $\operatorname{tg} \theta_B$ a tangente do ângulo de inclinação nesse ponto definida em função do arco (H, V) pela expressão (16).

Vamos agora tomar como referência o sistema de eixos cartesianos ortogonais XY com origem na extremidade inferior M do arco MB (H, -V) dado (fig. 17), mantendo sempre o sentido positivo dos Y para baixo.

Assim a ordenada V passa a ser negativa e a expressão $\mathcal{R}_{H,-V}$ pode ser escrita $\mathcal{R}_{H,-V} = \mathcal{R}_{HV}$ conforme indicámos numa das igualdades (22) (pag. 33).

Tratando-se então da tangente na extremidade inferior M, resulta :

$$(17') \quad \operatorname{tg} \theta_M = - \frac{V}{H} + \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2}$$

Sendo X e Y as coordenadas correntes da curva, o mesmo valor de $\operatorname{tg} \theta_M$ pode ser escrito sob o aspecto genérico :

$$(17'') \quad \operatorname{tg} \theta_M = - \frac{Y}{X} + \mathcal{R}_{XY} \frac{X}{2}$$

onde

$$(27) \quad - Y = \left(\operatorname{tg} \theta_M - \mathcal{R}_{XY} \frac{X}{2} \right) x$$

Esta equação é a da catenária referida ao ponto extremo inferior M de um arco, sendo $\operatorname{tg} \theta_M$ a tangente de seu ângulo de inclinação nesse ponto, definida em função do arco (H, -V) pela expressão (17') dada acima.

OUTRAS FORMAS DA EQUAÇÃO DA Catenária RELATIVA A UM ARCO

Considerando novamente as expressões (16) e (16') acima e igualando os seus segundos membros, uma vez que os primeiros membros são iguais, vem :

$$\frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2} = \frac{Y}{X} + \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2}$$

de onde

$$(26') \quad Y = (\mathcal{P}_{HV} H - \mathcal{P}_{XY} X) \frac{X}{2} + \frac{V}{H} X$$

Semelhantemente, igualando os segundos membros das expressões (17') e (17'') da página 40 vem :

$$- \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2} = - \frac{Y}{X} + \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2}$$

de onde

$$(27') \quad - Y = (\mathcal{P}_{HV} H - \mathcal{P}_{XY} X) \frac{X}{2} - \frac{V}{H} X$$

As expressões (26') e (27') representam dois aspectos gerais da equação da catenária relativa a um arco. A primeira referida a eixos cartesianos ortogonais com origem na extremidade superior do arco (H,V) (fig. 16). A segunda referida aos eixos com origem na extremidade inferior do arco (H,-V) (fig. 17).

Consideremos agora a tangente do ângulo de inclinação da catenária num ponto N genérico (fig. 16) o qual pode ser considerado, ao mesmo tempo, o ponto extremo inferior do arco \widehat{BN} (X,Y) e ponto extremo superior do arco \widehat{NM} $[(H-X),(V-Y)]$.

Considerando o ponto N como extremo inferior do arco \widehat{BN} (X,Y), a expressão (17) permite escrever :

$$\operatorname{tg} \theta_N = \frac{Y}{X} - \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2}$$

Considerando o mesmo ponto N como extremo superior do arco \widehat{NM} $[(H-X),(V-Y)]$, a expressão (16) da página 33 permite escrever :

$$\operatorname{tg} \theta_N = \frac{V-Y}{H-X} + \mathcal{P}_{(H-X),(V-Y)} \frac{H-X}{2}$$

Igualando os dois segundos membros das expressões acima, em virtude da igualdade dos dois primeiros membros :

$$\frac{Y}{X} - \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2} = \frac{V-Y}{H-X} + \mathcal{P}_{(H-X),(V-Y)} \frac{H-X}{2}$$

ou

$$\frac{Y}{X} - \frac{V-Y}{H-X} = \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2} + \mathcal{P}_{(H-X),(V-Y)} \frac{H-X}{2} = \frac{Y(H-X)-X(V-Y)}{X(H-X)} \quad \text{ou}$$

$$Y [(H-X) + X] - V X = [\mathcal{P}_{XY} X + \mathcal{P}_{(H-X),(V-Y)} (H-X)] \frac{(H-X)X}{2}$$

ou

$$(28) \quad Y = \left[\mathcal{R}_{XY} X + \mathcal{P}_{(H-X), (V-Y)}^{(H-X)} \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \frac{V}{H} X$$

Esta representa mais uma expressão geral da catenária relativa a um arco (H, V) .

8. TANGENTE DO ÂNGULO DE INCLINAÇÃO DA CATENÁRIA EM CADA PONTO DA CURVA

Se tivermos em vista as expressões (8), (9) e (10) (pags. 27 e 28), podemos escrever para um ponto qualquer de coordenadas X e Y da curva unitária

$$(28 \text{ a}) \quad \operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_X = X \cdot S_{XY}$$

Desta expressão se obtém a equação da derivada de Y em relação a X :

$$(28 \text{ b}) \quad \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} \theta_X - \operatorname{tg} \theta_B - X \cdot S_{XY}$$

onde substituindo $\operatorname{tg} \theta_B$ pelo seu valor dado na expressão (16) da página 33 resulta também:

$$(28 \text{ c}) \quad \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} \theta_X = \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2} - X \cdot S_{XY}$$

Convém notar que essas expressões (28 b) e (28 c) representam a equação dessa derivada quando se considera a origem dos eixos no extremo superior do arco \widehat{BM} (fig. 16).

Porém, quando se considera a origem dos eixos no extremo inferior do arco \widehat{MB} (fig. 17), tendo em vista as mesmas expressões (8) da página 27 e (9) e (10) da página 28, pode-se escrever:

$$(28 \text{ d}) \quad \operatorname{tg} \theta_M - \operatorname{tg} \theta_X = X \cdot S_{XY}$$

de onde

$$(28 \text{ e}) \quad \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} \theta_X - \operatorname{tg} \theta_M - X \cdot S_{XY}$$

onde substituindo $\operatorname{tg} \theta_M$ pelo seu valor dado na expressão (17') da página 40, vem:

$$(28 \text{ f}) \quad \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} \theta_X = - \frac{V}{H} + \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2} - X \cdot S_{XY}$$

As tangentes dos ângulos de inclinação da curva nas ex -

tremidades do arco considerado são dadas, como já vimos, pelas expressões (16) e (17) da página 33 a saber

$$(16) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2}$$

$$(17) \quad \operatorname{tg} \theta_M = \frac{V}{H} - \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2}$$

E, também, fazendo $X = 0$ na expressão (28 c) da página anterior resulta a mesma expressão (16) acima.

E, ainda, fazendo $X = H$ na expressão (28 c) e substituindo S_{XY} por

$$S_{HV} = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV})$$

dada pela expressão (20) da página 33, vem :

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2} - H \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV})$$

ou

$$(17) \quad \operatorname{tg} \theta_M = \frac{V}{H} - \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2}$$

tal como foi escrito acima.

Convém notar ainda que fazendo $X = 0$ na expressão (28f) da página anterior, resulta o valor de $\operatorname{tg} \theta_M$ (no caso da fig. 17) a saber :

$$(17') \quad \operatorname{tg} \theta_M = - \frac{V}{H} + \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2}$$

E, ainda, fazendo $X = H$ na mesma expressão (28 f) e substituindo S_{XY} por $S_{HV} = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV})$ resulta o valor de $\operatorname{tg} \theta_B$ (no caso da fig. 17) :

$$\operatorname{tg} \theta_B = - \frac{V}{H} + \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2} - \frac{H}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV})$$

ou

$$(16') \quad \operatorname{tg} \theta_B = - \frac{V}{H} - \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2}$$

9. A TENSÃO TANGENCIAL NUM PONTO QUAL -
QUER DA CATENÁRIA

Considerando a catenária como um diagrama representativo das tensões, lembremos que a ordenada Y (dada pela equação (1) da

página 21) de um ponto qualquer da curva unitária representa a tensão T tangencial naquele ponto de abscissa X , a que fica sujeito o fio suspenso, tomando como unidade de força o peso natural de fio com o comprimento igual ao parâmetro c da catenária que ele forma.

Tendo em vista a expressão (7) da página 26, obtém-se imediatamente :

$$(29) \quad T_X = Y = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_X)^{1/2}$$

ou também

$$(29') \quad T = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

pois $\operatorname{tg} \theta_X$ num ponto X da curva pode ser representada pela derivada $\frac{dy}{dx}$ nesse ponto. A expressão dessa derivada foi deviamente considerada à página 42.

Dessa maneira, as tensões nos pontos extremos B e M de um arco (H, V) (fig. 16) poderão ser expressas por :

$$(30) \quad T_B = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_B)^{1/2} \quad \text{no extremo superior do arco}$$

$$(30') \quad T_M = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_M)^{1/2} \quad \text{no extremo inferior do arco}$$

As componentes horizontais T'' da tensão em cada ponto são todas iguais entre si e por isso (Ver fig. 11)

$$(31) \quad T'' = T_X \cos \theta_X = T_B \cos \theta_B = T_M \cos \theta_M = c$$

é o parâmetro da catenária unitária.

As componentes verticais T''' , porém, variam de ponto para ponto e podem ser expressas por

$$(32) \quad T''' = T_X \operatorname{sen} \theta_X = \operatorname{tg} \theta_X$$

NOTA - A (32) se verifica pela (29)

$$\begin{aligned} T_X \operatorname{sen} \theta_X &= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_X} \operatorname{sen} \theta_X = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta_X}{\operatorname{cos}^2 \theta_X} \operatorname{sen}^2 \theta_X} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_X \operatorname{cos}^2 \theta_X + \operatorname{sen}^4 \theta_X}{\operatorname{cos}^2 \theta_X}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_X (\operatorname{sen}^2 \theta_X + \operatorname{cos}^2 \theta_X)}{\operatorname{cos}^2 \theta_X}} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_X}{\operatorname{cos}^2 \theta_X}} = \operatorname{tg} \theta_X \end{aligned}$$

a) Exemplo numérico - Cálculo das componentes horizontal e vertical da tensão

Considerando os dados já figurados no exemplo da página 32 encontramos :

$$\operatorname{tg} \theta_B \approx 0,85436$$

$$\operatorname{tg} \theta_M \approx 0,17544$$

e assim

$$T_B = (1 + 0,85436^2)^{1/2} = \sqrt{1,72993} = 1,31526$$

$$T_M = (1 + 0,17544^2)^{1/2} = \sqrt{1,03078} = 1,01527$$

A catenária tendo o parâmetro $c = 126$ mm (pag. 32), as tensões expressas na unidade de comprimento do fio serão :

$$t_B = c \cdot T_B = 126 \text{ mm} (1,31526) \approx 165,7_2 \text{ mm}$$

$$t_M = c \cdot T_M = 126 \text{ mm} (1,01527) \approx 127,9_2 \text{ mm}$$

O fio tendo o peso unitário de $p = 10$ gramas por metro linear ou $p = 0,01$ grf/mm, as tensões em gramas serão

$$t'_B = p \cdot t_B \approx 0,01(165,7) \approx 1,657 \text{ grf no ponto B}$$

$$t'_M = p \cdot t_M \approx 0,01(127,9) \approx 1,279 \text{ grf no ponto M}$$

As componentes horizontais da tensão nesse fio suspenso entre B e M serão

no ponto B :

$$t''_B = t'_B \cos \theta_B \approx 1,657 \text{ grf} (0,7603) \approx 1,260 \text{ grf}$$

e no ponto M :

$$t''_M = t'_M \cos \theta_M \approx 1,279 \text{ grf} (0,9850) \approx 1,260 \text{ grf}$$

Como se verifica neste exemplo, as componentes horizontais das tensões nos dois pontos M e B, como em quaisquer outros pontos da mesma curva, são iguais.

As componentes verticais da tensão serão no ponto B :

$$t'''_B = t'_B \operatorname{sen} \theta_B = 1,657 \text{ grf} (0,6496) \approx 1,076 \text{ grf}$$

e no ponto M :

$$t'''_M = t'_M \operatorname{sen} \theta_M = 1,279 \text{ grf} (0,1728) \approx 0,221 \text{ grf}$$

A diferença entre as duas componentes verticais será

$$t_B'' - t_M'' = 0,855 \text{ grf}$$

que representa o peso do fio suspenso entre os dois pontos B e M, fio desse comprimento (0,855 grf : 0,01 grf/mm) igual a 85,5 mm, como já vimos à página 32.

De fato :

o comprimento do fio suspenso entre o vértice da curva e o ponto B é

$$\frac{B}{S} = c \cdot \operatorname{tg} \theta_B \approx 126 \text{ mm} (0,854) \approx 107,6 \text{ mm}$$

e o comprimento entre o vértice e o ponto M é

$$\frac{M}{S} = c \cdot \operatorname{tg} \theta_M \approx 126 \text{ mm} (0,175) \approx 22,1 \text{ mm}$$

cuja diferença

$$\frac{B}{S} - \frac{M}{S} = c(\operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M) = 85,5 \text{ mm}$$

10. EXPRESSÃO DA ORDENADA CONHECENDO-SE
A ABCISSA DE UM PONTO DA CATENÁRIA
RELATIVA A UM ARCO

Vamos partir da expressão (26) da página 40

$$Y = (\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2}) X$$

onde, em virtude das expressões (9') da página 28 e (18) da página 33, podemos escrever

$$\mathcal{P}_{XY} = \left(\frac{Y^2}{X^2} + S_{X0}^2 \right)^{1/2} + \frac{2Y}{X^2} (q_X - 1)$$

e assim

$$Y = \operatorname{tg} \theta_B \cdot X - \left[\left(\frac{Y^2}{X^2} + S_{X0}^2 \right)^{1/2} + 2 \frac{Y}{X^2} (q_X - 1) \right] \frac{X^2}{2}$$

ou

$$Y = \operatorname{tg} \theta_B \cdot X - \left(\frac{Y^2}{X^2} + S_{X0}^2 \right)^{1/2} \frac{X^2}{2} - Y(q_X - 1)$$

ou

$$Y \cdot q_X - \operatorname{tg} \theta_B \cdot X = - \left(\frac{Y^2}{X^2} + S_{X0}^2 \right)^{1/2} \frac{X^2}{2}$$

ou elevando ao quadrado ambos os membros

$$Y^2 q_X^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - 2 Y q_X \operatorname{tg} \theta_B \cdot X = \frac{Y^2 X^4}{4} + \frac{S_{X0}^2 \cdot X^4}{4}$$

ou reunindo e ordenando os termos em Y

$$(q_X^2 - \frac{X^2}{4}) Y^2 - 2 q_X \operatorname{tg} \theta_B \cdot X \cdot Y + \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{S_{X0}^2 \cdot X^4}{4} = 0$$

e resolvendo esta equação do segundo grau em Y :

$$Y = \frac{2 q_X \operatorname{tg} \theta_B \cdot X \pm \sqrt{4 q_X^2 \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - 4 \left(q_X^2 - \frac{X^2}{4}\right) \left(\operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{S_{X0}^2 \cdot X^4}{4}\right)}}{2 \left(q_X^2 - \frac{X^2}{4}\right)}$$

Vamos, a seguir, simplificar a expressão sob o radical, o qual fica

$$\begin{aligned} & \sqrt{4 q_X^2 \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - 4 \left[q_X^2 \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{q_X^2 \cdot S_{X0}^2 \cdot X^4}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^4}{4} + \frac{S_{X0}^2 \cdot X^6}{4 \cdot 4}\right]} \\ & = X \sqrt{q_X^2 \cdot S_{X0}^2 \cdot X^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{S_{X0}^2 \cdot X^4}{4}} \end{aligned}$$

onde substituindo

$$q_X^2 = S_{X0}^{-2} + \frac{X^2}{4} \quad \text{dado por (14) à página 31, vem:}$$

$$\begin{aligned} & X \sqrt{\left(S_{X0}^{-2} + \frac{X^2}{4}\right) S_{X0}^2 \cdot X^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{X^4 S_{X0}^2}{4}} \\ & = X \sqrt{X^2 + \frac{S_{X0}^2 \cdot X^2}{4} + \operatorname{tg}^2 \theta_B \cdot X^2 - \frac{X^4 S_{X0}^2}{4}} = X^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_B} \\ & = X^2 T_B \end{aligned}$$

em que esta última igualdade se verifica tendo em vista a expressão (30) da página 44.

E a expressão de Y , considerando apenas o sinal algébrico negativo do radical, se torna:

$$Y = \frac{(2 q_X \operatorname{tg} \theta_B - X \cdot T_B) X}{2(q_X^2 - \frac{X^2}{4})}$$

Nesta expressão o parêntese do denominador equivale a S_{X0}^{-2} em virtude da (14) da página 31, e como pela (23) da página 34,

$$S_{X0} = \mathcal{P}_{X0}$$

vem

$$(33) \quad Y = \frac{\mathcal{P}_{X0}^2}{2} (2 q_X \cdot \operatorname{tg} \theta_B - X \cdot T_B) X$$

Aplicando a expressão (18) da página 33 a um arco de catenária cuja distância horizontal e diferença de nível são respetivamente $(H-X)$ e $(V-Y)$ vem :

$$\mathcal{P}_{(H-X), (V-Y)} = S_{(H-X), (V-Y)} + \frac{2(V-Y)}{(H-X)^2} (q_{H-X} - 1)$$

e como pela (13) da página 31

$$q_{H-X} = \frac{H-X}{2} \coth \frac{H-X}{2}$$

vem :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(H-X), (V-Y)} &= S_{(H-X), (V-Y)} + \frac{2(V-Y)}{(H-X)^2} \left(\frac{H-X}{2} \coth \frac{H-X}{2} - 1 \right) - \\ &= \frac{(H-X) S_{(H-X), (V-Y)}}{H-X} + \frac{V-Y}{H-X} \left(\coth \frac{H-X}{2} - \frac{2}{H-X} \right) \end{aligned}$$

Mas lembrando que o numerador do primeiro termo do segundo membro, tendo em vista a (10) da página 28, equivale ao comprimento $S_{(H-X), (V-Y)}$ do arco da catenária unitária, resulta :

$$(34) \quad \mathcal{P}_{(H-X), (V-Y)} = S_{(H-X), (V-Y)} + (V-Y) \left(\coth \frac{H-X}{2} - \frac{2}{H-X} \right)$$

Agora apliquemos a expressão (19) da página 33 ao arco de catenária identificada com $X Y$:

$$\mathcal{R}_{XY} = S_{XY} - \frac{2Y}{X^2} (q_X - 1)$$

ou pela (13) da página 31

$$\mathcal{R}_{XY} = S_{XY} - \frac{2Y}{X^2} \left(\frac{X}{2} \coth \frac{X}{2} - 1 \right)$$

ou

$$\mathcal{R}_{XY} = S_{XY} - \frac{Y}{X} \left(\coth \frac{X}{2} - \frac{2}{X} \right)$$

e sendo

$$X \cdot S_{XY} = S_{XY}$$

vem :

$$(35) \quad R_{XY} X = S_{XY} - Y \left(\coth \frac{X}{2} - \frac{2}{X} \right)$$

Substituindo as expressões (34) e (35) acima na (28) da página 42 que é uma expressão geral da catenária relativa a um arco :

$$Y = \left[S_{XY} - Y \left(\coth \frac{X}{2} - \frac{2}{X} \right) + S_{(H-X), (V-Y)} + (V-Y) \left(\coth \frac{H-X}{2} - \frac{2}{H-X} \right) \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \frac{V}{H} X$$

sendo

$$S_{XY} + S_{(H-X), (V-Y)} = S_{HV}$$

vem :

$$Y = \left[-Y \coth \frac{X}{2} + \frac{2Y}{X} + V \coth \frac{H-X}{2} - \frac{2V}{H-X} - Y \coth \frac{H-X}{2} + \frac{2Y}{H-X} + S_{HV} \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \frac{V}{H} X$$

ou separando os termos em Y

$$Y = \left[-Y \left(\coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2} \right) + \frac{2Y}{X} + \frac{2Y}{H-X} \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \left[V \coth \frac{H-X}{2} - \frac{2V}{H-X} + S_{HV} \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \frac{V}{H} X$$

e passando-os para o primeiro membro e pondo Y em evidência :

$$Y \left[1 + \left(\coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2} - \frac{2}{X} - \frac{2}{H-X} \right) \frac{(H-X)X}{2H} \right] = \\ = \left[V \coth \frac{H-X}{2} - \frac{2V}{H-X} + S_{HV} \right] \frac{(H-X)X}{2H} + \frac{V}{H} X$$

dividindo ambos os membros por $\frac{(H-X)X}{2H}$ vem :

$$Y \left[\frac{2H}{(H-X)X} + \coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2} - \frac{2}{X} - \frac{2}{H-X} \right] = \\ = V \coth \frac{H-X}{2} + S_{HV} - \frac{2V}{H-X} + \frac{V}{H} X \frac{2H}{(H-X)X}$$

ou

$$Y \left[\frac{2H}{(H-X)X} + \coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2} - 2 \frac{H-X+X}{(H-X)X} \right] = V \coth \frac{H-X}{2} + S_{HV}$$

onde

$$(36) \quad Y = \frac{V \coth \frac{H-X}{2} + S_{HV}}{\coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2}}$$

Substituindo nessa expressão os termos

$$\coth \frac{H-X}{2} = 2 \frac{q_{H-X}}{H-X} \quad \text{e} \quad \coth \frac{X}{2} = 2 \frac{q_X}{X}$$

ambos obtidos pela (13) da página 31, vem :

$$Y = \frac{2V \frac{q_{H-X}}{H-X} + S_{HV}}{2 \left(\frac{q_X}{X} + \frac{q_{H-X}}{H-X} \right)} = \frac{2V \frac{q_{H-X}}{H-X} + S_{HV} \frac{H-X}{H-X}}{2 \left(\frac{q_X(H-X) + q_{H-X} \cdot X}{X(H-X)} \right)}$$

ou

$$(37) \quad Y = \frac{\left[2V \cdot q_{H-X} + S_{HV}(H-X) \right] X}{2 \left[q_X(H-X) + q_{H-X} \cdot X \right]}$$

Exemplo numérico

Determinemos a ordenada y de um ponto de abcissa $x = 63$ mm situado num arco de catenária homogênea de parâmetro $c = 126$ mm, sabendo que a distância horizontal e a diferença de nível entre os pontos extremos M (inferior) e B (superior) desse arco (que não contém o vértice da curva) são respectivamente : $h = 75,6$ mm e $v = 37,8$ mm.

Calculemos y pela expressão (33) da página 48 dada para a catenária unitária :

$$Y = \frac{\rho_{X0}^2}{2} (2 q_X \cdot \operatorname{tg} \theta_B - X \cdot T_B) X$$

onde

$$Y = \frac{y}{c} \quad \text{e} \quad c = 126 \text{ mm}$$

Pela expressão (23) da página 34 :

$$\rho_{X0} = S_{X0} = \sigma_{X0}$$

em que pela tabela da página 30, para $X = \frac{x}{c} = \frac{63 \text{ mm}}{126 \text{ mm}} = 0,5$ e $\operatorname{tg} \psi_{X0} = 0$ encontra-se $\sigma_{X0} = 1,01045$

Assim :

$$\sigma_{X0}^2 = 1,01045^2 \approx 1,0210$$

Pela tabela dos q_X da página 35 para $X = 0,5$ encontra-se

$$q_X = 1,0207$$

Pela expressão (15) da página 32

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} q_H + \frac{H}{2} S_{HV}$$

onde

$$V = \frac{v}{c} = \frac{37,8 \text{ mm}}{126,0 \text{ mm}} = 0,3 \quad H = \frac{h}{c} = \frac{75,6 \text{ mm}}{126,0 \text{ mm}} = 0,6$$

e pela tabela dos q_H da página 35, para $H = 0,6$ encontra-se

$$q_H = 1,0298$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V}{H} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \quad \therefore \quad \psi = 26^\circ 33' 54''$$

$$\cos \psi = 0,89443$$

Pela (12) da página 29 :

$$S_{HV} = \frac{\sigma_{HV}}{\cos \psi}$$

onde pela tabela da página 30 para $H = 0,6$ e $\operatorname{tg} \psi = 0,5$ encontra-se $\sigma_{HV} = 1,01207$ e resulta

$$S_{HV} = \frac{1,01207}{0,89443} \approx 1,1315 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{0,3}{0,6} 1,0298 + \frac{0,6}{2} 1,1315 \approx 0,8544$$

E pela expressão (30) da página 44 :

$$T_B = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_B} = \sqrt{1 + 0,8544^2} \approx 1,3153$$

Substituindo todos os valores numéricos na expressão (33) (pag. 48) de $Y = \frac{y}{c}$ resulta :

$$\frac{y}{c} \approx \frac{1,0210}{2} \left[2(1,0207)0,8544 - 0,5(1,3153) \right] 0,5$$

e efetuando as operações vem :

$$\frac{y}{c} \approx 0,2773 \quad \text{e sendo} \quad c = 126 \text{ mm}$$

$$y \approx 34,9 \text{ mm}$$

Calculemos agora y pela expressão (36) da página 50 :

$$Y = \frac{V \cdot \coth \frac{H-X}{2} + S_{HV}}{\coth \frac{X}{2} + \coth \frac{H-X}{2}}$$

onde

$$Y = \frac{y}{c} \quad \bullet \quad c = 126 \text{ mm} \quad V = \frac{v}{c} = \frac{37,8}{126} = 0,3$$

$$H = \frac{h}{c} = \frac{75,6}{126} = 0,6 \quad X = \frac{x}{c} = \frac{63}{126} = 0,5$$

$$\frac{H-X}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \quad \frac{X}{2} = 0,25$$

e numa tabela de funções hiperbólicas :

$$\coth 0,05 \approx \frac{1}{\tgh 0,05} \approx \frac{1}{0,0500} = 20$$

$$\coth 0,25 \approx \frac{1}{\tgh 0,25} \approx \frac{1}{0,2449} = 4,0833$$

E pela expressão (10) da página 28 :

$$S_{HV} = H \cdot S_{HV} \approx 0,6(1,1315) \approx 0,6789$$

pois o valor

$$S_{HV} = 1,1315$$

já havíamos calculado à página 51.

E substituindo êsses valores numéricos na expressão (36) (pag. 50) $Y = \frac{y}{c}$ vem :

$$\frac{y}{c} \approx \frac{0,3(20) + 0,6789}{4,0833 + 20} \approx 0,2773$$

e sendo $c = 126 \text{ mm}$

$y \approx 34,9 \text{ mm}$ resultado que confere com o valor achado antes, à página anterior, por meio de outra fórmula.

- * -

Calculemos, finalmente, y pela expressão (37) da página 50

$$Y = \frac{[2 V \cdot a_{H-X} + S_{HV}(H-X)] X}{2 [a_X(H-X) + a_{H-X} \cdot X]}$$

onde

$$Y = \frac{y}{c} \quad \bullet \quad c = 126 \text{ mm} \quad V = 0,3$$

$$S_{HV} \approx 0,6789 \quad H = 0,6 \quad X = 0,5$$

$$H-X = 0,1 \quad a_X = 1,0207$$

$$a_{H-X} = 1,0000$$

Dessa maneira :

$$\frac{y}{c} = \frac{[2(0,3) 1,0000 + (0,6789) 0,1]}{2 [(1,0207) 0,1 + (1,0000) 0,5]} 0,5$$

e efetuando as operações :

$$\frac{y}{c} \approx 0,2773 \quad \text{e com } c = 126 \text{ mm}$$

$$y \approx 34,9 \text{ mm}$$

valor já encontrado por meio de outras fórmulas.

C - REPRESENTAÇÃO PARABÓLICA DE UM ARCO
DE CATENÁRIA

1. A EQUAÇÃO PARABÓLICA DO ARCO DE
CATENÁRIA

No problema do NIVELDIASTÍMETRO que estamos apresentando, interessa considerar, inicialmente, valores aproximados nos quais se baseiam soluções com qualquer aproximação necessária, como é usual fazer-se em aplicações práticas do estudo da catenária.

Nessas aplicações consideram-se em primeira aproximação os arcos de catenária não no seu complexo, mas simplesmente como arcos de parábola.

Uma vez que a parábola é representável por uma equação algébrica do segundo grau, vejamos como se pode simplificar a equação da catenária relativa a um arco, já estudada anteriormente (pag. 39), para transformá-la na equação relativa a um arco parabólico.

Isto se consegue fazendo na expressão (26) da página 40, reproduzida a seguir

$$Y = \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY} \frac{X}{2} \right) X$$

com que o fator \mathcal{P}_{XY} seja constante uma vez que se sabe que $\operatorname{tg} \theta_B$ é constante para cada arco \widehat{MB} (H, V) de catenária (fig. 16).

Com efeito, as funções

$$\mathcal{G}_{HV} = S_{HV} \cdot \cos \psi \quad (12) \text{ da página 29}$$

$$\rho_{HV} = \rho_{HV} \cdot \cos \psi \quad (24) \text{ da página 34}$$

$$\gamma_{HV} = \gamma_{HV} \cdot \cos \psi \quad (25) \text{ da página 34}$$

variam sempre nas proximidades da unidade quando $H \approx \tan \psi = \frac{H}{V}$
variam desde zero até 1,20 como se verifica nas tabelas das páginas 30, 35 e 36.

E assim se fizermos nas equações da catenária relativa a um arco

$$\sigma_{HV} = \rho_{HV} = \gamma_{HV} = \sigma_{XY} = \rho_{XY} = \gamma_{XY} = 1$$

resulta nessas equações, em virtude das expressões (12), (24) e (25) acima e numa certa aproximação,

$$S_{HV} = \rho_{HV} = \rho_{XY} = S_{XY} = \rho_{XY} = \rho_{XY} = \frac{1}{\cos \psi} = \text{const.}$$

onde ψ é o ângulo da reta que une os extremos do arco (corda) com a horizontal.

Dessa maneira substituindo na equação (26) da página 40 e acima transcrita, o valor

$$\tan \theta_B = \frac{V}{H} + \rho_{HV} \frac{H}{2} \quad \text{dado pela (16) da página 33,}$$

vem :

$$Y = \left(\frac{V}{H} + \rho_{HV} \frac{H}{2} - \rho_{XY} \frac{X}{2} \right) X$$

onde fazendo

$$\rho_{HV} = \rho_{XY} = \frac{1}{\cos \psi} = \sec \psi$$

e pondo êstes termos em evidência vem :

$$(38) \quad Y = \frac{\sec \psi}{2} (H - X) X + \frac{V}{H} X$$

Esta expressão (38) caracteriza uma representação parabólica do arco de catenária \widehat{MB} (H, V) (fig. 16).

2. EQUAÇÃO DAS TANGENTES

A derivada da equação (38) acima dá a tangente do ângulo de inclinação do arco parabólico (representativo da catenária) com a horizontal em cada ponto. Ela pode ser obtida imediatamente sob o aspecto seguinte

$$(39) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec \psi}{2} (H - 2X) + \frac{V}{H}$$

e equivale à fórmula que se obtém substituindo na expressão (28 c) da página 42, os termos S_{XY} e \mathcal{P}_{HV} por $\frac{1}{\cos \psi} = \sec \psi = \text{constante}$ como indicámos acima.

3. NOTA SOBRE A INTERPRETAÇÃO PARABÓLICA

Esta maneira de tratar a catenária em primeira aproximação, representando-a por uma equação parabólica, fornece meios para a solução necessária e suficientemente correta de certos problemas, de tal modo que se pode passar do valor parabólico para o valor correto abreviando o método das aproximações sucessivas como vamos exemplificar.

É interessante assinalar que as equações parabólicas (38) (pag. 54) e (39) (pag. 54) obtidas das equações corretas (26) (pag. 40) e (28 c) (pag. 42), respetivamente, pelo fato de se fazer $\sigma = \rho = \gamma = 1$ sugerem desde logo que as funções σ , ρ e γ variando nas proximidades do valor unidade, constituem verdadeiros coeficientes de correção de certas soluções parabólicas para se obter as soluções suficientemente corretas. Esses coeficientes podem ser fornecidos por tabelas que convenientemente construídas, oferecem valores suficientemente corretos por simples interpolação linear como verificámos à página 37 e seguinte, dependendo apenas da aproximação dessas tabelas.

Para objetivar essas ideias e fixá-las melhor vamos por menorizá-las a seguir em exemplo explicativo.

4. EXPRESSÃO DA ORDENADA DE UMA ABCISSA DADA

Se substituirmos na expressão (26) (pag. 40) e em outras a considerar, o fator \mathcal{P}_{XY} por $\mathcal{P}_{X Y_p}$ onde o índice Y_p significa que esse fator se refere à expressão parabólica da catenária, podemos escrever :

$$(40) \quad Y = \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{X Y_p} \cdot \frac{X}{2} \right) X$$

Esta expressão da ordenada Y de uma abscissa X representa um valor de maior aproximação que o dado pela simples expressão (38) exclusivamente parabólica (pag. 54).

A aproximação da expressão (40) acima pode ser estudada mediante a discussão que passamos a indicar.

Se chamarmos ε o erro da ordenada Y_p dada pela expressão parabólica (38) (pag. 54), podemos escrever:

$$(41) \quad \operatorname{tg} \psi_{XY} = i = \frac{Y}{X} = \frac{Y_p + \varepsilon}{X} = \operatorname{tg} \psi_{XY_p} + \delta_{i_p}$$

Analisemos melhor o significado dos termos dessa igualdade de assim estabelecida.

Partindo da expressão do teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2 \psi_{XY} + \operatorname{cos}^2 \psi_{XY} = 1$$

e dividindo membro a membro por $\operatorname{cos}^2 \psi_{XY}$ vem:

$$\sec \psi_{XY} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY} \right)^{1/2}$$

onde substituindo $\operatorname{tg} \psi_{XY}$ pelo seu valor dado acima:

$$\sec \psi_{XY} = \left[1 + \left(\operatorname{tg} \psi_{XY_p} + \delta_{i_p} \right)^2 \right]^{1/2}$$

e desprezando $\delta_{i_p}^2$ no desenvolvimento da expressão entre parênteses:

$$\sec \psi_{XY} = \left[1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY_p} + 2 \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \delta_{i_p} \right]^{1/2}$$

onde a condição necessária e suficiente para a validade do desenvolvimento em série sendo satisfeita, isto é,

$$\frac{2 \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \delta_{i_p}}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY_p}} < 1$$

resulta:

$$\sec \psi_{XY} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY_p} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \delta_{i_p} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY_p} \right)^{-1/2} + \dots$$

onde notando, como vimos acima, que

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{XY_p}\right)^{1/2} = \sec \psi_{XY_p}$$

vem :

$$\sec \psi_{XY} = \sec \psi_{XY_p} + \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \cdot \delta i_p \frac{1}{\sec \psi_{XY_p}}$$

ou

$$(42) \quad \sec \psi_{XY} = \sec \psi_{XY_p} + \operatorname{sen} \psi_{XY_p} \cdot \delta i_p$$

Tenhamos agora em vista a expressão (24) da página 34 :

$$\rho_{HV} = \rho_{HV} \cdot \cos \psi_{HV}$$

Dai se pode escrever :

$$(43) \quad \rho_{XY} = \rho_{XY_p} \cdot \sec \psi_{XY_p}$$

Chamemos $\Delta \rho_{XY_p}$ a uma variação de ρ_{XY_p} que corresponde à variação Δi de i . Sendo X constante podemos escrever, entre os limites de proporcionalidade das variações dos ρ com as correspondentes dos i :

$$(44) \quad \rho_{XY} = \rho_{XY_p} + \frac{\Delta \rho_{XY_p}}{\Delta i} \delta i_p$$

Substituindo as expressões acima (42) e (44) na (43),

vem :

$$\rho_{XY} = \left(\sec \psi_{XY_p} + \operatorname{sen} \psi_{XY_p} \cdot \delta i_p \right) \left(\rho_{XY_p} + \frac{\Delta \rho_{XY_p}}{\Delta i} \delta i_p \right)$$

ou

$$\rho_{XY} = \sec \psi_{XY_p} \rho_{XY_p} + \left(\operatorname{sen} \psi_{XY_p} \rho_{XY_p} + \sec \psi_{XY_p} \frac{\Delta \rho_{XY_p}}{\Delta i} \delta i_p \right) \delta i_p$$

onde foi desprezado o termo em δi_p^2 .

Fazendo na última expressão :

$$(45) \quad \rho_{XY_p} \sec \psi_{XY_p} = \rho_{XY_p}$$

$$(46) \quad \text{sen } \psi_{XY_p} \rho_{XY_p} + \text{sec } \psi_{XY_p} \frac{\Delta \rho_{XY_p}}{\Delta i} = \Delta \rho_{XY_p}$$

vem :

$$(47) \quad \rho_{XY} = \rho_{XY_p} + \Delta \rho_{XY_p} \cdot \delta i_p$$

Por outro lado, comparando a equação da catenária (26) da página 40 com a expressão (41) da página 56, pode-se escrever :

$$(48) \quad \text{tg } \theta_B - \rho_{XY} \frac{X}{2} = \text{tg } \psi_{XY_p} + \delta i_p$$

Substituindo nesta igualdade (48) o valor de ρ_{XY} dado pela (47) e pondo δi_p em evidência vem :

$$\text{tg } \theta_B - \rho_{XY_p} \frac{X}{2} - \left(\Delta \rho_{XY_p} \frac{X}{2} + 1 \right) \delta i_p = \text{tg } \psi_{XY_p}$$

onde

$$(49) \quad \delta i_p = \frac{\text{tg } \theta_B - \rho_{XY_p} \frac{X}{2} - \text{tg } \psi_{XY_p}}{\Delta \rho_{XY_p} \cdot \frac{X}{2} + 1}$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro desta expressão por 2 e substituindo-a na expressão (41) da página 56 vem :

$$\frac{Y}{X} = \frac{\text{tg } \psi_{XY_p} (2 + \Delta \rho_{XY_p} X) + 2 \text{tg } \theta_B - \rho_{XY_p} \cdot X - 2 \text{tg } \psi_{XY_p}}{2 + \Delta \rho_{XY_p} \cdot X}$$

ou finalmente :

$$(50) \quad Y = \frac{2 \text{tg } \theta_B - (\rho_{XY_p} - \Delta \rho_{XY_p} \cdot \text{tg } \psi_{XY_p}) X}{2 + \Delta \rho_{XY_p} \cdot X}$$

Nas condições acima indicadas, esta é uma expressão correta da ordenada Y de uma abscissa X dada, empregando termos parabólicos.

Essa expressão (50) pode simplificar-se mediante as seguintes considerações.

A expressão (49) pode assumir a forma

$$\delta_{i_p} = \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} - \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \right) \left(1 + \Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} - \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \right) \left[1 - \Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} + \left(\Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right)^2 + \dots \right]$$

Desprezando o término $\left(\Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right)^2$ e substituindo na
(41) da página 56, vem :

$$(51) \quad Y = \left[\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} - \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} - \operatorname{tg} \psi_{XY_p} \right) \Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right] X$$

Fazendo nesta, de acordo com a expressão (40) da página
55

$$\left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right) X = Y_1$$

e notando que

$$\operatorname{tg} \psi_{XY_p} X = Y_p \quad \text{de acordo com (41) da página 56, vem}$$

$$(52) \quad Y = Y_1 - (Y_1 - Y_p) \Delta \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2}$$

onde, como vimos, Y_1 é dado pela expressão (40) (pag. 55) e $\Delta \mathcal{P}_{XY_p}$ é dado pela (46) da página 58.

Nesta expressão (52), pode-se agora verificar, o último termo é geralmente desprezável. Este termo representa a expressão do erro quando se obtém a ordenada Y de abscissa X pela expressão (40) (pag. 55).

Exemplo numérico

Façamos uma aplicação com os dados do exemplo numérico da página 50 e seguintes. Apliquemos a expressão (40) (pag. 55)

$$Y_1 = \left(\operatorname{tg} \theta_B - \mathcal{P}_{XY_p} \frac{X}{2} \right) X$$

onde

$$\operatorname{tg} \theta_B = 0,8544 \quad (\text{pag. 51})$$

$$X = \frac{x}{c} = \frac{63}{126} = 0,5 \quad (\text{pag. 51})$$

Pela expressão (38) da página 54 :

$$Y_p = \frac{\sec \psi}{2} (H-X)X + \frac{V}{H} X$$

onde

$$\sec \psi = \frac{1}{0,89443} \quad \frac{V}{H} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \quad (\text{pag. 51})$$

E com

$$Y_p = \frac{1}{2(0,89443)} (0,6 - 0,5)0,5 + \frac{0,3}{0,6} 0,5 = 0,27795$$

se pode obter pela expressão (24) da página 34

$$\rho_{XY_p} = \frac{\rho_{XY_p}}{\cos \psi_{XY_p}}$$

onde

$$\cos \psi_{XY_p} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y_p^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + 0,27795^2}} = 0,87403$$

$$\text{Para } X = 0,5 \text{ e } Y_p = 0,27795 \text{ ou } i = \tan \psi_{XY_p} =$$

$= \frac{0,27795}{0,5} = 0,55590$ obtém-se por interpolação na tabela dos

ρ da página 35, $\rho_{XY_p} = 1,048239$; logo

$$\rho_{XY_p} = \frac{1,048239}{0,87403} = 1,19932$$

Substituindo os valores numéricos indicados na expressão (40) (pag. 55), vem :

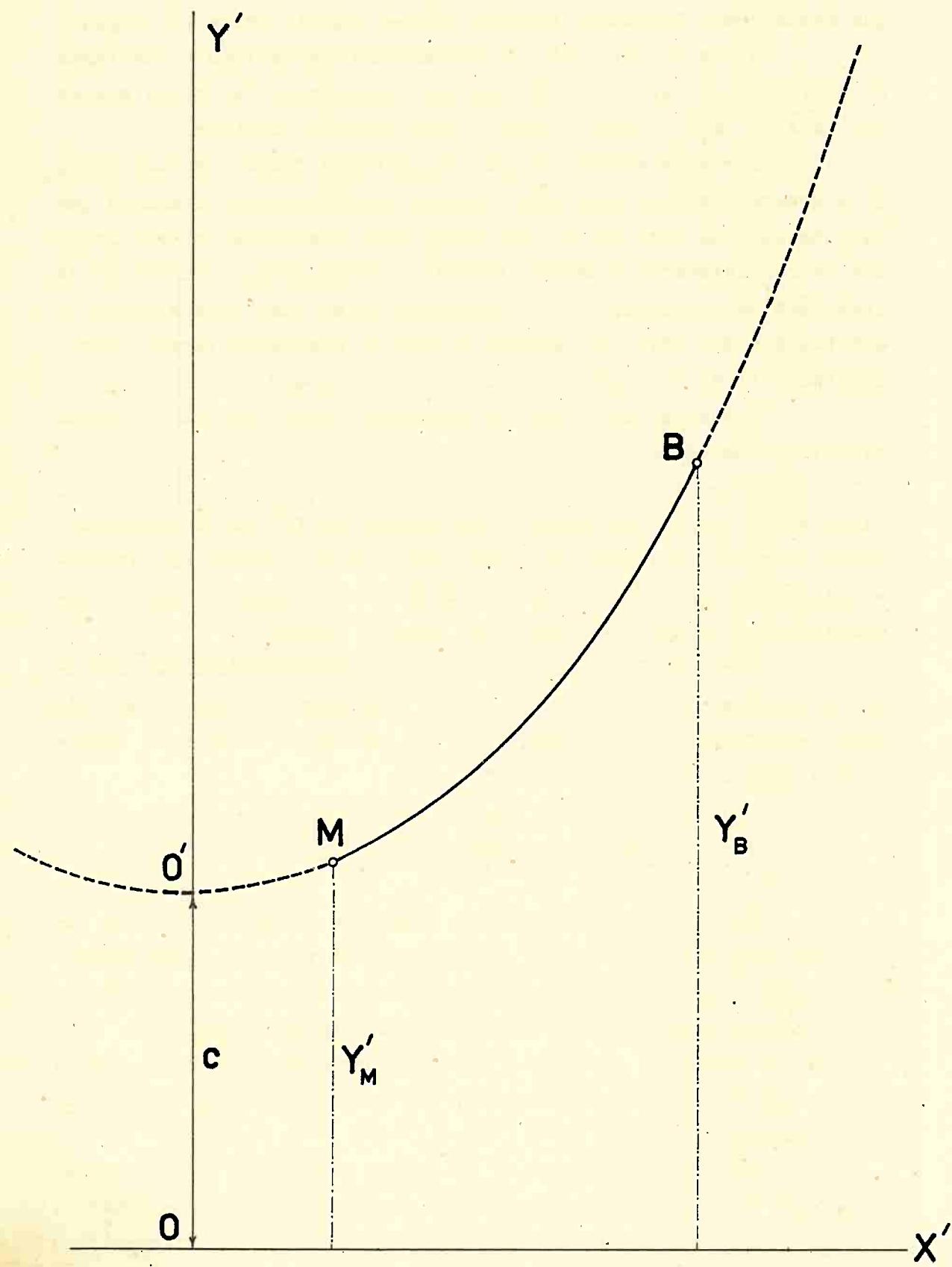
$$|Y_1| = \left(0,8544 - 1,19932 \frac{0,5}{2} \right) 0,5 = 0,27728$$

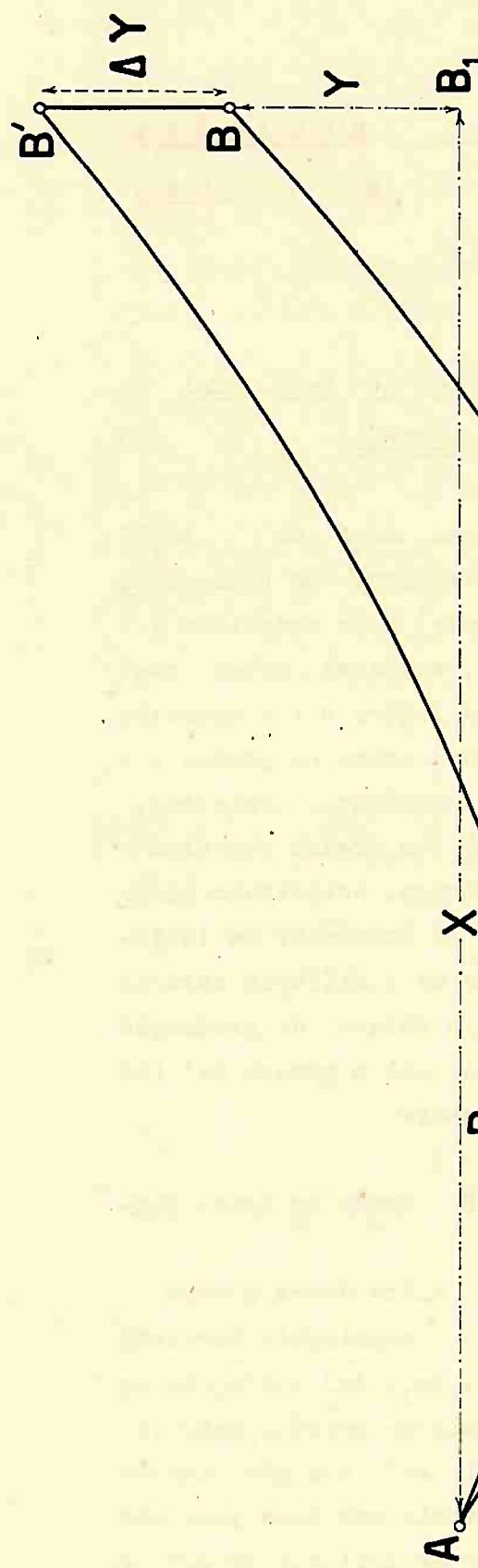
Sendo $c = 126$ mm o parâmetro da catenária :

$$y_1 = Y_1 \cdot c = 0,27728 \text{ (126 mm)} = 34,9 \text{ mm}$$

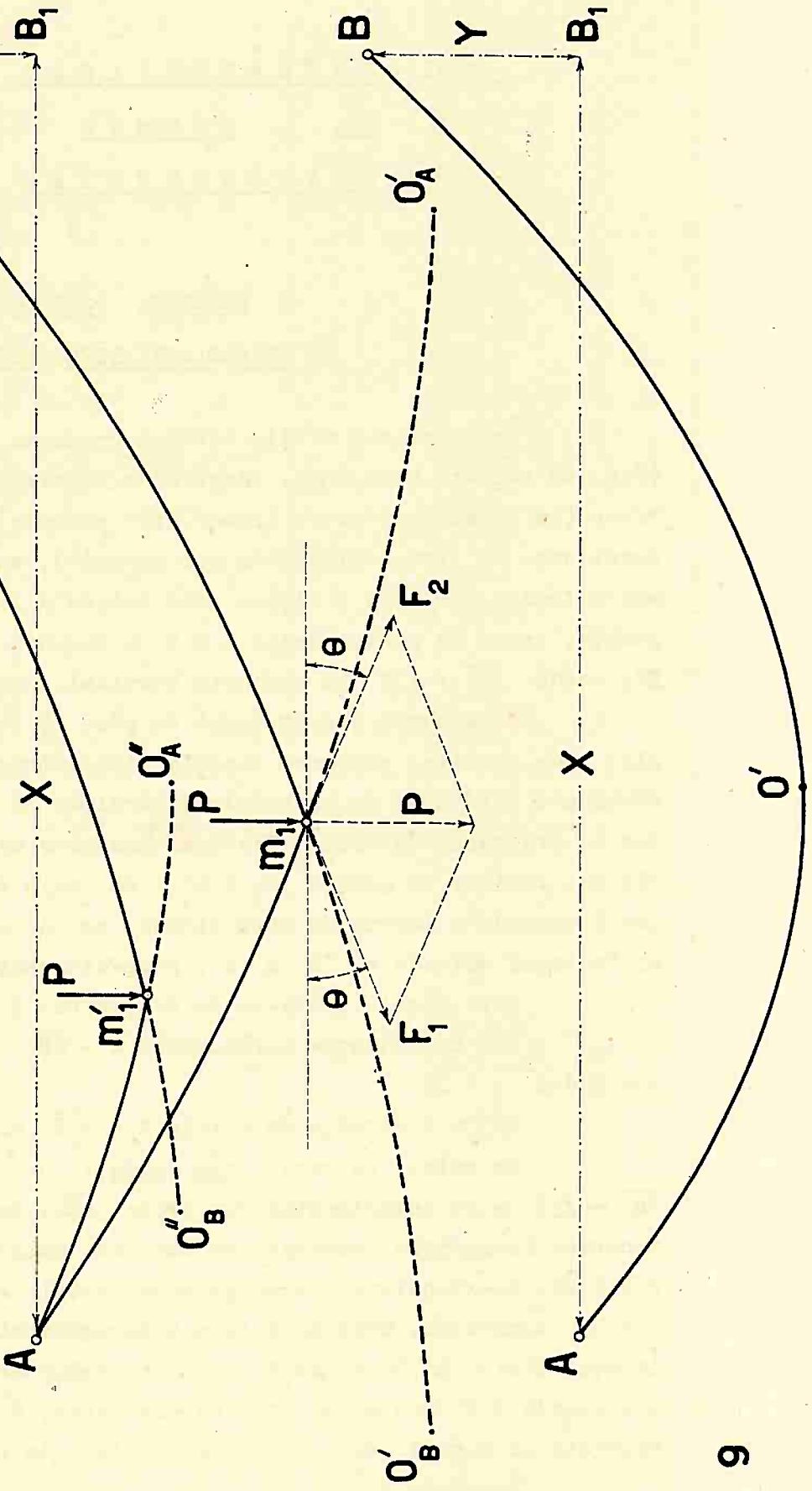
tal como achámos à página 52 para o exemplo dado.

FIG. 10





8
G.
4



6
—
F.

FIG. 16

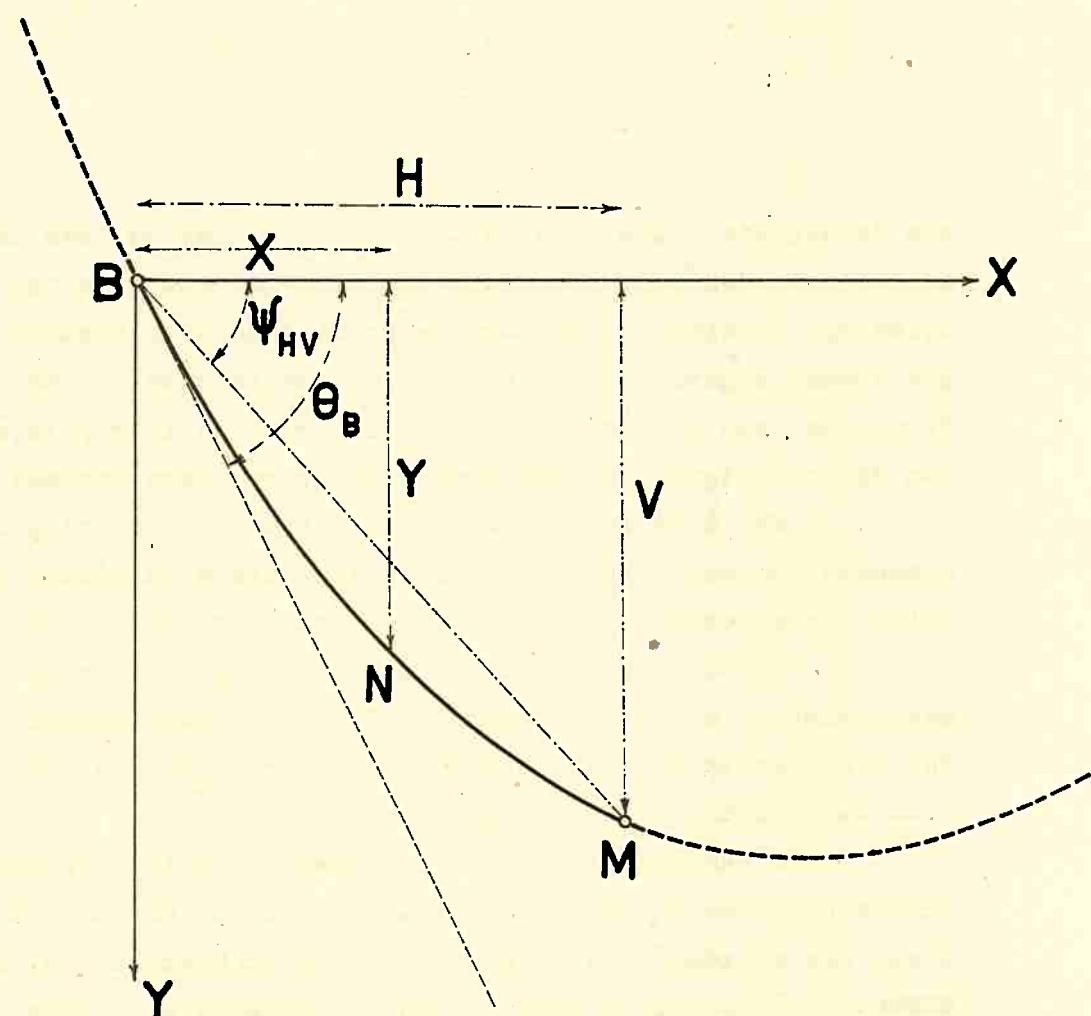


FIG. 17

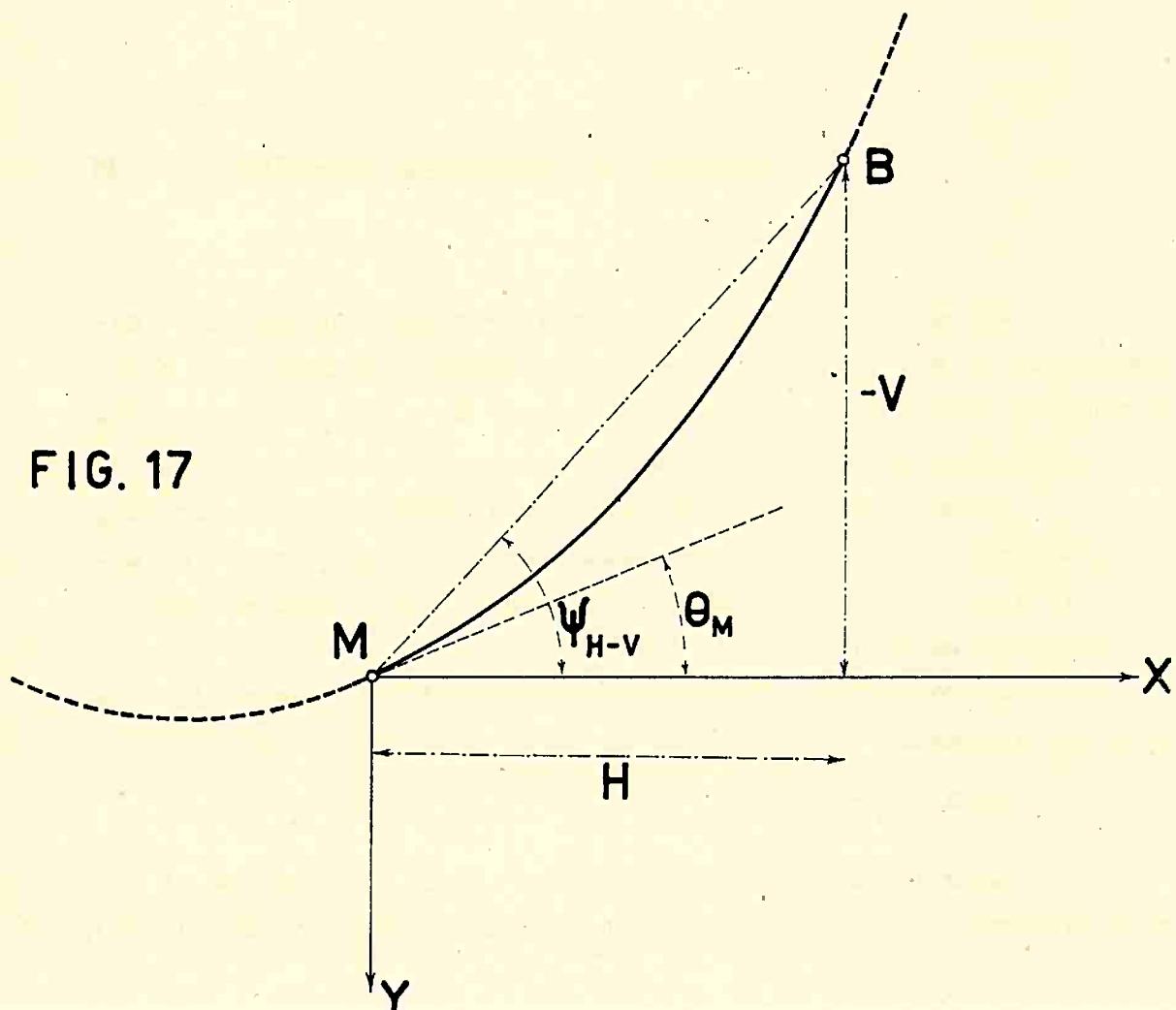
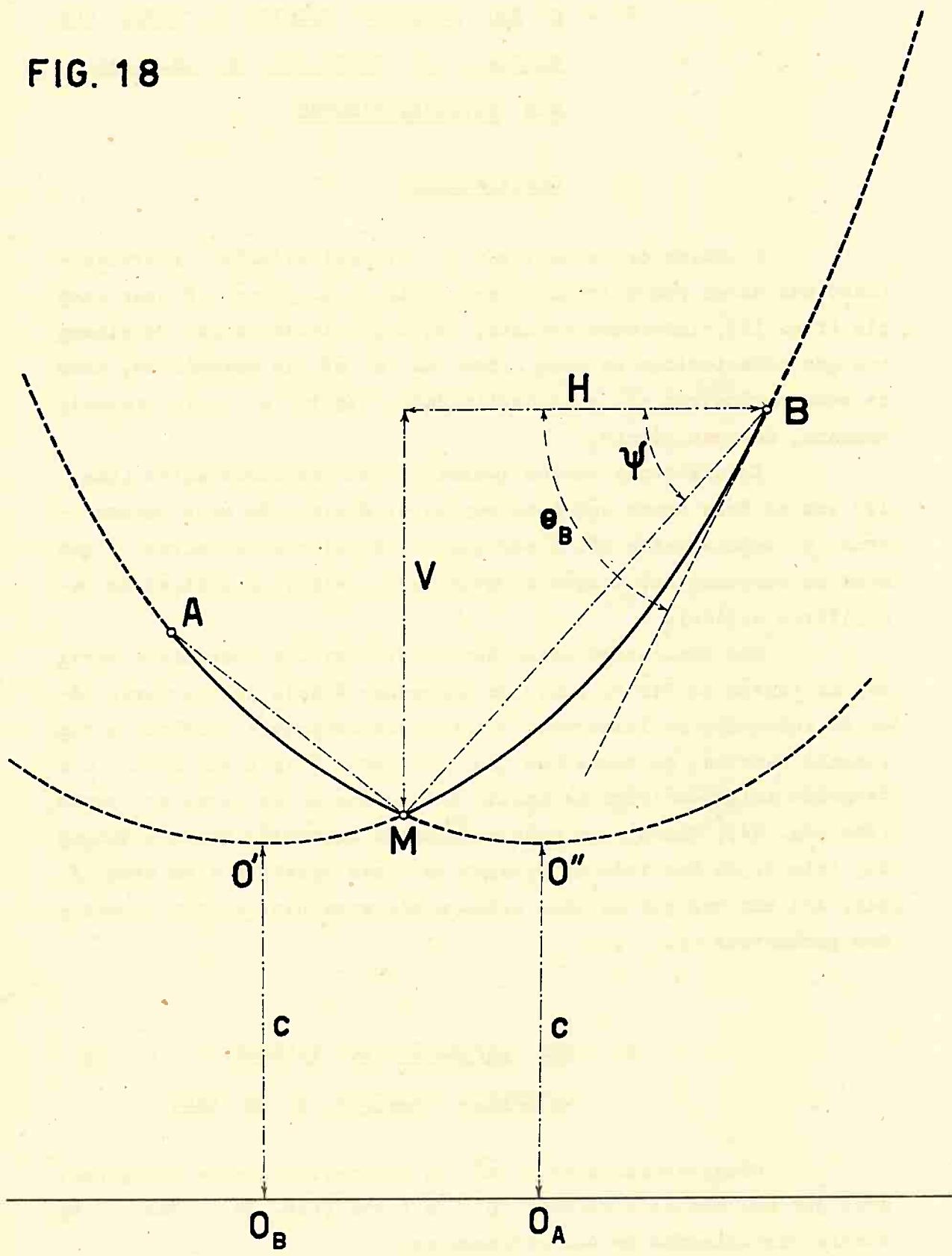


FIG. 18



D - O FIO SUSPENSO SUJEITO A CARGA CON
CENTRADA DO INDICADOR DE LEITURAS
NUM NIVELDIASTIMETRO

1. CONSIDERAÇÕES

O indicador de leituras do NIVELDIASTIMETRO representa uma carga concentrada no seu ponto de suspensão M por exemplo (fig. 18), interessa estudar, em função dessa carga, os elementos que caracterizam os dois arcos \widehat{mA} e \widehat{mB} de catenárias, como os seus parâmetros c e as declividades $\operatorname{tg} \Psi_1$ e $\operatorname{tg} \Psi_2$, respectivamente, de suas cordas.

Inicialmente convém lembrar, como indicamos antes (pag. 19) que os dois arcos são semelhantes e, assim, têm seus parâmetros c iguais entre si, desde que o indicador de leituras que deslisa suspenso sob a ação da gravidade, esteja na posição de equilíbrio estável.

Uma vez estabelecido esse equilíbrio, a componente vertical da tensão do fio no ponto de suspensão é dada pelo próprio peso do indicador de leituras. E como numa catenária unitária a componente vertical da tensão em qualquer ponto é dada por meio da tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da curva no ponto (Ver pag. 44), vamos logo após examinar a expressão daquela tangente, isto é, da derivada da equação da curva relativa a um arco (V. pag. 42) uma vez que os dois arcos, sendo semelhantes, têm os mesmos parâmetros c .

2. UMA EXPRESSÃO DO PARÂMETRO c DA
CATENÁRIA RELATIVA A UM ARCO

Consideremos o arco \widehat{mB} da catenária suposta homogênea, arco que não contém o vértice O' da curva (fig. 18) o qual se encontra virtualmente em seu prolongamento.

Chamemos :

θ_B e θ_M aos ângulos, menores que 90° , de inclinação

das retas tangentes à curva nos pontos B e M , respetivamente; são ângulos de inclinação em relação ao horizonte;

ψ o ângulo de inclinação da corda \overline{MB} do arco correspondente;

H e V a distância horizontal e a diferença de nível entre os pontos M e B do arco de catenária suposta unitária, isto é, admitindo o seu parâmetro c como unidade de comprimento;

S_{HV} o comprimento do arco \overline{MB} tomando também o parâmetro c como unidade;

L o comprimento da corda \overline{MB} , sempre com o parâmetro c servindo de unidade.

Tendo em vista as definições acima e a figura 18, considerando o comprimento S_{HV} do arco \overline{MB} como uma quantidade essencialmente positiva, e os ângulos de inclinação θ sempre menores que 90° , notando que sempre $\theta_B > \theta_M$, recordando o estudo realizado antes da teoria da catenária homogênea relativa a um arco, principalmente com referência à tangente do ângulo de inclinação sobre a horizontal em cada ponto da curva (Ver pags. 42 e seguintes), podemos escrever, em virtude das expressões (8), (9) e (10) (pags. 27 e 28) :

$$(1) \quad |\operatorname{tg} \theta_B| - |\operatorname{tg} \theta_M| = |S_{HV}| = |S_{HV} \cdot H|$$

e assim :

$$(2) \quad |\operatorname{tg} \theta_M| = |\operatorname{tg} \theta_B| - |S_{HV} \cdot H|$$

onde, em virtude das expressões (16) e (20) da página 33, fazendo

$$(3) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2}$$

$$(4) \quad S_{HV} \cdot H = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV}) H$$

resulta :

$$(5) \quad |\operatorname{tg} \theta_M| = \left| \frac{V}{H} - \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2} \right|$$

tal como já havíamos escrito na expressão (17) da página 33, quando estudávamos a teoria da catenária relativa a um arco.

Esta expressão (5) teórica, referente a um arco de catenária unitária, vamos torná-la prática exprimindo o seu parâmetro

c em milímetros, multiplicando ambos os membros por c e lembrando (pag. 22) que $V = \frac{v}{c}$, $H = \frac{h}{c}$ e que $R_{HV} = \frac{\gamma}{\cos \psi}$, $S = \frac{\sigma}{\cos \psi}$ e $S_h = s$ (pags. 34, 29, 28, 27). Assim

$$(6) \quad c \cdot \operatorname{tg} \theta_M = c \frac{v}{h} - \frac{\gamma}{\cos \psi} \cdot \frac{h}{2}$$

onde fazendo

$$\frac{h}{\cos \psi} = \frac{\frac{\sigma}{\cos \psi} h}{\sigma} = \frac{S_h}{\sigma} = \frac{s}{\sigma} \quad \text{e} \quad \frac{v}{h} = \operatorname{tg} \psi$$

vem :

$$(7) \quad 2 c \cdot \operatorname{tg} \theta_M = 2 c \cdot \operatorname{tg} \psi - \frac{\gamma}{\sigma} s$$

Por outro lado, considerando a catenária como um diagrama de tensões (Ver pag. 21 e seguinte) e sendo $\operatorname{tg} \theta_M$ na catenária unitária a componente vertical (pag. 44) da tensão no ponto M do arco MB, e estando esse arco em equilíbrio com o arco MA e com o peso P gramas do indicador de leituras, e ainda, sendo p o peso em gramas por milímetro de comprimento do fio suspenso, resulta, com o parâmetro c milímetros, que

$$(8) \quad 2 c \cdot \operatorname{tg} \theta_M = \frac{P \text{ grf}}{p \text{ mm}} = u \text{ mm}$$

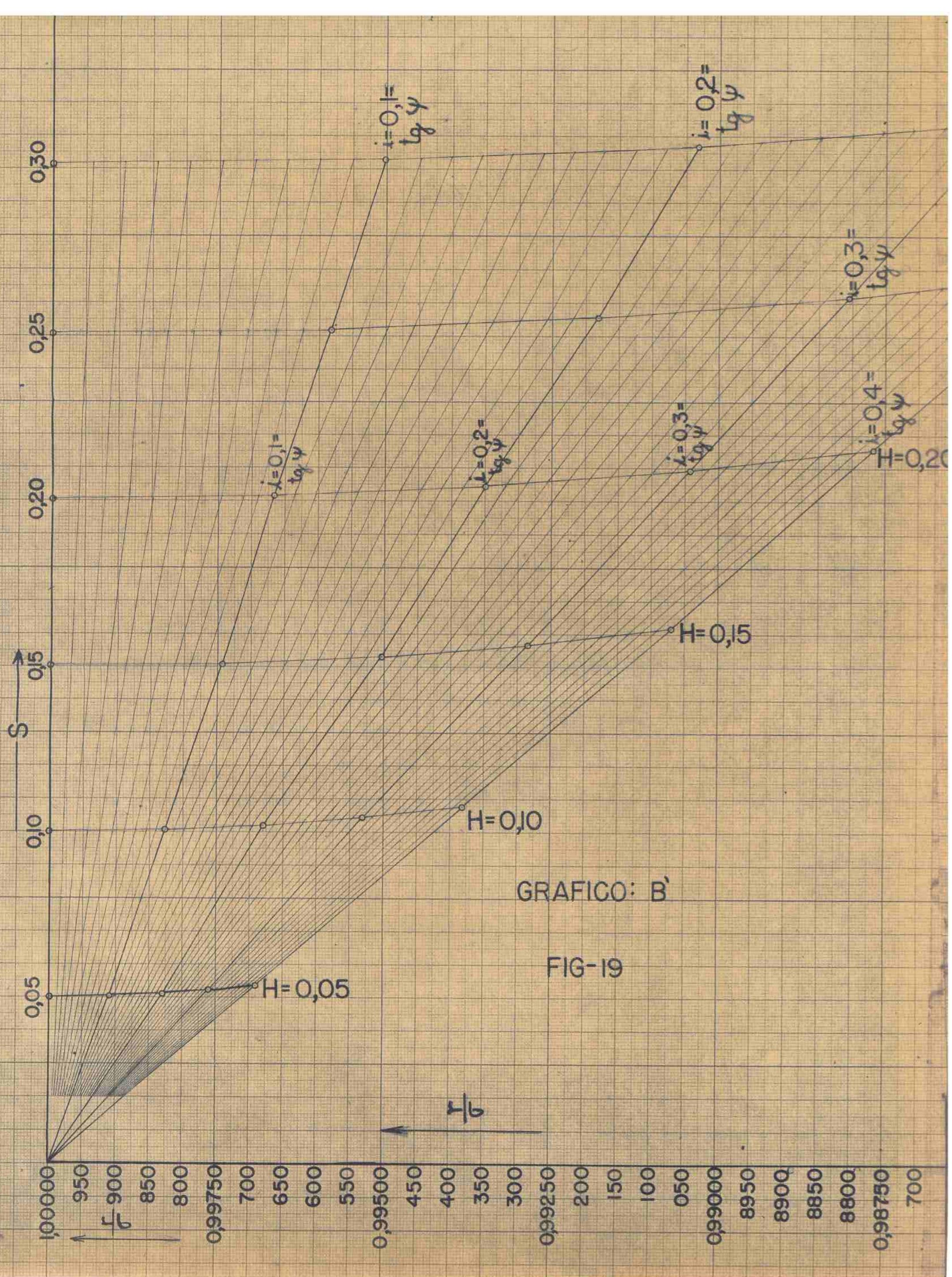
representa o peso do indicador de leituras expresso em milímetros.

Isto equivale a interpretar o valor $c \cdot \operatorname{tg} \theta_M$ como o comprimento do arco virtual e restante da catenária desde o ponto M (de suspensão do indicador de leituras) até o vértice O' (fig.18) da curva geométricamente considerada.

Substituindo o valor (8) em (7) acima, pode-se obter

$$(9) \quad c = \frac{u + \frac{\gamma}{\sigma} s}{2 \operatorname{tg} \psi}$$

que representa uma expressão prática do parâmetro c, em milímetros, da catenária relativa a um arco formado no NIVELDIASTÍMETRO.



3. EXEMPLOS NUMÉRICOSPrimeiro exemplo

Suponhamos o arco \widehat{MB} (fig. 18) expresso por $s = 4321,9$ mm e a declividade da corda desse arco por $\operatorname{tg}\psi = 0,230235$; o peso do indicador de leituras é de $P = 439,080$ grf; o peso da fita métrica é de $p = 0,012318$ grf/mm. Vejamos como obter o parâmetro c da catenária em milímetros.

Para isso, admitimos inicialmente o arco de catenária, numa certa aproximação, como um arco parabólico, o que equivale a fazer, na expressão (9) da página anterior, $\gamma = \sigma = \frac{\gamma}{c} = 1$ (Ver pag. 54).

Assim vem :

$$c_{ap} = \frac{u + s}{2 \operatorname{tg}\psi} \quad \text{onde vamos substituir os valo-}$$

res numéricos dados, notando que, pela (8) (pag. 63) :

$$u = \frac{P \text{ grf}}{p \text{ mm}} = \frac{439,080}{0,012318} = 35645,4 \text{ mm}$$

Então :

$$c_{ap} = \frac{35645,4 + 4321,9}{2(0,230235)} = 86796,8 \text{ mm}$$

Com este valor aproximado de c_{ap} pode-se obter γ e σ ou $\frac{\gamma}{c}$, pelo cálculo numérico direto ou com auxílio de tabelas de interpolação linear simples (Ver pag. 37) ou de gráficos de emprêgo simplificado, como passamos a examinar.

Supondo um gráfico cartesiano de linhas isométricas construído, o que vamos indicar logo após, encontramos (fig. 19) em abscissas os valores $S = \frac{s}{c}$ de uma catenária unitária e em ordenadas os valores de $\frac{\gamma}{c}$ correspondentes, e, indicados por linhas isométricas, os valores de $\operatorname{tg}\psi = i$.

Entrando nesse ábaco com

$$S = \frac{s}{c_{ap}} = \frac{4321,9 \text{ mm}}{86796,8 \text{ mm}} = 0,049793$$

e com

$\operatorname{tg} \psi = 0,230235$ por interpolação gráfica, obtém-se um ponto que no eixo das ordenadas corresponde, também por interpolação gráfica, ao valor de $\frac{Y}{G} = 0,99817$

Este valor na expressão (9) com os demais elementos já indicados resulta :

$$c = \frac{25645,4 + 0,99817 (4321,9)}{2(0,230235)} = 86779,6 \text{ mm}$$

com maior aproximação que o primeiro valor parabólico.

Tendo-se partido do valor parabólico, a aproximação que se obtém em seguida é, em geral, suficiente.

Em princípio, um valor aproximado conduz a novos valores, e, em última análise, obtém-se resultados com uma aproximação qualquer, bastando que as tabelas numéricas sejam suficientemente aproximadas ou os gráficos em escala convenientemente elevada.

Segundo exemplo

Admitamos os mesmos dados do exemplo anterior para o arco \widehat{MB} (fig. 18) em equilíbrio com o arco \widehat{MA} no NIVELDIASTIMETRO, a saber :

$$\widehat{MB} = s = 4321,9 \text{ mm};$$

$$\operatorname{tg} \psi = 0,230235 \text{ sendo o ângulo } \psi \text{ com vértice em B};$$

$$P = 439,080 \text{ grf}; \quad p = 0,012318 \frac{\text{grf}}{\text{mm}}$$

Estes valores P e p foram obtidos por pesagem no "Instituto de Pesquisas Tecnológicas" (I.P.T.) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Porém, lembremos que o comprimento da fita métrica padrão empregada no primeiro NIVELDIASTIMETRO experimentado é de

$$2a = 2a' + \overline{m m_d} \quad (\text{fig. 4})$$

onde, devido às dimensões do indicador de leituras suspenso, $\overline{m m_d}$ é o trecho horizontal e $2a' = \widehat{mA} + \widehat{mB}$ é a soma dos trechos inclinados e $\overline{m m_d} = 500 \text{ mm}$ e $2a' = 9500 \text{ mm}$.

Por esse motivo acresce ao peso do indicador de leituras, ainda o peso de 500 mm de fita métrica o que equivale a

$$500 \text{ mm (0,012318 grf/mm)} = 6,159 \text{ grf} \quad \text{resultando um}$$

um peso total de

$439,080 \text{ grf} + 6,159 \text{ grf} = 445,239 \text{ grf}$ que corresponde, em milímetros de comprimento da fita, a

$$\frac{445,239 \text{ grf}}{0,012318 \text{ grf/mm}} = 36145,4 \text{ mm}$$

Este substitue o valor de u do exemplo numérico anterior. Isto é, no exemplo atual ilustrado simplificadamente pela figura 18, a carga concentrada no ponto M é representada por $u = 36145,4 \text{ mm}$ expresso em comprimento da fita métrica.

Por outro lado lembremos ainda que nas extremidades superiores B e A dos arcos \widehat{MB} e \widehat{MA} da fita métrica se encontravam pequenos ganchos ou mosquetões com esticadores, cada qual com o comprimento de 30 mm, que nesses trechos substituem a fita métrica, completando o comprimento total $2a = 2a' + 500 = 9500 + 500 \text{ mm}$.

Uma vez que a pesagem acusou o valor de 3,289 gramas para cada mosquetão com o respetivo esticador, e sendo 0,012318 gramas o peso por milímetro de fita métrica, acresce nas proximidades do ponto B (ou A), por exemplo, um esforço vertical de

$3,289 \text{ grf} - 30 \text{ mm}(0,012318) \text{ grf/mm} = 2,919 \text{ grf}$ que é adicional naquele ponto e que corresponde, em milímetros de comprimento da fita métrica, a

$$\frac{2,919 \text{ grf}}{0,012318 \text{ grf/mm}} = 237,0 \text{ mm}$$

Esse peso ou esforço vertical, adicional no ponto B, faz com que na expressão (2) (pag. 62) o esforço vertical em B, expresso na catenária unitária por $\operatorname{tg} \theta_B$, passe a ser expresso, no exemplo atual, por

$\operatorname{tg} \theta_B + \frac{237,0 \text{ mm}}{c'}$ numa catenária em que o parâmetro, tomado como a unidade, tem c' milímetros. Isso equivale a substituir o segundo membro da expressão (3) (pag. 62) por

$$\frac{V}{H} + \frac{\rho}{H} \frac{H}{2} + \frac{237,0 \text{ mm}}{c' \text{ mm}}$$

o que acarreta, na dedução, para o exemplo atual, a expressão

$$(9') \quad c' = \frac{u' + \frac{\gamma}{G} s}{2 \operatorname{tg} \psi}$$

tal como na expressão (9) da página 63, porém, o termo u' tem o valor $u - 2(237,0)$ mm, isto é,

$$u' = u - e = u - 474,4 \text{ mm}$$

onde

$$u = 36145,4 \text{ mm} \quad e, \text{ assim,} \quad u' = 35671,4 \text{ mm}$$

Isto se justifica melhor como segue.

Partindo de (2) da página 62 aqui transcrita

$$|\operatorname{tg} \theta_M| = |\operatorname{tg} \theta_B| - |\mathcal{S}_{HV} \cdot H|$$

onde

$$(3') \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{V}{H} + \mathcal{P}_{HV} \frac{H}{2} + \frac{237,0}{c'}$$

e

$$(4') \quad \mathcal{S}_{HV} \cdot H = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{HV} + \mathcal{R}_{HV}) H$$

logo

$$(5') \quad |\operatorname{tg} \theta_M| = \left| \frac{V}{H} + \frac{237,0}{c'} - \mathcal{R}_{HV} \frac{H}{2} \right|$$

multiplicando ambos os membros por c' e lembrando que $V = \frac{v}{c'}$,

$$H = \frac{h}{c'} \quad \mathcal{R}_{HV} = \frac{r}{\cos \psi} \quad \mathcal{S}_{HV} = \frac{s}{\cos \psi} \quad e \quad \mathcal{S} \cdot h = s \quad \text{vem:}$$

$$c' \operatorname{tg} \theta_M = c' \frac{v}{h} + 237 - \frac{r}{\cos \psi} \cdot \frac{h}{2}$$

e fazendo

$$\frac{h}{\cos \psi} = \frac{\frac{s}{\cos \psi} h}{s} = \frac{\mathcal{S} \cdot h}{s} = \frac{s}{s}$$

$$e \quad \frac{v}{h} = \operatorname{tg} \psi$$

$$\text{vem} \quad 2 c' \operatorname{tg} \theta_M = 2 c' \operatorname{tg} \psi + 474,0 - \frac{r}{s} s$$

onde

$$2 c' \operatorname{tg} \theta_M - 474,0 = u - e = u'$$

$$c' = \frac{u' + \frac{r}{s} s}{2 \operatorname{tg} \psi}$$

Fazendo aplicação dessa fórmula (9') como no exemplo anterior, isto é, admitindo primeiro o caso parabólico em que $\frac{r}{s} = 1$ e depois obtendo o valor de $\frac{r}{s}$ com o auxílio do ábaco (fig. 19), chega-se ao valor:

$$c' = 88688,4 \text{ mm}$$

4. DECLIVIDADE $\operatorname{tg} \psi_1$ DA CORDA DE UM ARCO EM FUNÇÃO DA DECLIVIDADE $\operatorname{tg} \psi_2$ DA CORDA DO OUTRO ARCO

Vamos distinguir com os índices 1 e 2, respetivamente, os elementos que caracterizam os arcos correspondentes \widehat{MA} e \widehat{MB} (fig. 18) em equilíbrio estável, sob a ação vertical da carga concentrada do indicador de leituras no ponto M.

O parâmetro da catenária que corresponde ao arco \widehat{MA} é expresso pela fórmula (9) da página 63 ou pela fórmula (9') (pag. 67) no caso do segundo exemplo numérico ali estudado.

Assim, neste último caso

$$c' = \frac{u' + \frac{\gamma_1}{G_1} s_1}{2 \operatorname{tg} \psi_1}$$

E para o arco \widehat{MB} o seu parâmetro será expresso por

$$c' = \frac{u' + \frac{\gamma_2}{G_2} s_2}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

E como os dois arcos estão em equilíbrio estável sob a ação da mesma carga u' , os seus parâmetros são iguais e daí :

$$\frac{u' + \frac{\gamma_1}{G_1} s_1}{2 \operatorname{tg} \psi_1} = \frac{u' + \frac{\gamma_2}{G_2} s_2}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

de onde se tira :

$$(10) \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{u' + \frac{\gamma_1}{G_1} s_1}{u' + \frac{\gamma_2}{G_2} s_2} \operatorname{tg} \psi_2$$

que exprime a declividade $\operatorname{tg} \psi_1$ da corda do arco $\widehat{MA} = s_1$ em função da declividade $\operatorname{tg} \psi_2$ da corda do arco $\widehat{MB} = s_2$ e dos de mais elementos que caracterizam os dois arcos.

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Vamos agora exemplificar o cálculo numérico da declividade $\operatorname{tg} \psi_1$ do arco \widehat{MA} (fig. 18), supondo dada a declividade $\operatorname{tg} \psi_2 = 0,230235$

do arco

$$\widehat{MB} = s_2 = 5178,1 \text{ mm}$$

sendo o padrão de comprimento do NIVELDIASTIMETRO definido por

$$2a' = s_1 + s_2 = 9500 \text{ mm}$$

e assim

$$\widehat{MA} = s_1 = 9500 - 5178,1 = 4321,9 \text{ mm}$$

O padrão de peso ou componente vertical da tensão no ponto M foi definido em milímetros por

$u' = u - e = 36145,4 - 474,0 = 35671,4 \text{ mm}$ à pagina 67 quando ali estudámos outro exemplo numérico.

Neste cálculo supõem-se também, inicialmente, os arcos de catenária como arcos parabólicos, o que equivale a fazer na expressão (10) (pag. 68) $\frac{\gamma_1}{\sigma_1} = \frac{\gamma_2}{\sigma_2} = 1$ e assim

$$\operatorname{tg} \psi_1 \approx \frac{u' + s_1}{u' + s_2} \operatorname{tg} \psi_2$$

ou numéricamente

$$\operatorname{tg} \psi_{1p} \approx \frac{35671,4 + 4321,9}{35671,4 + 5178,1} 0,230235 \approx 0,225409$$

O valor de c' para o arco \widehat{MB} (fig. 18) pode ser calculado pela expressão (9') da página 66, tal como foi indicado e exemplificado antes (pag. 67), resultando

$$c' = 88688,4 \text{ mm}$$

Esse valor calculado para o arco $\widehat{MB} = s_2$ sendo comum para os dois arcos, pode-se obter no gráfico da figura 19 tanto o valor

$$\frac{\gamma_2}{\sigma_2} \approx 0,99785 \quad \text{em função de } \operatorname{tg} \psi_2 = 0,230235 \text{ e de}$$

$$s_2 = \frac{s_2}{c'} = \frac{5178,1}{88688,4} = 0,058385 \quad \text{desse arco, como também}$$

no mesmo gráfico, o valor

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} \approx 0,99820 \quad \text{em função de } \operatorname{tg} \psi_{1p} = 0,225409 \text{ e de}$$

e de

$$S_1 = \frac{s_1}{c'} = \frac{4321,9}{88688,4} = 0,048731 \quad \text{do arco } \widehat{MA}.$$

Substituindo os valores assim achados e os demais na expressão (10) (pag. 68), obtem-se :

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{35671,4 + 0,99820(4321,9)}{35671,4 + 0,99785(5178,1)} 0,230235 = 0,225427$$

Tendo-se partido do valor parabólico, esta aproximação é em geral, suficiente. Em princípio, o processo conduz a uma aproximação desejada qualquer, bastando, para isso, que o gráfico dos $\frac{\gamma}{G}$ tenha escala conveniente.

6. CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE $\frac{\gamma}{G}$ E DO
GRÁFICO DE G EM FUNÇÃO DE S E
DE $\operatorname{tg} \psi$

Reunimos na tabela anexa (pag. 71), para cada par de valores H e $\operatorname{tg} \psi$ (com $H = 0,05 \quad 0,10 \quad 0,15 \quad 0,20 \quad 0,25 \quad 0,30$ e $\operatorname{tg} \psi = 0,00 \quad 0,10 \quad 0,20 \quad 0,30 \quad 0,40$), os valores correspondentes de G e γ que podem ser calculados, respetivamente, pela expressão (12') da página 29 e pela expressão 25 da página 34, valores êsses que se encontram nas tabelas das páginas 30 e 36.

Junto a cada par de valores G e γ incluimos o valor correspondente de S calculado pela expressão

$$(11) \quad S = \frac{H \cdot G}{\cos \psi}$$

que resulta da (9) da página 28 fazendo-se $S_{HV} = \frac{G}{\cos \psi}$ conforme foi justificado pela (12) da página 29.

Reunimos depois na tabela B anexa (pag. 71), para cada par dos mesmos valores de H e $\operatorname{tg} \psi$, os valores correspondentes dos $\frac{\gamma}{G}$ e dos S .

Com êstes valores construimos o gráfico cartesiano B' a nexo (fig. 19), representando em abcissas os valores de S numa escala em que o intervalo de 1 mm corresponde ao intervalo 0,001 em S , e em ordenadas os valores de $\frac{\gamma}{G}$ numa escala em que o intervalo de 2 mm corresponde ao intervalo de 0,0001 em $\frac{\gamma}{G}$.

TABELA A

$\frac{\operatorname{tg} \psi}{H}$		0,00	0,10	0,20	0,30	0,40
0,05	σ	1,00010	1,00010	1,00010	1,00009	1,00009
	γ	1,0001	0,9992	0,9984	0,9977	0,9970
	S	0,05000 ₅	0,05025 ₄	0,05100	0,05221	0,05386
0,10	σ	1,00042	1,00042	1,00040	1,00038	1,00036
	γ	1,0004	0,9987	0,9972	0,9957	0,9942
	S	0,10004 ₂	0,10054 ₁	0,10202	0,10444	0,10774
0,15	σ	1,00094	1,00093	1,00091	1,00086	1,00081
	γ	1,0009	0,9984	0,9960	0,9937	0,9915
	S	0,15014	0,15089	0,15311	0,15674	0,16169
0,20	σ	1,00167	1,00165	1,00161	1,00153	1,00144
	γ	1,0017	0,9983	0,9951	0,9920	0,9891
	S	0,20033	0,20133	0,20429	0,20913	0,21572
0,25	σ	1,00260	1,00257	1,00250	1,00238	1,00224
	γ	1,0026	0,9984	0,9943	0,9904	0,9868
	S	0,25065	0,25189	0,25559	0,26163	0,26986
0,30	σ	1,00375	1,00371	1,00361	1,00347	1,00323
	γ	1,0038	0,9987	0,9939	0,9891	0,9847
	S	0,30112	0,30261	0,30705	0,31430	0,32415

TABELA B

$\frac{\operatorname{tg} \psi}{H}$		0,00	0,10	0,20	0,30	0,40
0,05	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99910	0,99830	0,99761	0,99691
	S	0,05000	0,05025	0,05100	0,05221	0,05386
0,10	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99828	0,99680	0,99532	0,99384
	S	0,100042	0,100541	0,10202	0,10444	0,10774
0,15	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99747	0,99509	0,99285	0,99070
	S	0,15014	0,15089	0,15311	0,15674	0,16169
0,20	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99666	0,99350	0,99048	0,98768
	S	0,20033	0,20133	0,20429	0,20913	0,21572
0,25	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99584	0,99182	0,98805	0,98459
	S	0,25065	0,25189	0,25559	0,26163	0,26986
0,30	$\frac{\gamma}{\sigma}$	1,00000	0,99502	0,99032	0,98568	0,98153
	S	0,30112	0,30261	0,30705	0,31430	0,32415



FIG-20

GRAFICO: A

Este gráfico B' é o que nos serviu de aplicação ao cálculo numérico dos exemplos dados acima a páginas 64 e seguintes e à página 69.

Com os valores dos G e S e $\operatorname{tg} \psi$ da tabela A (pag. 71) construimos o gráfico cartesiano A' anexo (fig. 20) representando em abcissas os valores de S numa escala em que o intervalo de 1 mm corresponde ao intervalo 0,001 em S , e em ordenadas os valores de G numa escala em que o intervalo de 1 cm corresponde ao intervalo de 0,0001 em G .

Este gráfico A' (fig. 20) vai nos servir em aplicações do estudo que faremos em seguida.

E - CONSTRUÇÃO RACIONAL DO GRÁFICO REPRESENTATIVO DAS CORREÇÕES (K)

1. CONSIDERAÇÕES

Trata-se do gráfico (figs. 6, 7 e 21) das correções (K) utilizadas no estudo elementar de um NIVELDIASTÍMETRO mediante as quais a fórmula fundamental

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\Delta Y}{2(m - m')}$$

com os elementos m e m' do caso ideal (pags. 6 e seguintes) se transforma e se interpreta com a fórmula

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1) - (K'_1)]}{m_1 - m'_1}$$

com os dados m_1 e m'_1 do caso real (pag. 8 e seguintes) mediante um artifício em que (K_1) e (K'_1) são obtidos, em cada caso, por aproximações sucessivas definidas, numéricamente, com o auxílio do gráfico em questão (figs. 7 e 21). Na primeira tese o gráfico foi construído, empiricamente, pela experimentação prévia do aparelho. Esse gráfico, elementarmente, equivale à sua aferição.

Continuando a análise que vimos fazendo da aplicação da teoria da catenária homogênea a um NIVELDIASTÍMETRO, vamos ver que o gráfico das correções (K) pode ser construído racionalmente em

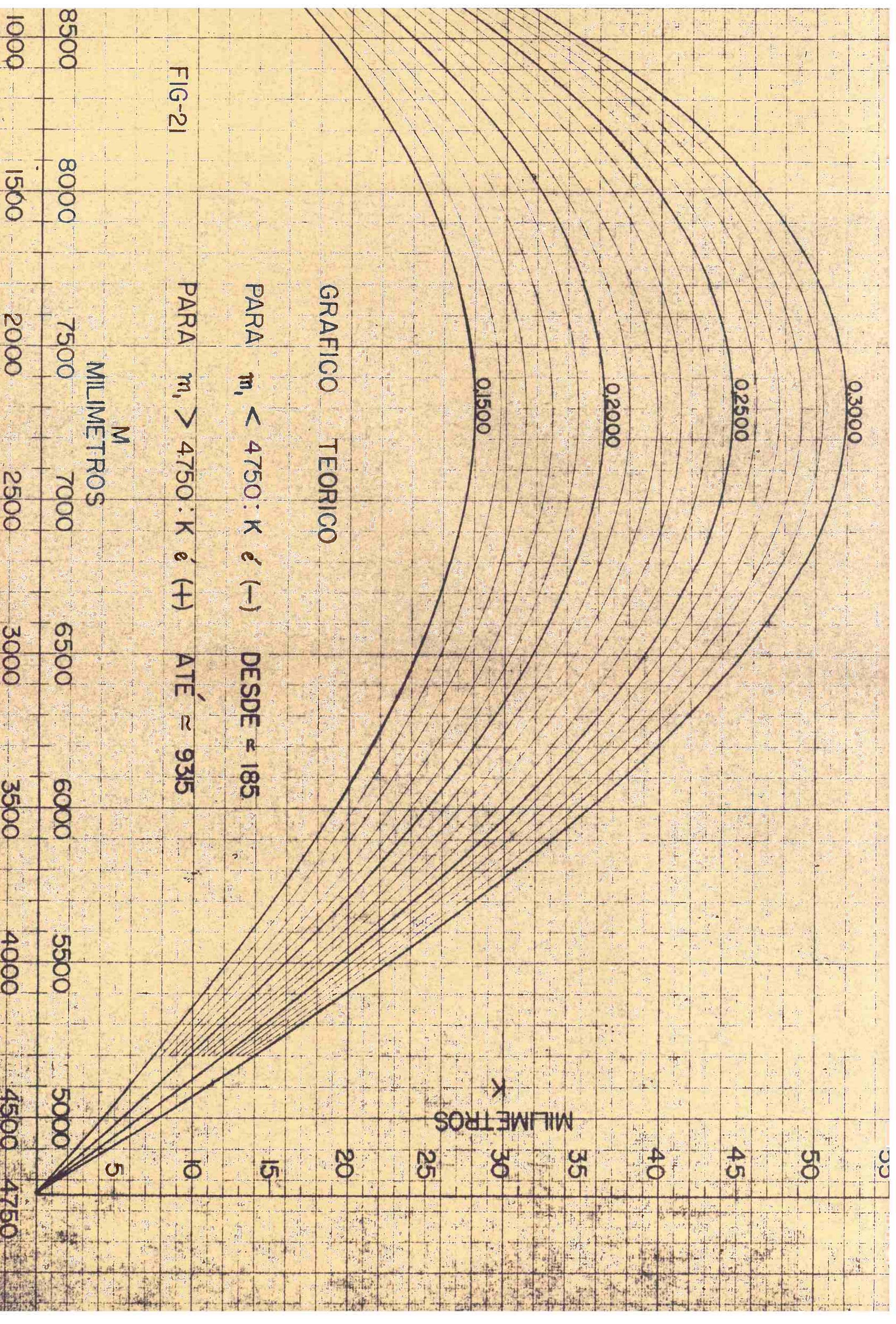


FIG-21

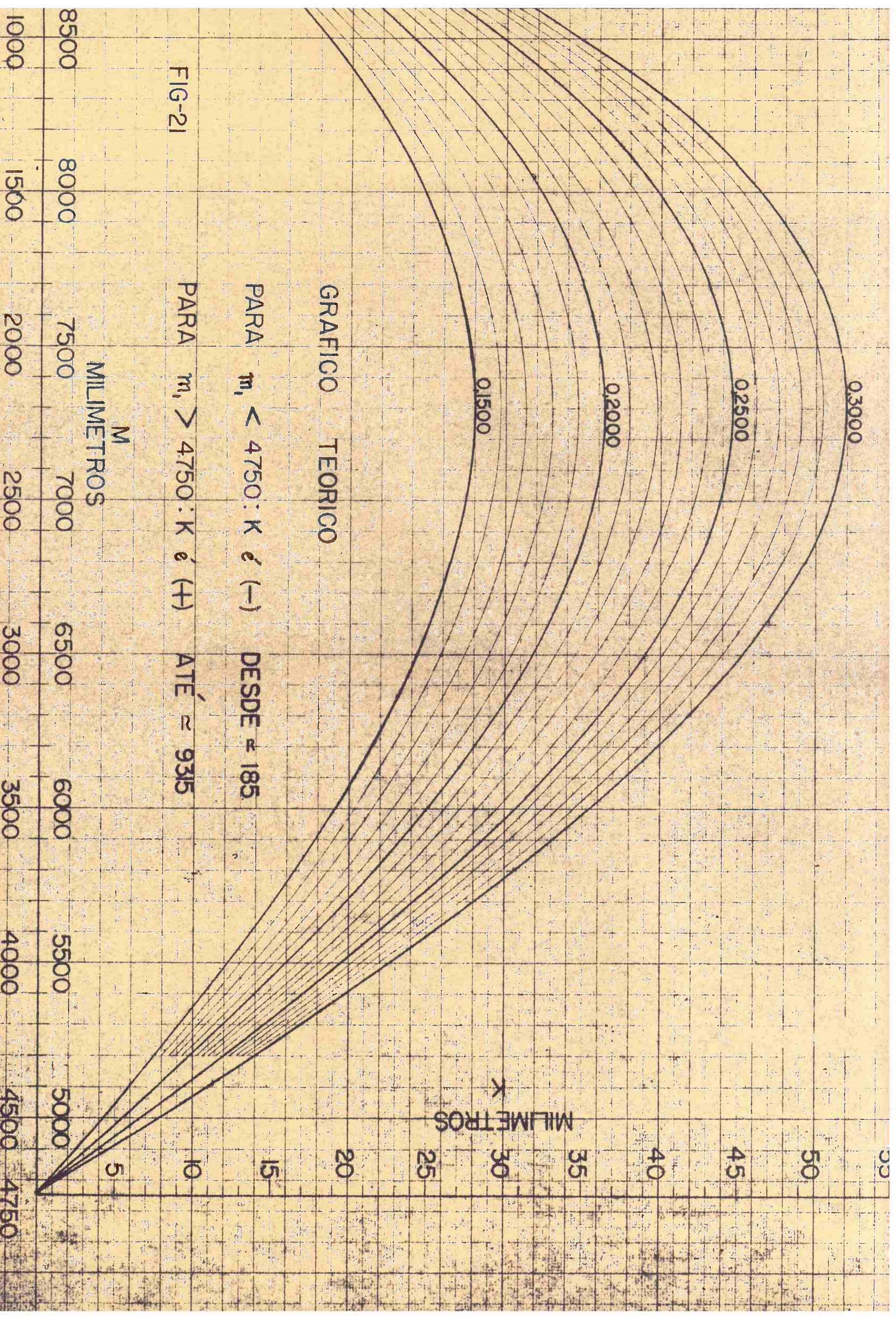
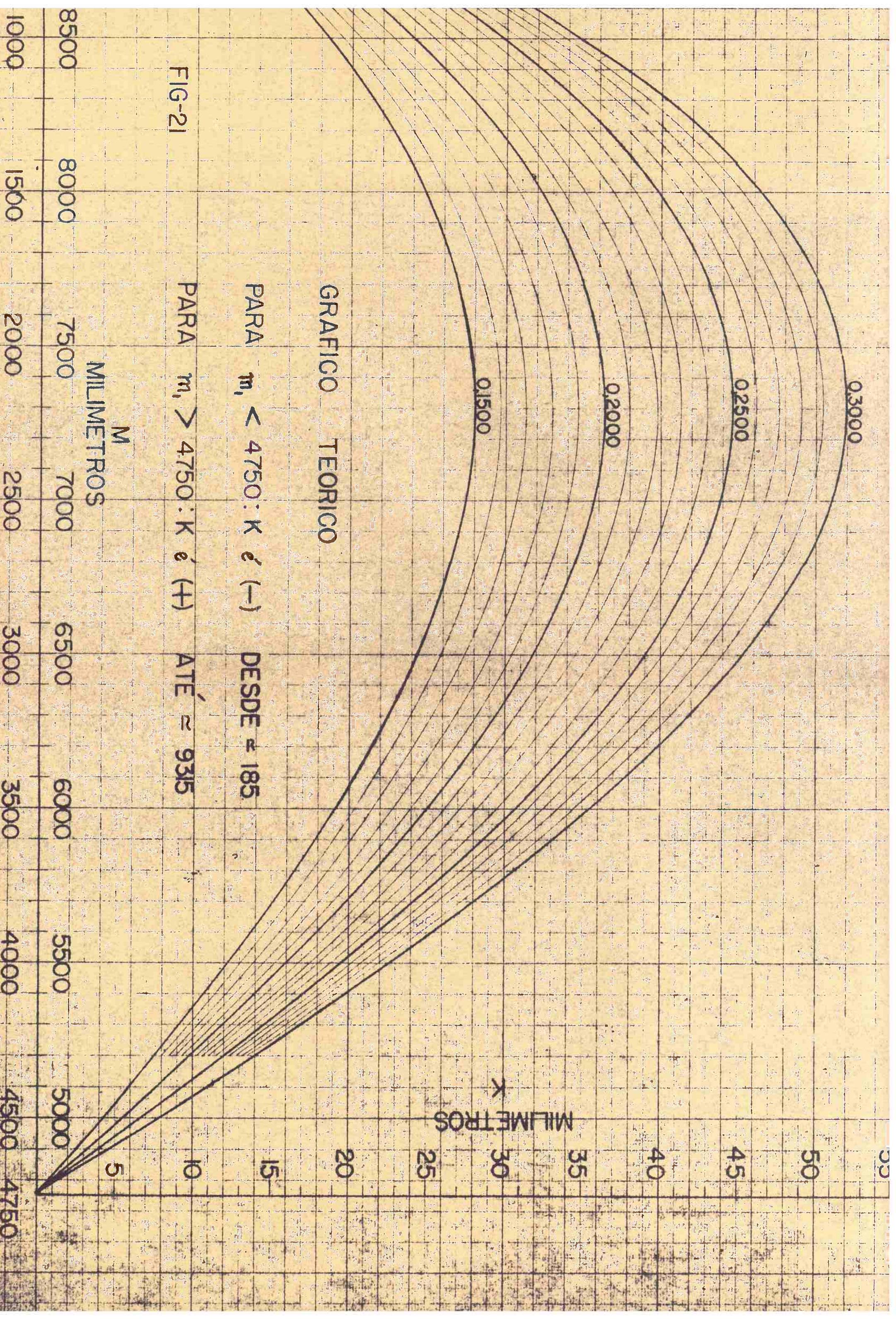


GRAFICO TEORICO

PARA $m_i < 4750$: K é (+) DESDE $\approx 18^\circ$

PARA $m_i > 4750$: K é (-) ATÉ $\approx 935^\circ$

10

15

20

25

30

35

40

45

50

0.3000

0.2000

0.1500

MILIMETROS

K

9500 9000 8500 8000 7500 7000 6500 6000 5500 5000 4500 4000 3500 3000

6 3

M
MILIMETROS

FIG-21

função do peso P do indicador de leituras, do peso p por milímetro do padrão de comprimento $2a'$, elementos estes supostos conhecidos.

Podendo este gráfico ser realizado numa escala desejada qualquer, compatível com a aproximação dos resultados procurados, conclui-se que a solução do principal problema contido no caso real do NIVELDIASTÍMETRO por nós oferecida é uma solução matemática coerente para o tipo de NIVELDIASTÍMETRO, estudado cujo protótipo construído (fig. 3) constituiu o ponto de partida e de referência teórica e experimental deste estudo.

A construção racional do gráfico consiste em marcar, para cada abscissa m_1 (fig. 21), um ponto de ordenada $K_1 = \Delta m \cdot \operatorname{sen} \alpha$ (Ver pag. 11) calculada racionalmente como vamos indicar a seguir.

Marcando um grande número de pontos com $|\alpha| < 90^\circ$ variando entre limites convenientes usuais, pode-se construir por interpolação gráfica as curvas isométricas de $\operatorname{sen} \alpha$ como se encontra na figura 21.

2. FORMULAS REUNIDAS PARA O CALCULO NUMÉRICO E RACIONAL DOS K

A análise que fizemos até aqui da teoria da catenária homogênea aplicada ao caso real do NIVELDIASTÍMETRO estudado permite agora reunir as fórmulas que nos conduzem, racionalmente, pelo cálculo numérico, a valores isolados de K_1 e $\operatorname{sen} \alpha$ para cada leitura real m_1 maior que zero e menor que $2a'$ num NIVELDIASTÍMETRO cujo padrão de comprimento é $2a'$, com o peso p gramas por milímetro e cujo indicador de leituras suspenso no ponto m_1 tem o peso P gramas (fig. 8)

NOTA - Na figura 18 o ponto m_1 é representado pelo ponto M .

O cálculo numérico de K_1 pode ser realizado pela expressão

$$(1) \quad K_1 = \Delta m_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

que provém (pag. 11) de sua definição e onde

$$(2) \quad \Delta m = m - m_1$$

sendo m a leitura suposta no caso ideal (pag. 6) calculada pela expressão

$$(3) \quad m = a' - \frac{Y}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

obtida da expressão (1) da página 10.

Na expressão (3) o termo $\operatorname{sen} \alpha$ é calculado por

$$(4) \quad \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\operatorname{arc} \cos \alpha)$$

onde

$$(5) \quad \cos \alpha = \frac{X'}{2a'}$$

é obtida da (3) da página 10, supondo que o trecho $\overline{m_1 m_2}$ (das figuras 1,2 e 3) seja reduzido a um ponto.

Na expressão (5) acima

$$(6) \quad X' = h_1 + h_2$$

onde h_1 e h_2 são as distâncias horizontais em milímetros entre o ponto M de suspensão do indicador de leituras (fig. 18) e os pontos fixos extremos A e B , respetivamente, do padrão de comprimento.

Ainda na expressão (3) acima, o termo Y é calculado por

$$(7) \quad Y = v_2 - v_1$$

onde v_1 e v_2 são as diferenças de nível em milímetros entre o ponto M (fig. 18) e os pontos extremos A e B fixos, respetivamente, e são calculadas por

$$(8) \quad v_2 = h_2 \operatorname{tg} \psi_2$$

$$(9) \quad v_1 = h_1 \operatorname{tg} \psi_1$$

Nestas expressões (8) e (9) os têrmos h_2 e h_1 são calculados por

$$(10) \quad h_2 = \frac{(2a' - m_1) \cos \psi_2}{\sigma_2}$$

$$(11) \quad h_1 = \frac{m_1 \cos \psi_1}{\sigma_1}$$

onde ψ_1 e ψ_2 são os ângulos (menores que 90°) de inclinação sob o horizonte, das cordas dos arcos de catenárias \overline{MA} e \overline{MB} (fig.

18) e σ_1 e σ_2 fatores característicos dêsses arcos, respectivamente.

NOTA - Essas expressões (10) e (11) podem ser obtidas de outra anterior, com o mesmo número (11) justificada na página 70, lembrando que

$$\frac{s_1}{c'} = \frac{m_1}{c'} = s_1 \quad \frac{s_2}{c'} = \frac{2a' - m_1}{c'} = s_2$$

representam os arcos \widehat{MA} e \widehat{MB} de catenárias unitárias de comprimentos s_1 e s_2 milímetros, respectivamente, e de parâmetros c' milímetros.

Os valores numéricos dos têrmos σ_2 e σ_1 podem ser obtidos por interpolação gráfica no ábaco A' da figura (20) (pag. 72) em função de

$$s_2 = \frac{(2a' - m_1)}{c'} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \psi_2 \quad \text{para} \quad \sigma_2 \quad \text{e de}$$

$$s_1 = \frac{m_1}{c'} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \psi_1 \quad \text{para} \quad \sigma_1.$$

Assim para simbolizar a função σ representada no ábaco A' empregamos as expressões

$$(12) \quad \sigma_1 = \sigma \left(\frac{m_1}{c'}, \operatorname{tg} \psi_1 \right)$$

$$(13) \quad \sigma_2 = \sigma \left(\frac{2a' - m_1}{c'}, \operatorname{tg} \psi_2 \right)$$

NOTA - Estes têrmos σ (isto é, σ_2 ou σ_1) podem ser calculados diretamente pela expressão (12') da página 29, a saber :

$$(12 \text{ a}) \quad \sigma = \left(\operatorname{tg}^2 \psi + \sigma_{H0}^2 \right)^{1/2} \cos \psi$$

onde pela (12'') da página 29

$$(12 \text{ b}) \quad \sigma_{H0} = 1 + \frac{H^2}{24} + \frac{H^4}{1920} + \frac{H^6}{522560} + \dots \quad \text{sendo}$$

$$(13 \text{ a}) \quad H = \frac{h}{c'} \quad (\text{com } h_1 \text{ ou } h_2) \quad \text{e} \quad h \quad \text{calculado}$$

pela (11) ou (10) (pag. 74), primeiro admitindo o caso

parabólico, isto é, fazendo $\sigma = 1$ e obtendo h_p aproximado. Com

$$H_p = \frac{h_p}{c'_p} \text{ tomado como } H \text{ em (12 b), calcula}$$

se σ_{H0} . Conhecendo-se este valor σ_{H0} e ψ (isto é, ψ_2 ou ψ_{1p}), pode-se calcular em (12 a) acima os valores de σ (σ_2 ou σ_1).

Em última análise, repetindo as operações acima, pode-se calcular σ com qualquer aproximação desejada.

Na expressão (11) (pag. 74) o termo $\cos \psi_1$ é calculado por

$$(14) \quad \cos \psi_1 = \cos(\arctg \psi_1)$$

onde

$$u' + \frac{\gamma_1}{\sigma_1} m_1$$

$$(15) \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{u' + \frac{\gamma_1}{\sigma_1} m_1}{u' + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} (2a' - m_1)} \operatorname{tg} \psi_2$$

como foi justificado antes (pags. 68 e seguintes).

Nesta expressão (15) os valores numéricos dos têrmos $\frac{\gamma_1}{\sigma_1}$ e $\frac{\gamma_2}{\sigma_2}$ podem ser obtidos por interpolação gráfica no ábaco B' , (fig. 19) (pag. 64), em função de

$$s_1 = \frac{m_1}{c'} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \psi_1 \quad \text{para} \quad \frac{\gamma_1}{\sigma_1} \quad \text{e de}$$

$$s_2 = \frac{2a' - m_1}{c'} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \psi_2 \quad \text{para} \quad \frac{\gamma_2}{\sigma_2}$$

Para simbolizar a função $\frac{\gamma}{\sigma}$, representada no ábaco B' indicamos

$$(16) \quad \frac{\gamma_1}{\sigma_1} = \frac{\gamma}{\sigma} \left(\frac{m_1}{c'}, \operatorname{tg} \psi_1 \right)$$

$$(17) \quad \frac{\gamma_2}{\sigma_2} = \frac{\gamma}{\sigma} \left(\frac{2a' - m_1}{c'}, \operatorname{tg} \psi_2 \right)$$

NOTA - Os têrmos σ (isto é, σ_1 ou σ_2) como já vimos (pag. 75) podem ser calculados diretamente.

Os têrmos γ (isto é, γ_1 ou γ_2) podem ser calculados diretamente pela expressão (25) da página 34, a saber :

$$(16 \text{ a}) \quad \gamma = \sigma - 2(q - 1) \frac{\sin \psi}{H}$$

onde σ e H (isto é, $H_1 = \frac{h_1}{c'}$ e $H_2 = \frac{h_2}{c'}$) podem ser calculados diretamente como foi indicado (pag. 75) e q (isto é, q_1 ou q_2) pode ser calculado pela expressão (14) da página 31 a saber :

$$(16 \text{ b}) \quad q = \left(\frac{H^2}{4} + S_{H0}^{-2} \right)^{1/2} \quad \text{com } H \text{ já}$$

obtido acima e

$$S_{H0}^{-2} = \sigma_{H0}^{-2} = \left(1 + \frac{H^2}{24} + \frac{H^4}{1920} + \frac{H^6}{322560} + \dots \right)^{-2}$$

conforme a (12") da página 29.

O termo c' das expressões (12), (13), (13 a), (16) e (17) escritas acima pode ser calculado pela expressão

$$(18) \quad c' = \frac{u' + \frac{\gamma_2}{\sigma_2^2}(2a' - m_1)}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

já justificada (pags. 61 e seguintes) com aplicação em exemplos numéricos. Calcula-se, inicialmente, o valor parabólico

$$(18') \quad c'_p = \frac{u' + (2a' - m_1)}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

fazendo na (18) $\frac{\gamma_2}{\sigma_2^2} = 1$. A partir desse valor, pode-se obter c' com qualquer aproximação desejada.

O termo u' das expressões (15), (18) e (18') é obtido numéricamente por

$$(19) \quad u' = u - e \quad \text{em milímetros tal como indicámos nos dois exemplos numéricos estudados a páginas 64 e seguintes. Ai}$$

$$(19 \text{ a}) \quad u = \frac{p}{p} \quad \text{e} \quad (19 \text{ b}) \quad e = \frac{p'}{p}$$

sendo :

P o peso em gramas do indicador de leituras suspenso no ponto M (fig. 18);

p o peso em gramas por milímetro do padrão de comprimento $2a'$;

p' o dôbro do peso excedente de cada um dos ganchos com os respectivos esticadores intermediários, que suspendem esse padrão em suas extremidades A e B (fig. 18).

Resta, ainda, considerar o valor numérico não indicado do ângulo Ψ_2 que figura em expressões citadas para o cálculo, a saber : (8), (10), (13), (15), (17), (18) e (18'), valor que deixamos propositadamente para interpretar neste final.

O valor do ângulo $|\Psi_2| < 90^\circ$, que geralmente é próximo de α procurado, é o único termo arbitrário que há a introduzir quando se tem em vista calcular cada valor isolado de K_1 e de $\operatorname{sen}\alpha$ com as fórmulas aqui reunidas para cada leitura real m_1 , tal como foi proposto inicialmente (pag. 73).

Desta maneira se conclue :

1º) adotando valores numéricos para Ψ_2 pode-se obter valores correspondentes de K_1 e de $\operatorname{sen}\alpha$, para cada leitura real m_1 , suposta indicada num NIVELDIASTÍMETRO padrão do tipo estudado.

2º) fazendo m_1 e Ψ_2 variar com pequenos intervalos finitos (sendo $0 < m_1 < 2a'$ e adotando $|\Psi_2| < 90^\circ$ entre limites convenientes usuais) pode-se construir por interpolação gráfica as curvas isométricas de $\operatorname{sen}\alpha$ em um gráfico cartesiano ortogonal em que as abscissas representam as leituras reais m_1 e as ordenadas as correções K_1 (Ver figs. 7 e 21).

3. EXEMPLOS NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS

As características constantes do protótipo dos NIVELDIAS TIMETROS são as seguintes :

padrão de comprimento : $2a' = 9500,00 \text{ mm}$;

pêso do indicador de leituras suspenso e mais o trecho ($\underline{m_m}_d$, fig. 4) da fita métrica que êle abrange :

$$P = 439,080 + 6,159 = 445,239 \text{ grf};$$

pêso unitário do padrão de comprimento :

$$p = 0,012318 \text{ grf/mm};$$

o dôbro do peso excedente de cada um dos ganchos com os respectivos esticadores intermediários que suspendem o padrão pelas suas extremidades : $p' = 2(2,919) \text{ grf}$.

Examinemos dois exemplos numéricos com os seguintes dados :

$$\underline{m}_1 = 4321,9 \text{ mm} \quad \text{e} \quad \underline{m}'_1 = 2093,4 \text{ mm}$$

com

$$\psi_2 = 12^\circ 57' 56'' \quad (\text{divisão sexagesimal});$$

TRATA-SE DE CALCULAR :

K_1 e $\text{sen}\alpha$ (ou α) com \underline{m}_1 e ψ_2

e

K'_1 e $\text{sen}\alpha'$ (ou α') com \underline{m}'_1 e o mesmo ψ_2 acima, sendo K_1 e K'_1 em milímetros.

Utilizam-se, para isso, as fórmulas numeradas antes desde (1), (2), ..., até (19), (19 a) e (19 b) (pags. 73 e seguintes) começando pelas últimas, prosseguindo em sentido inverso, pelas intermediárias, até as primeiras.

É o que passamos a discriminar.

Com \underline{m}_1 e ψ_2

: Com \underline{m}'_1 e o mesmo ψ_2

$$\text{Pela (19 b)} : e = \frac{2(2,919) \text{ grf}}{0,012318 \text{ grf/mm}} = 473,9 \text{ mm}$$

$$\text{Pela (19 a)} : u = \frac{445,239 \text{ grf}}{0,012318 \text{ grf/mm}} = 36145,3 \text{ mm}$$

$$\text{Pela (19)} : u' = 36145,3 - 473,9 = 35671,4 \text{ mm}$$

Pela (18') :

$$c'_p = \frac{35671,4 + 5178,1}{2(0,230235)} = 88712,6 \text{ mm}$$

$$c''_p = \frac{35671,4 + 7406,6}{2(0,230235)} = 93552,2 \text{ mm}$$

Pelo gráfico B' (fig. 19) da função $\frac{\gamma_2}{\sigma_2}$ simbolizada na (17), (pag. 76) com

$$\frac{2a' - m_1}{c'_p} = 0,05837$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = 0,230235$$

$$\frac{\gamma_2}{\sigma_2} = 0,99785$$

$$\frac{2a' - m_1}{c''_p} = 0,07917$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = 0,230235$$

$$\frac{\gamma_2'}{\sigma_2'} = 0,99715$$

Pela (18) (pag. 77) :

$$c' = \frac{35671,4 + 0,99785(5178,1)}{2(0,230235)} =$$

$$= 88688,4 \text{ mm}$$

$$c'' = \frac{35671,4 + 0,99715(7406,6)}{2(0,230235)} =$$

$$= 93506,4 \text{ mm}$$

Pela (15) (pag. 76), fazendo inicialmente $\frac{\gamma_1}{\sigma_1} = \frac{\gamma_2}{\sigma_2} = 1$

$$\operatorname{tg} \psi_{1p} = \frac{35671,4 + 4321,9}{35671,4 + 5178,1} 0,230235 =$$

$$= 0,225409$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1p}' = \frac{35671,4 + 2093,4}{35671,4 + 7406,6} 0,230235 =$$

$$= 0,201838$$

Pelo gráfico (fig. 19) da função $\frac{\gamma_1}{\sigma_1}$ simbolizada na (16) (pag. 76), com

$$\frac{m_1}{c'} = 0,04873$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1p} = 0,225409$$

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} = 0,99820$$

$$\frac{m_1'}{c''} = 0,02239$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1p}' = 0,201838$$

$$\frac{\gamma_1'}{\sigma_1'} = 0,99927$$

Pela (15) (pag. 76) :

$$\operatorname{tg} \psi_1 =$$

$$= \frac{35671,4 + 0,99820(4321,9)}{35671,4 + 0,99785(5178,1)} 0,230235 =$$

$$= 0,225427$$

$$\operatorname{tg} \psi_1' =$$

$$= \frac{35671,4 + 0,99927(2093,4)}{35671,4 + 0,99715(7406,6)} 0,230235 =$$

$$= 0,201929$$

Pela (14) (pag. 76) :

$$\cos \psi_1 = 0,975521$$

$$\cos \psi_1' = 0,980216$$

Pelo gráfico A' (fig. 20) da função σ simbolizada nas (12) e (13) (pag. 75), com

$$\frac{m_1}{c'} = 0,04873 \text{ e } \operatorname{tg} \psi_1 = 0,225427$$

$$\sigma_1 = 1,00009$$

$$\frac{2a' - m_1}{c'} = 0,05839 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = 0,230235$$

$$\sigma_2 = 1,00014$$

$$\frac{m_1'}{c''} = 0,02239 \text{ e } \operatorname{tg} \psi_1' = 0,201929$$

$$\sigma_1' = 1,00004$$

$$\frac{2a' - m_1}{c''} = 0,07921 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \psi_2' = 0,230235$$

$$\sigma_2' = 1,00026$$

NOTA - Os termos σ , γ e $\frac{\gamma}{\sigma}$ podem ser obtidos pelo cálculo numérico direto, como foi explicado em NOTAS a páginas 75 e 77 e como vamos exemplificar a seguir.

Fazendo em (10) e (11) (pag. 74) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$:

$$h_{2p} = 5178,1(0,974505) = 5046,08 \quad : \quad h_{2p}' = 7406,6(0,974505) = 7217,77$$

$$h_{1p} = 4321,9(0,975524) = 4216,12 \quad : \quad h_{1p}' = 2093,4(0,980233) = 2052,02$$

Pela (13 a) no caso parabólico, isto é, $H_p = \frac{h}{c_p}$:

$$H_{2p} = \frac{5046,08}{88712,6} = 0,056881 \quad : \quad H_{2p}' = \frac{7217,77}{93552,2} = 0,077152$$

$$H_{1p} = \frac{4216,12}{88712,6} = 0,047526 \quad : \quad H_{1p}' = \frac{2052,02}{93552,2} = 0,021934$$

Pela (12 b) (pag. 75) :

$$\sigma_{H_{2p}0} = 1 + \frac{0,056881^2}{24} + \frac{0,056881^4}{1920} + \dots \quad : \quad \sigma_{H_{2p}0}' = 1 + \frac{0,077152^2}{24} + \frac{0,077152^4}{1920} + \dots$$

$$= 1,000135 \quad : \quad = 1,000248$$

$$\sigma_{H_{1p}0} = 1 + \frac{0,047526^2}{24} + \frac{0,047526^4}{1920} + \dots \quad : \quad \sigma_{H_{1p}0}' = 1 + \frac{0,021934^2}{24} + \frac{0,021934^4}{1920} + \dots$$

$$= 1,000094 \quad : \quad = 1,000020$$

Pela (12 a) (pag. 75) já se obtém σ com grande aproximação :

$$\sigma_2 =$$

$$[\frac{0,230235^2 + 1,000135^2}{0,974505}]^{1/2}$$

$$= 1,000127$$

$$\sigma'_2 =$$

$$[\frac{0,230235^2 + 1,000248^2}{0,974505}]^{1/2}$$

$$= 1,000236$$

$$\sigma_1 =$$

$$[\frac{0,225409^2 + 1,000094^2}{0,975524}]^{1/2}$$

$$= 1,000090$$

$$\sigma'_1 =$$

$$[\frac{0,201838^2 + 1,000020^2}{0,980233}]^{1/2}$$

$$= 1,000020$$

Assim, em principio, repetindo-se as operações pode-se obter o erro da aproximação anterior e chegar a qualquer aproximação desejada.

De maneira semelhante pode-se calcular numéricamente $\frac{v}{\sigma}$, como foi sugerido em NOTA à página 77.

Comparando a aproximação do cálculo numérico direto com a obtida por meio dos gráficos A' e B' (figs. 20 e 19), verifica-se que esta é compatível com a aproximação das experiências feitas com o NIVELDIASTIMETRO estudado (protótipo).

Pelas expressões (10) e (11), com os σ obtidos pelo gráfico A' (fig. 20) :

$$h_2 = \frac{5178,1(0,974505)}{1,00014} = 5045,37 \text{ mm}$$

$$h'_2 = \frac{7406,6(0,974505)}{1,00026} = 7215,89 \text{ mm}$$

$$h_1 = \frac{4321,9(0,975521)}{1,00009} = 4215,72 \text{ mm}$$

$$h'_1 = \frac{2093,4(0,980216)}{1,00004} = 2051,90 \text{ mm}$$

Pelas expressões (8) e (9) (pag. 74) :

$$v_2 = 5043,37(0,230235) = 1161,62 \text{ mm}$$

$$v'_2 = 7215,89(0,230235) = 1661,35 \text{ mm}$$

$$v_1 = 4215,72(0,225427) = 950,34 \text{ mm}$$

$$v'_1 = 2051,90(0,201929) = 414,34 \text{ mm}$$

Pelas expressões (7) e (6) (pag. 74) :

$$Y = 211,28 \text{ mm}$$

$$Y' = 1247,01 \text{ mm}$$

$$X' = 9261,09 \text{ mm}$$

$$X'' = 9267,79 \text{ mm}$$

Pela expressão (5) (pag. 74) :

$$\cos \alpha' = \frac{9261,09}{9500,00} = 0,974852 \quad \cos \alpha'' = \frac{9267,79}{9500,00} = 0,975557$$

Pela expressão (4) (pag. 74) :

$$\sin \alpha' = 0,222853 \quad \sin \alpha'' = 0,219747$$

Pela (3) (pag. 74) :

$$m = 4750,00 - \frac{211,28}{2(0,222853)} = \quad m' = 4750,00 - \frac{1247,01}{2(0,219747)} = \\ = 4275,97 \text{ mm.} \quad = 1912,62 \text{ mm}$$

Pela (2) (pag. 74) :

$$\Delta m_1 = 4275,97 - 4321,90 = -45,93 \text{ mm} \quad \Delta m'_1 = 1912,62 - 2093,40 = -180,78 \text{ mm}$$

Finalmente, pela expressão (1) (pag. 73) :

$$K_1 = -45,93(0,222853) = \underline{-10,2 \text{ mm}} \quad K'_1 = -180,78(0,219747) = \underline{-39,7 \text{ mm}}$$

NOTA - Pelo gráfico experimental (fig. 7) :

$$\text{Com } m_1 = 4321,9$$

e

$$\sin \alpha = 0,222853 :$$

$$K_{1e} \approx \underline{-9,9 \text{ mm}}$$

$$\text{êrro : } K_{1e} - K_1 \approx +0,3 \text{ mm}$$

$$\text{Com } m'_1 = 2093,4$$

e

$$\sin \alpha' = 0,219747 :$$

$$K'_{1e} \approx \underline{-40,1 \text{ mm}}$$

$$\text{êrro : } K'_{1e} - K'_1 \approx -0,4 \text{ mm}$$

Verifica-se, assim, nestes dois exemplos que o êrro ou diferença entre os resultados experimentais K_{1e} e K'_{1e} e os teóricos K_1 e K'_1 estão dentro da ordem de grandeza dos êrros acidentais verificados experimentalmente e que foram em X : $e_x \approx \pm 0,9 \text{ mm}$ e em Y : $e_y \approx \pm 1,3 \text{ mm}$ (Ver primeira tese : NIVELDIASTIMETRO, pags. 38 e 39, op. cit. na Bibliografia).

Examinemos agora dois exemplos numéricos com leituras su postas próximas de uma extremidade da fita métrica, a saber :

$$m_1 = 500,0 \text{ mm} \quad m_1' = 100,0 \text{ mm} \quad \Psi_2 = \text{arc sen} 0,17$$

para mostrar numéricamente que nessas proximidades os valores de K passam de negativo para positivo tal como está representado no gráfico da figura 21.

Com

$$m_1 = 500,0 \text{ mm e}$$

$$\Psi_2 = \text{arc sen} 0,17 :$$

Com

$$m_1' = 100,0 \text{ mm e o mesmo}$$

$$\Psi_2 :$$

Pelas (19 b), (19 a) e (19) já se obteve antes (pag. 79)
 $u' = 35671,4 \text{ mm}$

A seguir, pela (18') (pag. 77) :

$$\begin{aligned} c'_p &= \frac{35671,4 + (9500,0 - 500,0)}{2(0,172511)} = & c''_p &= \frac{35671,4 + (9500,0 - 100,0)}{2(0,172511)} = \\ &= 129474,1 \text{ mm} & &= 130633,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pelo mesmo gráfico B' (fig. 19) da função $\frac{r_2}{\sigma_2}$ simbolizada na (17) (pag. 76), com

$$\frac{2a' - m_1}{c'_p} = 0,06951$$

e

$$\tg \Psi_2 = 0,172511$$

$$\frac{2a' - m_1'}{c''_p} = 0,07196$$

e

$$\tg \Psi_2 = 0,172511$$

$$\frac{r_2}{\sigma_2} = 0,99805$$

$$\frac{r_2'}{\sigma_2'} = 0,99798$$

Pela (18) (pag. 77) :

$$\begin{aligned} c' &= \frac{35671,4 + 0,99805(9000,0)}{0,345022} = & c'' &= \frac{35671,4 + 0,99798(9400,0)}{0,345022} = \\ &= 129423,1 \text{ mm} & &= 130578,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pela (15) (pag. 76), fazendo inicialmente $\frac{r_1}{\sigma_1} = \frac{r_2}{\sigma_2} = 1$:

$$\tg \Psi_{1p} =$$

$$= \frac{35671,4 + 500,0}{35671,4 + 9000,0} 0,172511 =$$

$$= 0,139686$$

$$\tg \Psi'_{1p} =$$

$$= \frac{35671,4 + 100,0}{35671,4 + 9400,0} 0,172511 =$$

$$= 0,136915$$

Pelo gráfico (fig. 19) da função $\frac{\gamma_1}{\sigma_1}$ simbolizada na (16) (pag. 76), com

$$\frac{m_1}{c'} = 0,003863 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{1p} = 0,139686$$

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} = 0,99990$$

Pela (15) (pag. 76) :

$$\operatorname{tg} \Psi_1 =$$

$$\frac{35671,4+0,99990(500,0)}{35671,4+0,99805(9000,0)} 0,172511 =$$

$$= 0,139737$$

$$\frac{m_1'}{c''} = 0,000766 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{1p}' = 0,136915$$

$$\frac{\gamma_1'}{\sigma_1'} = 0,99995$$

$$\operatorname{tg} \Psi_1' =$$

$$\frac{35671,4+0,99995(100,0)}{35671,4+0,99798(9400,0)} 0,172511 =$$

$$= 0,136590$$

Pela (14) (pag. 76) :

$$\cos \Psi_1 = 0,990377$$

$$\Psi_1 = 7^\circ 57' 17''$$

$$\cos \Psi_1' = 0,990800$$

$$\Psi_1' = 7^\circ 46' 40''$$

Pelo gráfico A' (fig. 20) da função σ simbolizada nas (12) e (13) (pag. 75), com

$$\frac{m_1}{c'} = 0,003863 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_1 = 0,139737$$

$$\sigma_1 = 1,00001$$

$$\frac{2a' - m_1}{c'} = 0,06954 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_2 = 0,172511$$

$$\sigma_2 = 1,00021$$

$$\frac{m_1'}{c''} = 0,000766 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_1' = 0,136590$$

$$\sigma_1' = 1,00000$$

$$\frac{2a' - m_1'}{c''} = 0,07199 \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} \Psi_2' = 0,172511$$

$$\sigma_2' = 1,00023$$

Pelas expressões (10) e (11) (pag. 74), com os σ obtidos pelo gráfico A' (fig. 20) :

$$h_2 = \frac{9000(0,985444)}{1,00021} = 8867,1 \text{ mm} \quad ; \quad h'_2 = \frac{9400,0(0,985444)}{1,00023} = 9261,0 \text{ mm}$$

$$h_1 = \frac{500(0,990377)}{1,00001} = 495,2 \text{ mm} \quad ; \quad h'_1 = \frac{100,0(0,990800)}{1,00000} = 99,1 \text{ mm}$$

Pelas expressões (8) e (9) (pag. 74) :

$$v_2 = 8867,1(0,172511) = 1529,7 \text{ mm} \quad ; \quad v'_2 = 9261,0(0,172511) = 1597,6 \text{ mm}$$

$$v_1 = 495,2(0,139737) = 69,2 \text{ mm} \quad ; \quad v'_1 = 99,1(0,136590) = 13,5 \text{ mm}$$

Pelas expressões (7) e (6) (pag. 74) :

$$Y = 1460,5 \text{ mm} \quad ; \quad Y' = 1584,1 \text{ mm}$$

$$X = 9362,3 \text{ mm} \quad ; \quad X' = 9360,1 \text{ mm}$$

Pela expressão (5) (pag. 74) :

$$\cos \alpha' = \frac{9362,3}{9500,0} = 0,985505 \quad ; \quad \cos \alpha'' = \frac{9360,1}{9500,0} = 0,985274$$

Pela (4) (pag. 74) :

$$\sin \alpha' = 0,169646 \quad ; \quad \sin \alpha'' = 0,170983$$

$$\alpha' = 9^\circ 46' 02'' \quad ; \quad \alpha'' = 9^\circ 50' 42''$$

Pela (3) (pag. 74) :

$$m = 4750,0 - \frac{1460,5}{2(0,169646)} = \quad ; \quad m' = 4750,0 - \frac{1584,1}{2(0,170983)} =$$

$$= 445,45 \text{ mm} \quad ; \quad = 117,67 \text{ mm}$$

Pela (2) (pag. 74) :

$$\Delta m_1 = 445,45 - 500,00 = -54,55 \text{ mm} \quad ; \quad \Delta m'_1 = 117,67 - 100,00 = +17,67 \text{ mm}$$

Finalmente, pela expressão (1) (pag. 73) :

$$K_1 = -54,55(0,169646) \approx -9,3 \text{ mm} \quad ; \quad K'_1 = +17,67(0,170983) \approx +3,0 \text{ mm}$$

Assim se verifica racionalmente que entre $m_1 = 500,0 \text{ mm}$ e $m'_1 = 100,0 \text{ mm}$, com $\Psi_2 = \arcsen 0,17$ o valor de K passa de $K_1 \approx -9,3 \text{ mm}$ para $K'_1 \approx +3,0 \text{ mm}$.

NOTA - Para a construção racional do gráfico (fig. 21)

nessas proximidades calculamos mais os seguintes pontos:

- 1) para $m_1 = 10,0\text{mm}$ com $\text{sen}\psi = 0,15$ resultou $K \approx + 6,0 \text{ mm}$
 - 2) " $m_1 = 10,0\text{mm}$ " $\text{sen}\psi = 0,17$ " $K \approx + 6,03 \text{ mm}$
 - 3) " $m_1 = 200,0\text{mm}$ " $\text{sen}\psi = 0,17$ " $K \approx - 0,48 \text{ mm}$
 - 4) " $m_1 = 10,0\text{mm}$ " $\text{sen}\psi = 0,27$ " $K \approx + 8,51 \text{ mm}$
-

4. COMPARAÇÃO DOS DOIS GRÁFICOS, O EXPERIMENTAL E O RACIONAL

Comparando os dois gráficos representativos das correções (K_1), o experimental representado na figura 7 e o racional representado na figura 21, verifica-se visualmente a identidade na forma geral das curvas isométricas de $\text{sen}\psi$, notando-se que todas elas têm ordenada nula nos pontos de abcissa 4750, e ordenadas variáveis passando cada uma delas por um mínimo (negativo) e um máximo (positivo) (Ver fig. 6).

Ver-se-á a seguir que o desvio médio e_K entre os (K_1) racionais, correspondentes a 140 pontos calculados numéricamente, como foi exemplificado antes (pags. 78 e seguintes) para a construção da figura 21, e os (K_{1e}) experimentais, obtidos no gráfico construído empiricamente (fig. 7) é de

$$e_K = \sqrt{\frac{\sum(\epsilon_K)^2}{140}} = \sqrt{\frac{317,44}{140}} \approx \pm 1,5 \text{ mm}$$

Desprezando-se cerca de 12 desvios maiores que 3,0mm considerados como faltas ou erros grosseiros, encontramos para o desvio médio dos 128 pontos restantes o valor :

$$e_K = \sqrt{\frac{\sum(\epsilon_K)^2}{128}} = \sqrt{\frac{120,66}{128}} \approx \pm 0,97 \text{ mm}$$

Assim se verifica que a ordem de grandeza do desvio médio é compatível com os erros avaliados nas medidas de distâncias e diferença de nível exemplificadas na tese anterior onde encontramos em 49 exemplos de medidas realizadas, os erros médios :

nas distâncias $\varepsilon_x = \pm 0,9$ mm

nas diferenças de nível $\varepsilon_y = \pm 1,3$ mm

(Ver primeira tese NIVELDIASTÍMETRO, op. cit., pags. 38 e 39).

O gráfico experimental (fig. 7) foi construído com menos de 100 pontos obtidos empiricamente conforme já indicado (pags. 12 e seguintes), não tendo havido pontos de abcissa bastante próxima de zero e de 9500 .

Por este motivo não se pode ver nesse gráfico experimental (fig. 7) de que maneira terminam as curvas, o que nos levou ao pequeno descuido, na tese anterior, de fazer convergir todas elas para os pontos de abcissas zero e 9500 mm e que foi corrigido e está justificado racionalmente na tese atual.

De fato, pode-se ver nas curvas rationalmente traçadas (fig. 21), nos trechos extremos que têm abcissas próximas daqueles valores zero e 9500 mm, que elas convergem em pontos de abcissas cerca de 185 mm e 9315 mm, respectivamente.

No mesmo gráfico experimental (fig. 7) há pequenos trechos das curvas que foram traçados por extrapolação para interpretar a sua continuidade na ausência de pontos experimentais.

Por esse motivo, na comparação dos dois gráficos, encontram-se trechos em que as diferenças entre os (K_1) teóricos e os (K_{1e}) experimentais correspondentes a cada abcissa se elevam a valores um pouco superiores ao afastamento médio $\pm 1,5$ mm encontrado naqueles 140 pontos distribuídos, indiscriminadamente, na que se totalidade dos dois gráficos construídos.

O gráfico racional (fig. 21) foi construído com cerca de 150 pontos calculados conforme exemplificado antes (pags. 78 e seguintes).

Nas páginas 89 e seguintes se encontra uma lista dos elementos característicos de 140 pontos assim calculados e que nos permitiram avaliar o desvio $\varepsilon_K = 1,5$ mm referido antes.

Na coluna 0 (zero) figuram os números de ordem dos pontos dessa relação; na coluna 1 figuram as abcissas m_1 adotadas para cada ponto; na coluna 2 figuram os valores de $\sin \alpha$ correspondentes à respectiva abcissa; na coluna 3 figuram os valores (K_1) racionais das ordenadas calculadas; na coluna 4 figuram os valores (K_{1e}) experimentais dessas ordenadas, obtidas no gráfico experimental (fig. 7); e na coluna 5, os resíduos $\varepsilon_K = (K_1) - (K_{1e})$

Nessa relação de 140 valores, encontram-se fortuitamente, 58 resíduos ε_K com valores negativos, 68 resíduos ε_K com valores positivos e 14 resíduos nulos.

O fato de se encontrarem nessa relação vários grupos de desvios negativos e vários grupos de desvios positivos, acreditamos que decorre de havermos construído o gráfico experimental (fig. 7) procurando a continuidade das curvas com cerca de 90 a 100 pontos independentes, enquanto que as medidas de controle de distâncias e de diferenças de nível que serviram como termos de comparação foram em número limitado a cerca de uma dezena, tendo-se por isso realizado as operações com o aparelho (figs. 1 e 2) por séries, para obtenção daqueles 90 a 100 pontos, correspondendo cada série a uma só medida de controle executada com outros recursos independentemente do NIVELDIASTÍMETRO.

Assim se conclui, estatisticamente, que os resultados experimentais praticamente se identificam com os resultados racionais.

Eis a lista acima referida.

Nº de ordem	m_1	sen α	K_1	K_{1e}	ε_K
	0.	1.	2.	3.	4.
	mm		mm	mm	mm
1	289,5	0,15027	2,9	7,0	- 4,1
2	564,6	0,14951	9,8	14,0	- 4,2
3	845,1	0,14879	15,6	20,4	- 4,8
4	1107,3	0,14822	19,9	24,3	- 4,4
5	1361,7	0,14772	23,1	27,0	- 3,9
6	1612,7	0,14733	25,4	28,6	- 3,2
7	1855,4	0,14700	26,9	29,0	- 2,1
8	2093,4	0,14681	27,4	28,8	- 1,4
9	2326,6	0,14666	27,4	28,5	- 1,1
10	2561,7	0,14662	26,7	27,8	- 1,1
11	2789,1	0,14665	25,5	26,4	- 0,9
12	3011,6	0,14677	23,8	24,7	- 0,9
13	3239,0	0,14698	21,7	22,1	- 0,4
14	3455,8	0,14724	19,3	19,6	- 0,3
15	3673,8	0,14758	16,6	16,6	0
16	3889,6	0,14800	13,6	13,4	+ 0,2
17	4107,5	0,14850	10,4	10,0	+ 0,4
18	4321,9	0,14908	7,0	6,6	+ 0,4
19	4536,2	0,14972	3,6	3,1	+ 0,5
20	4755,0	0,15047	0,1	0,1	0
21	9210,5	0,21065	4,2	8,2	- 4,0
22	8935,4	0,20689	13,4	16,0	- 2,6

Nº de ordem	m_1	sen α	K_1	K_{1e}	ϵ_K	
					0.	1.
					mm	mm
23	8654,9	0,20319	20,8	23,6	-	2,8
24	8392,7	0,19997	26,2	29,0	-	2,8
25	8138,3	0,19690	30,2	32,5	-	2,3
26	7887,3	0,19408	32,7	34,7	-	2,0
27	7644,6	0,38292	34,1	35,6	-	1,5
28	7406,6	0,18903	34,5	35,7	-	1,2
29	7173,4	0,18677	34,1	34,8	-	0,7
30	6938,3	0,18461	33,0	33,7	-	0,7
31	6710,9	0,18264	31,2	31,8	-	0,6
32	6488,4	0,18081	28,9	29,8	-	0,9
33	6261,0	0,17906	26,1	26,7	-	0,6
34	6044,2	0,17752	23,0	23,4	-	0,4
35	5826,2	0,17604	19,6	19,7	-	0,1
36	5610,4	0,17472	16,0	15,8	+	0,2
37	5392,5	0,17350	12,1	11,7	+	0,4
38	5178,1	0,17239	8,1	7,7	+	0,4
39	4963,8	0,17138	4,0	3,8	+	0,2
40	4744,5	0,17067	0,1	0,1	0	0
41	9210,5	0,24688	5,4	8,8	-	3,4
42	8935,4	0,24303	16,0	17,0	-	1,0
43	8654,9	0,23834	24,5	25,7	-	1,2
44	8392,7	0,23457	30,7	32,2	-	1,5
45	8138,3	0,23110	35,1	36,8	-	1,7
46	7887,3	0,22782	38,1	39,0	-	0,9
47	7644,6	0,22481	39,6	40,1	-	0,5
48	7406,6	0,22201	40,1	40,2	-	0,1
49	7173,4	0,21940	39,6	39,7	-	0,1
50	6938,3	0,21691	38,3	38,1	+	0,2
51	6710,9	0,21463	36,2	36,1	+	0,1
52	6488,4	0,21253	33,6	33,5	+	0,1
53	3239,0	0,21051	30,3	30,2	+	0,1
54	6044,2	0,20873	26,7	26,6	+	0,1
55	5826,2	0,20702	22,8	22,7	+	0,1
56	5610,4	0,20548	18,5	18,1	+	0,4
57	5392,5	0,20401	14,0	13,7	+	0,3
58	5178,1	0,20272	9,4	9,0	+	0,4
59	4963,8	0,20151	4,7	4,3	+	0,4
60	4744,5	0,20041	0,1	0,1	0	0
61	289,5	0,20032	4,0	8,0	-	4,0
62	564,6	0,20361	13,2	16,0	-	2,8
63	845,1	0,20739	20,4	24,0	-	3,6
64	1107,3	0,21040	27,6	30,1	-	2,5
65	1361,7	0,21306	32,5	34,5	-	2,0
66	1612,7	0,21579	36,2	37,5	-	1,3
67	1855,4	0,21772	38,6	39,2	-	0,6
68	2093,4	0,21975	39,7	40,0	-	0,3
69	2326,6	0,22139	40,0	40,0	0	0
70	2561,7	0,22294	39,3	39,2	+	0,1

Nº de ordem	m_1	sen α	K_1	K_{le}	ε_K	
					0.	1.
					mm	mm
71	2789,1	0,19567	33,3	33,5	-	0,2
72	3011,6	0,19900	33,5	32,0	+	1,5
73	3239,0	0,20470	29,6	29,6	0	
74	3455,8	0,20801	28,0	26,5	+	1,5
75	3673,8	0,21276	23,3	23,0	+	0,3
76	3889,6	0,21662	19,4	18,9	+	0,5
77	4107,5	0,21970	15,0	14,4	+	0,6
78	4321,9	0,22242	9,9	9,6	+	0,3
79	4536,2	0,22568	5,2	4,6	+	0,6
80	4755,5	0,22844	0,3	0,3	0	
81	9210,5	0,28289	5,8	9,6	-	3,8
82	8935,4	0,27799	17,8	18,4	-	0,6
83	8654,9	0,27324	27,6	27,6	0	
84	8392,7	0,26896	34,8	34,7	+	0,1
85	8138,3	0,26501	39,9	39,8	+	0,1
86	7887,3	0,26139	43,2	43,1	+	0,1
87	7644,6	0,25795	45,0	44,8	+	0,2
88	7406,6	0,25479	45,5	44,9	+	0,6
89	7173,4	0,25187	44,9	44,1	+	0,8
90	6938,3	0,24905	43,4	42,6	+	0,8
91	6710,9	0,24648	41,0	40,3	+	0,7
92	6488,4	0,24414	38,0	37,7	+	0,3
93	6261,0	0,24186	34,3	34,0	+	0,3
94	6044,2	0,23984	30,3	29,7	+	0,6
95	5826,2	0,23793	25,8	25,1	+	0,7
96	5610,4	0,23618	21,0	20,2	+	0,8
97	5392,5	0,23454	15,9	15,2	+	0,7
98	5178,1	0,23305	10,6	10,0	+	0,6
99	4963,8	0,23171	5,3	5,0	+	0,3
100	4744,5	0,23047	0,1	0,1	0	
101	289,5	0,23025	4,8	8,2	-	3,4
102	564,6	0,22925	14,4	16,7	-	2,3
103	845,1	0,22816	23,1	24,9	-	1,8
104	1107,3	0,22728	29,7	31,6	-	1,9
105	1361,7	0,22667	34,1	36,0	-	1,9
106	1612,7	0,22611	37,4	38,9	-	1,5
107	1855,4	0,22558	39,8	40,5	-	0,7
108	2093,4	0,22528	40,6	40,8	-	0,2
109	2326,6	0,22508	40,5	40,5	0	
110	2561,7	0,22498	39,6	39,3	+	0,3
111	2789,1	0,22504	37,8	37,5	+	0,3
112	3011,6	0,22533	35,0	35,0	0	
113	3239,0	0,22561	31,9	31,8	+	0,1
114	3455,8	0,22597	28,4	28,2	+	0,2
115	3673,8	0,22631	24,6	24,1	+	0,5
116	3889,6	0,22683	20,7	19,6	+	1,1
117	4107,5	0,22763	15,4	14,8	+	0,6
118	4321,9	0,22847	10,5	9,8	+	0,7

Nº de ordem	m_1	sen α	K_L	K_{le}	ϵ_K			
			0.	1.	2.	3.	4.	5.
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
119	4536,2	0,22943	5,3	4,9	+ 0,4			
120	4755,0	0,23053	0,1	0,1	0			
121	289,5	0,27024	5,6	9,2	- 3,6			
122	564,6	0,26841	19,6	18,2	+ 1,4			
123	845,1	0,26753	28,1	27,0	+ 1,1			
124	1107,3	0,26662	35,1	34,6	+ 0,6			
125	1361,7	0,26594	40,0	40,0	0			
126	1612,7	0,26527	43,8	43,0	+ 0,1			
127	1855,4	0,26482	45,9	45,6	+ 0,3			
128	2093,4	0,26447	47,0	46,2	+ 0,8			
129	2326,6	0,26426	46,8	46,0	+ 0,8			
130	2561,7	0,26416	45,6	44,9	+ 0,7			
131	2789,1	0,26421	43,6	42,7	+ 0,9			
132	3011,6	0,26439	40,7	39,8	+ 0,9			
133	3239,0	0,26471	37,1	36,4	+ 0,7			
134	3455,8	0,26545	32,7	32,1	+ 0,6			
135	3673,8	0,26570	28,3	27,2	+ 1,1			
136	3889,6	0,26640	23,2	22,2	+ 1,0			
137	4107,5	0,26724	17,7	16,8	+ 0,9			
138	4321,9	0,26823	12,0	11,1	+ 0,9			
139	4536,2	0,26933	6,0	5,7	+ 0,3			
140	4755,5	0,27063	0,2	0,2	0			

F - UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PRINCIPAL PROBLEMA CONTIDO NO CASO REAL DO NIVELDIASTIMETRO ESTUDADO

1. O CAMINHO DA SOLUÇÃO. EXEMPLO

O problema foi focalizado à página 17.

A análise que temos feito permite agora indicar uma série de fórmulas que nos conduzem a uma solução numérica do problema.

A distância X e a diferença de nível Y procuradas (figs. 2 e 8) podem ser calculadas em última análise pelas expressões elementares (pag. 15)

$$(1) \quad X = 2a' \cos \alpha$$

$$(2) \quad Y = 2(a' - m_1) \operatorname{sen} \alpha - 2(K_L)$$

onde

$2a'$ é o padrão de comprimento, homogêneo, flexível, e de peso p grf/mm conhecido.

$$|\alpha| < 90^\circ$$

$$(3) \cos \alpha = \cos (\arcsen \alpha)$$

onde $\arcsen \alpha$ encerra a chave da solução aqui oferecida e pode ser obtido por aproximações sucessivas e indicadas pela sucessão de valores seguintes :

$$(4_0) \quad \text{sen } \alpha_0 = \frac{\frac{\Delta Y}{2}}{(m_1 - m'_1)}$$

$$(4_1) \quad \text{sen } \alpha_1 = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_0 - (K'_1)_0]}{m_1 - m'_1}$$

$$(4_2) \quad \text{sen } \alpha_2 = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_1 - (K'_1)_1]}{m_1 - m'_1}$$

,,.....

$$(4_n) \quad \text{sen } \alpha_n = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1)_{n-1} - (K'_1)_{n-1}]}{m_1 - m'_1}$$

onde $\text{sen } \alpha_n$ tende para $\text{sen } \alpha$ quando n cresce.

É o que já foi indicado nas soluções anteriores (Ver pags. 15 e 18), porém, agora, sem fazer uso de gráficos, como veremos em todo este subtítulo F.

NOTA - Este n de $\text{sen } \alpha_n$ não ultrapassa praticamente o valor 2 nas experiências que realizámos com o protótipo dos NIVELDIASTIMETROS

ΔY é o comprimento vertical, constante e conhecido (figs. 2 e 8).

m_1 e m'_1 são as duas leituras realizadas com o indicador de leituras suspenso e de peso P gramas.

Os pares de valores de K_1 e K'_1 em primeira aproximação, isto é, os valores indicados com $(K_1)_0$ e $(K'_1)_0$ na expressão (4₁)

de $\operatorname{sen} \alpha_1$, podem ser obtidos, como vimos (pags. 73 e seguintes e exemplo a pags. 78 e seguintes), a partir de valores m_1 e ψ_2 para $(K_1)_o$ e m'_1 e o mesmo ψ_2 para $(K'_1)_o$ onde m_1 e m'_1 são as leituras reais dadas, e, tomando, inicialmente, $\psi_2 = \alpha_0$ conhecido uma vez que se pode, pela (4_o), calcular

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\frac{\Delta Y}{2}}{m_1 - m'_1}$$

Por exemplo, partindo de duas leituras reais
 $m_1 = 4321,9$ mm $m'_1 = 2093,4$ mm e com $\Delta Y = 1000,0$ mm
pode-se obter pela (4_o) :

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{500}{4321,9 - 2093,4} = 0,22437$$

tomando o arco

$$\alpha_0 \approx 12^\circ 57' 56'' = \psi_2$$

obtivemos, da maneira indicada a páginas 79 e seguintes,

$$K_1 \approx -10,2 \text{ mm} = (K_1)_o$$

$$K'_1 \approx -39,7 \text{ mm} = (K'_1)_o \quad (\text{pag. 83})$$

pela expressão genérica

$$K = \Delta m \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

antes conhecida, isto é,

$$(5) \quad (K_1)_o = (\Delta m_1)_o \operatorname{sen} \alpha' = (-45,93) \operatorname{sen} \alpha'$$

e

$$(5') \quad (K'_1)_o = (\Delta m'_1)_o \operatorname{sen} \alpha'' = (-180,78) \operatorname{sen} \alpha''$$

onde $\operatorname{sen} \alpha'$ e $\operatorname{sen} \alpha''$ são valores mais próximos de $\operatorname{sen} \alpha$ do que $\operatorname{sen} \alpha_0$ e têm significados já esclarecidos (pag. 83), uma vez que partimos de $\operatorname{sen} \alpha_0 = \operatorname{sen} \psi_2$ como um valor inicial aproximado.

Porém, uma vez que α deve ser único (V. fig. 4), teremos em segunda aproximação, pela (4₁) :

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{500,0 - [(-10,2) - (-39,7)]}{4321,9 - 2093,4} = 0,211133$$

com diferença da ordem de $\operatorname{sen} \alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_0 = 0,21113 - 0,22437 =$

- - 0,01324 .

Substituindo em (5) e (5') acima, $\sin \alpha'$ e $\sin \alpha''$ por $\sin \alpha_1$ assim calculado, e tendo os valores de $(\Delta m_1)_0 = - 45,93 \text{ mm}$ e $(\Delta m'_1)_0 = - 180,78 \text{ mm}$ obtido antes, resulta :

$$(6) \quad (k_1)_1 = (\Delta m_1)_0 \sin \alpha_1 = - 9,7 \text{ mm}$$

$$(6') \quad (k'_1)_1 = (\Delta m'_1)_0 \sin \alpha_1 = - 38,2 \text{ mm}$$

Com estes valores na expressão (4₂) da página 93, obtemos nova aproximação :

$$\sin \alpha_2 = \frac{500,0 - [(-9,7) - (-38,2)]}{4321,9 - 2093,4} = 0,211591$$

com diferença da ordem de $\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = 0,21159 - 0,21113 = 0,00046$.

Substituindo em (6) e (6') acima $\sin \alpha_1$ por $\sin \alpha_2$ assim calculado e empregando os mesmos valores $(\Delta m_1)_0 = - 45,93 \text{ mm}$ e $(\Delta m'_1)_0 = - 180,78 \text{ mm}$ obtidos antes, resulta :

$$(7) \quad (k_1)_2 = (\Delta m_1)_0 \sin \alpha_2 = - 9,7 \text{ mm}$$

$$(7') \quad (k'_1)_2 = (\Delta m'_1)_0 \sin \alpha_2 = - 38,3 \text{ mm}$$

Com estes valores na expressão (4₃) da sucessão indicada à página 93, obtemos

$$\sin \alpha_3 = \frac{500,0 - [(-9,7) - (-38,3)]}{4321,9 - 2093,4} = 0,21153$$

com diferença da ordem de $\sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 = 0,21153 - 0,21159 = - 0,00006$ desprezável.

Com efeito, pelo gráfico experimental obtivemos $(k_1) = - 9,2 \text{ mm}$ e $(k'_1) = - 38,5 \text{ mm}$ que diferem dos valores calculados numéricamente de $|0,5| \text{ mm}$ e $|0,2| \text{ mm}$, respectivamente, quantidades da ordem dos erros acidentais.

Prosseguindo na solução, podemos agora empregar a expressão (3) da página 93, onde $\sin \alpha_3 \approx \sin \alpha = 0,21153$ calculado por último, permite obter :

$$\alpha = 12^\circ 12' 43'' \quad \text{e} \quad \cos \alpha = 0,97737182 . \quad \text{Assim pe-}$$

las (1) e (2) da página 92 :

$$X = 9500,0 (0,97737) = 9285,03 \text{ mm}$$

$$Y = 2(4750,0 - 4321,9) 0,21153 - 2(-9,7) = 200,5 \text{ mm}$$

Por outro lado havíamos encontrado pela medida realizada com outros recursos, independentemente do NIVELDIASTIMETRO, os valores

$$X = 9285,5 \text{ mm}$$

$$Y = 200,0 \text{ mm}$$

que diferem dos calculados numéricamente pela teoria, respectivamente, de 0,5 mm e - 0,5 mm, dentro dos limites dos erros acidentais antes constatados.

2. A COMPONENTE HORIZONTAL DA TENSÃO NA FITA MÉTRICA

A componente horizontal da tensão em todos os pontos dos dois arcos \widehat{MA} e \widehat{MB} de catenárias (fig. 18) deve ter um só valor, por uma questão de equilíbrio (Ver pags. 18 e seguintes) que é representado pelo parâmetro comum desses arcos.

A determinação desse valor que vamos estudar, permite, além do mais, controlar os resultados da solução do problema em questão.

Comparemos o resultado X obtido acima pela expressão (1) da página 92

$$X = 2a' \cos \alpha$$

($X = 9285,03 \text{ mm}$ no exemplo dado), com o valor obtido em primeira aproximação, por

$$(8) \quad X'_0 = h_{01} + h_{02}$$

de acordo com a expressão (6) da página 74 em que

$$(9) \quad h_{02} = \frac{(2a' - m_1) \cos \psi_{02}}{\sigma_2}$$

e

$$(10) \quad h_{01} = \frac{m_1 \cos \psi_{01}}{\sigma_1}$$

foram referidos com os números (10) e (11) à mesma página 74.

Nos exemplos dados, página 82 :

$$\text{Para } \underline{m}_1 = 4321,9 \text{ mm}$$

$$h_{o2} = 5045,37 \text{ mm}$$

$$h_{ol} = 4215,72 \text{ mm}$$

$$X'_o = 9261,09$$

$$\text{Para } \underline{m}'_1 = 2093,4 \text{ mm}$$

$$h'_{o2} = 7215,89 \text{ mm}$$

$$h'_{ol} = 2051,90 \text{ mm}$$

$$X''_o = 9267,79 \text{ mm}$$

Chamemos

$$(11) \quad \Delta X = X - X'_o$$

a diferença do valor X achado pela expressão (1) para o valor X'_o achado pela expressão (8) e vamos corrigir as parcelas h_{o2} e h_{ol} com as pequenas quantidades Δh_2 e Δh_1 , respectivamente, para se ter

$$(12) \quad h_2 = h_{o2} + \Delta h_2$$

$$(13) \quad h_1 = h_{ol} + \Delta h_1$$

de modo que

$$(14) \quad \Delta h_2 = \frac{\Delta X}{X'_o} h_{o2}$$

$$(15) \quad \Delta h_1 = \frac{\Delta X}{X'_o} h_{ol}$$

sejam partes de ΔX proporcionais a h_2 e h_1 , respectivamente.

Assim, no exemplo numérico :

$$\text{Com } \underline{m}_1 = 4321,9 \text{ mm}$$

$$\text{Com } \underline{m}'_1 = 2093,4 \text{ mm}$$

Pela expressão (11) :

$$\Delta X' = 9285,03 - 9261,09 = 23,94 \text{ mm} \quad \therefore \Delta X'' = 9285,03 - 9267,79 = 17,24 \text{ mm}$$

Pelas expressões (14) e (15) :

$$\Delta h_2 = \frac{23,94}{9261,09} 5045,37 = 13,04 \text{ mm}$$

$$\Delta h'_2 = \frac{17,24}{9267,79} 7215,89 = 13,42 \text{ mm}$$

$$\Delta h_1 = \frac{23,94}{9261,09} 4215,72 = 10,90 \text{ mm}$$

$$\Delta h'_1 = \frac{17,24}{9267,79} 2051,90 = 3,82 \text{ mm}$$

Confere

$$\Delta X' = \Delta h_2 + \Delta h_1 = 23,94 \text{ mm}$$

Confere

$$\Delta X'' = \Delta h'_2 + \Delta h'_1 = 17,24 \text{ mm}$$

Pelas expressões (12) e (13) :

$$\begin{array}{l}
 h_2 = 5045,37 + 13,04 = 5058,41 \text{ mm} \quad ; \quad h_2' = 7215,89 + 13,42 = 7229,31 \text{ mm} \\
 h_1 = 4215,72 + 10,90 = 4226,62 \text{ mm} \quad ; \quad h_1' = 2051,90 + 3,82 = 2055,72 \text{ mm} \\
 \text{Confere} \qquad \qquad \qquad \text{Confere} \\
 X = h_2 + h_1 = 9285,03 \text{ mm} \quad ; \quad X = h_2' + h_1' = 9285,03 \text{ mm}
 \end{array}$$

Comparemos o resultado $Y = 200,5$ mm obtido à página 96
pela expressão (2) da página 92

$$Y = 2(a' - m_1) \sin \alpha - 2(K_1)$$

com o valor obtido em primeira aproximação, por

$$(16) \quad Y_0 = v_{02} - v_{01}$$

e dado pela expressão (7) da página 74 em que

$$(17) \quad v_{o2} = h_{o2} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{o2}$$

$$(18) \quad v_{ol} = h_{ol} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{ol}$$

foram referidos com os números (8) e (9) na mesma página 74.

Nos exemplos dados à página 82 :

Com m = 4321,9 mm

$$v_{02} = 1161,62 \text{ mm}$$

$$v_{91} = 950,34 \text{ mm}$$

$$Y_0 = 211,28 \text{ mm}$$

$$\underline{\text{Com}} \quad \underline{m'_1} = \underline{2093,4 \text{ mm}}$$

$$v'_{o2} = 1661,35 \text{ mm}$$

$$v'_{ol} = 414,34 \text{ mm}$$

$Y_9' = 1247,01 \text{ mm}$

Chamemos

$$(19) \quad \Delta Y^i = Y - Y_0$$

a diferença do valor Y achado pela expressão (2) para o valor Y_0 achado pela expressão (16).

Vamos corrigir as parcelas v_{02} e v_{01} com as pequenas quantidades Δv_2 e Δv_1 , respectivamente, para se ter

$$(20) \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{02} + \Delta \mathbf{v}_2$$

$$(21) \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{01} + \Delta \mathbf{v}_1$$

de modo que

$$(22) \quad \Delta v_2 = \frac{\Delta Y'}{Y_0} v_{02}$$

$$(23) \quad \Delta v_1 = \frac{\Delta Y'}{Y_o} v_{ol}$$

sejam partes de $\Delta Y'$ proporcionais a v_2 e v_1 , respectivamente.

Assim, no exemplo numérico :

$$\text{Com } m_1 = 4321,9 \text{ mm}$$

$$\text{Com } m_1' = 2093,4 \text{ mm}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{NOTA} - \quad Y' = Y + \Delta Y &= \\ &= 200,5 + 1000,0 = 1200,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pela expressão (19) :

$$\Delta Y' = 200,50 - 211,28 = -10,78 \text{ mm.}$$

$$\therefore \Delta Y'' = 1200,50 - 1247,01 = -46,51 \text{ mm}$$

Pelas expressões (22) e (23) :

$$\Delta v_2 = \frac{-10,78}{211,28} 1161,62 = -59,27 \text{ mm}$$

$$\therefore \Delta v_2' = \frac{-46,51}{1247,01} 1661,35 = -61,96 \text{ mm}$$

$$\Delta v_1 = \frac{-10,78}{211,28} 950,34 = -48,49 \text{ mm}$$

$$\therefore \Delta v_1' = \frac{-46,51}{1247,01} 414,34 = -15,45 \text{ mm}$$

Confere

Confere

$$\Delta Y' = \Delta v_2 - \Delta v_1 = -10,78 \text{ mm.}$$

$$\therefore \Delta Y' = \Delta v_2' - \Delta v_1' = -46,51 \text{ mm}$$

Pelas expressões (20) e (21) :

$$v_2 = 1161,62 - 59,27 = 1102,35 \text{ mm}$$

$$\therefore v_2' = 1661,35 - 61,96 = 1599,39 \text{ mm}$$

$$v_1 = 950,34 - 48,49 = 901,85 \text{ mm}$$

$$\therefore v_1' = 414,34 - 15,45 = 398,89 \text{ mm}$$

Confere

Confere

$$Y = v_2 - v_1 = 200,50 \text{ mm}$$

$$\therefore Y' = v_2' - v_1' = 1200,50 \text{ mm}$$

Substituindo nas expressões (17) e (18) os termos v_{o2} e v_{ol} por v_2 e v_1 calculados pelas expressões (20) e (21), e os termos h_{o2} e h_{ol} por h_2 e h_1 calculados pelas (12) e (13), resulta que Ψ_{o2} e Ψ_{ol} passam a ser Ψ_2 e Ψ_1 . Assim se pode escrever :

$$(24) \quad \operatorname{tg} \Psi_2 = \frac{v_2}{h_2}$$

$$(25) \quad \operatorname{tg} \Psi_1 = \frac{v_1}{h_1}$$

Com os resultados dos exemplos numéricos da página 98 e

e da página anterior, 99 :

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{1102,35}{5058,41} = 0,2179242$$

$$\operatorname{tg} \psi'_2 = \frac{1599,39}{7229,31} = 0,2212369$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{901,85}{4226,62} = 0,2133738$$

$$\operatorname{tg} \psi'_1 = \frac{398,89}{2055,72} = 0,1940391$$

Uma vez obtidas $\operatorname{tg} \psi_2$ e $\operatorname{tg} \psi_1$ pelas (24) e (25), pode-se calcular numéricamente dois valores c_2 e c_1 para o parâmetro c comum aos dois arcos de catenária (arcos \overline{MA} e \overline{MB} , fig. 18) pela expressão (9) da página 63 ou (9') da página 66 que aqui se adapta, a seguir, para uma das leituras m_1 (ou m'_1) do aparelho:

$$(26) \quad c_2 = \frac{u' + \frac{\gamma_2}{\sigma_2^2} (2a' - m_1)}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

$$(27) \quad c_1 = \frac{u' + \frac{\gamma_1}{\sigma_1^2} (m_1)}{2 \operatorname{tg} \psi_1}$$

Como se sabe (Ver exemplo à página 64), o cálculo numérico destas expressões se faz em duas etapas. Primeiro, admitindo os arcos de catenária como arcos parabólicos e assim

$$(26') \quad c_{2p} = \frac{u' + (2a' - m_1)}{2 \operatorname{tg} \psi_2}$$

$$(27') \quad c_{1p} = \frac{u' + m_1}{2 \operatorname{tg} \psi_1}$$

Numa segunda etapa, com êstes valores pode-se obter

$s_2 \approx \frac{2a' - m_1}{\sigma_2}$ e $s_1 \approx \frac{m_1}{\sigma_{1p}}$ que com $\operatorname{tg} \psi_2$ e $\operatorname{tg} \psi_1$ permite achar $\frac{\gamma_2}{\sigma_2^2}$ e $\frac{\gamma_1}{\sigma_1^2}$ e, assim, aplicar as fórmulas (26) e (27).

Nos exemplos que vimos desenvolvendo resulta :

$$\text{Com } m_1 = 4321,9 \text{ mm}$$

$$\text{Com } m'_1 = 2093,4 \text{ mm}$$

Pelas expressões (26') e (27') :

$$c_{2p} = \frac{35671,4 + 5178,1}{2(0,2179242)} = 93724,1 \text{ mm} \quad ; \quad c_{2p}' = \frac{35671,4 + 7406,6}{2(0,2212369)} = 97357,2 \text{ mm}$$

$$c_{1p} = \frac{35671,4+4321,9}{2(0,2133738)} = 93716,5 \text{ mm} \quad c'_{1p} = \frac{35671,4+2093,9}{2(0,1940391)} = 97313,6 \text{ mm}$$

Pelas expressões (26) e (27) :

$$\begin{array}{ll} c_2 = \frac{35671,4+0,99806(5178,1)}{2(0,2179242)} = & c'_2 = \frac{35671,4+0,99735(7406,6)}{2(0,2212369)} = \\ = 93701,1 \text{ mm} & = 97312,8 \text{ mm} \\ c_1 = \frac{35671,4+0,99838(4321,9)}{2(0,2133738)} = & c'_1 = \frac{35671,4+0,99930(2093,9)}{2(0,1940391)} = \\ = 93700,1 \text{ mm} & = 97309,8 \text{ mm} \end{array}$$

Os dois valores c_2 e c_1 devem ser iguais e representam o parâmetro comum dos dois arcos de catenária \widehat{MB} e \widehat{MA} (figs. 8 e 18), respetivamente, e que correspondem à leitura m_1 feita no ponto M da graduação que tem o zero no ponto Δ do padrão de comprimento $2a' = \Delta MB$.

Os valores c'_2 e c'_1 correspondem a outra leitura m'_1 do par necessário para a solução do problema de determinação da distância X e da diferença de nível Y entre A e B .

Os valores c_2 com c_1 devendo ser iguais por um lado e c'_2 com c'_1 por outro, as diferenças $c_2 - c_1$ e $c'_2 - c'_1$ permitem obter a ordem de grandeza dos erros relativos

$$(28) \quad e_c = 2 \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$(29) \quad e'_c = 2 \frac{c'_2 - c'_1}{c'_2 + c'_1}$$

nos parâmetros cujos valores médios

$$(30) \quad c = \frac{1}{2}(c_2 + c_1) \quad e$$

$$(31) \quad c' = \frac{1}{2}(c'_2 + c'_1)$$

correspondem às leituras m_1 e m'_1 , respetivamente.

Estes c e c' são considerados suficientemente corretos quando estejam sujeitos sómente a erros accidentais naquelas leituras, como no caso do exemplo numérico dado.

Assim, pelas expressões (30) e (31) :

$$c = \frac{93701,1 + 93700,1}{2} = 93700,5 \text{ mm}$$

$$c' = \frac{97312,8 + 97309,8}{2} = 97311,3 \text{ mm}$$

e pelas (28) e (29)

$$e_c = 2 \frac{1,0}{93701,1 + 93700,1} = \frac{1}{93700,6}$$

$$e'_c = 2 \frac{3,0}{97312,8 + 97309,8} = \frac{1}{32437,1}$$

3. VERIFICAÇÃO E CONCLUSÃO

A solução numérica que apresentámos antes para a qual o cálculo dos parâmetros c e c' oferece um meio de verificação, admite, em princípio, as proporcionalidades seguintes, tendo em vista as expressões (5), (5'), (6), (6'), (7), (7'), etc... definidas (pags. 94 e seguintes) :

$$(32) \quad \frac{(K_1)_1}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{(K_1)_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{(K_1)_3}{\operatorname{sen} \alpha_3} = \dots = \frac{(K_1)_n}{\operatorname{sen} \alpha_n} = (\Delta m_1)_0$$

$$(33) \quad \frac{(K'_1)_1}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{(K'_1)_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{(K'_1)_3}{\operatorname{sen} \alpha_3} = \dots = \frac{(K'_1)_n}{\operatorname{sen} \alpha_n} = (\Delta m'_1)_0$$

Uma vez que o valor correto de $\operatorname{sen} \alpha$ constitui a chave do problema e que $\operatorname{sen} \alpha_n$ é mais próximo de $\operatorname{sen} \alpha$ do que $\operatorname{sen} \alpha_0$, valor inicial éste que permitiu obter $(\Delta m_1)_0$ e $(\Delta m'_1)_0$ como vimos (pag. 94), resulta que do valor c (ou c') do parâmetro calculado pelas expressões (30) [ou (31)], pode-se obter valores $\operatorname{tg} \Psi_{21}$ e $\operatorname{tg} \Psi'_{21}$ pelas expressões

$$(34) \quad \operatorname{tg} \Psi_{21} = \frac{u' + \frac{v_2}{\sigma_2} (2a' - m_1)}{2c}$$

$$(35) \quad \operatorname{tg} \Psi'_{21} = \frac{u' + \frac{v'_2}{\sigma'_2} (2a' - m'_1)}{2c'}$$

as quais constituem novos valores de partida mais próximos dos verdadeiros do que

$$(36) \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg} \psi'_2 = \operatorname{tg} \alpha_0$$

como admitimos de inicio quando tomamos $\psi_2 \approx \alpha_0$ dado em

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\Delta Y}{2(m_1 - m'_1)}$$

à página 94.

Assim se pode obter novos valores $(\Delta m_1)_{01}$ e $(\Delta m'_1)_{01}$ definidos pela expressão (2) da página 74 com o auxílio de outras indicadas, valores que são, por sua vez, mais próximos dos verdadeiros do que $(\Delta m_1)_0$ e $(\Delta m'_1)_0$ obtidos antes (Ver exemplo à página 83).

Com aquêles novos valores $(\Delta m_1)_{01}$ e $(\Delta m'_1)_{01}$ no lugar de $(\Delta m_1)_0$ e $(\Delta m'_1)_0$:

1º) das expressões (5) (5') em (4_1) (pags. 93, 94) que permitem obter novo valor $\operatorname{sen} \alpha_{11}$;

2º) das expressões (6) (6') em (4_2) (pags. 93 e 95) que permitem obter novo valor $\operatorname{sen} \alpha_{21}$;

3º) das expressões até novo valor final de $\operatorname{sen} \alpha_{nl}$, conclui-se que este valor de $\operatorname{sen} \alpha_{nl}$ obtido com os parâmetros c e c' das expressões (30) e (31) (pag. 101), é mais próximo do verdadeiro valor procurado de $\operatorname{sen} \alpha$ do que $\operatorname{sen} \alpha_n$ obtido antes a partir de $\psi_2 = \alpha_0$ (pag. 94).

Dessa maneira a diferença entre $\operatorname{sen} \alpha_{nl}$ obtido por último e o valor $\operatorname{sen} \alpha_n$ anterior, dá, numéricamente, a ordem de grandeza do erro deste valor.

Assim, em princípio, fica verificado que a solução numérica estudada oferece oportunidade para resultados com qualquer aproximação desejada já que a expressão fundamental

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - \left[(K_1) - (K'_1) \right]}{m_1 - m'_1}$$

(Ver pags. 11, 15 e 93) é uma expressão que, conceitualmente, vem sendo interpretada de maneira sempre uniforme

Note-se que essa expressão (definida mediante conceitos elementares na teoria experimental do aparelho, tal como vimos na tese anterior e no inicio desta) contém os têrmos (K_1) e (K'_1) os quais, racionalmente, só podem ser obtidos pela análise transcendente, como o fizemos na presente tese, e experimentalmente, como o fizemos na tese anterior.

Diga-se, de passagem, que a solução numérica completa que acabamos de dar tem, aqui para nós, mais um significado demonstrativo físico-matemático de sua possibilidade do que valor prático imediato.

Deixamos aos matemáticos (puros !) a pesquisa de outras soluções que êles porventura queiram achar "mais elegante" para o principal problema contido no caso real do NIVELDIASTIMETRO aqui estudado.

Para nós a solução gráfica, como vimos (pags. 72 e seguintes), permite obter qualquer aproximação desejada.

A solução numérica com o primeiro valor achado para $\sin \alpha_n$ é satisfatória, como vimos no exemplo dado. O que é preciso é que o valor de $u = \frac{P}{p}$ mm, relação entre o peso P gramas do indicador de leituras suspenso e o peso unitário p grf/mm do padrão de comprimento, seja suficientemente elevado em relação ao valor 2a' desse padrão.

Damos, a seguir, outra maneira de verificação dos resultados da teoria, utilizando diretamente as funções hiperbólicas.

G - VERIFICAÇÃO POR MEIO DE FUNÇÕES
HIPERBÓLICAS

1. PRIMEIRAS CONSIDERAÇÕES

Apresentamos, agora, pesquisas feitas com o objetivo inicial de estabelecer outros controles para os resultados da teoria que criámos baseada nos conceitos e fórmulas elementares da primeira tese e no estudo da catenária homogênea.

O desenvolvimento teórico deste assunto, no setor da Topografia, nos conduziu a resultados que reputamos interessantíssimos.

mos ou simplesmente espantosos para quem conhece e cuida praticamente de processos de medida direta de distâncias horizontais até hoje divulgados.

Trata-se, por enquanto, de pôr em evidência mais um meio de controlar os resultados da teoria empregando diretamente funções hiperbólicas.

2. CÁLCULO DAS TANGENTES DOS ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO NOS EXTREMOS DOS ARCOS

Vejamos como calcular as tangentes trigonométricas dos ângulos de inclinação das retas tangentes nos pontos extremos dos arcos de catenária e no ponto de suspensão do indicador de leituras.

Tenhamos em vista a figura 18.

A tangente dos dois ângulos θ_M de inclinação dos dois arcos de catenária no ponto M, iguais entre si, pode ser obtida da expressão (8) da página 63 como indicamos a seguir :

$$(1) \quad \operatorname{tg} \theta_M = \frac{u}{2c} \quad \text{onde}$$

$$u = \frac{P \text{ grf}}{p \text{ grf/mm}} \quad \text{sendo } P \text{ o peso do indicador de lei-}$$

turas em gramas e p o peso unitário expresso em gramas por milímetro da fita métrica, padrão de comprimento 2a'; e c, o parâmetro comum dos dois arcos de catenária.

Nos exemplos numéricos examinados antes obtivemos :

$$u' = 35671,4 \text{ mm}$$

c = 93700,5 mm com a leitura $m_1 = 4321,9$ mm no ponto M e $c' = 97311,3$ mm com a leitura $m'_1 = 2093,4$ mm (pag.102), recordando que o zero da graduação da fita está localizado no ponto A e a outra extremidade $2a' = 9500,0$ mm no ponto B.

Resulta assim :

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{35671,4}{2(93700,5)} = 0,19034797$$

e

$$\operatorname{tg} \theta'_M = \frac{35671,4}{2(97311,3)} = 0,18328498$$

$$\text{e os ângulos } \theta_M = 10^\circ 46' 38,0'' \quad \theta'_M = 10^\circ 23' 10,2''$$

Calculemos agora as tangentes dos ângulos θ_A e θ_B nos pontos A e B com a leitura m_1 e θ'_A e θ'_B com a leitura m'_1 .

Com base na expressão (8) da página 27 e lembrando que

$$\frac{m_1}{c} \text{ e } \frac{2a' - m_1}{c} \quad \frac{m'_1}{c'} \text{ e } \frac{2a' - m'_1}{c'}$$

representam nas catenárias de parâmetros c e c' , em milímetros, os arcos de comprimentos m_1 , $(2a' - m_1)$, m'_1 e $(2a' - m'_1)$, também em milímetros, respetivamente, pode-se escrever :

$$(2_1) \quad c = \frac{m_1}{\operatorname{tg} \theta_A - \operatorname{tg} \theta_M}$$

$$(2_2) \quad c = \frac{2a' - m_1}{\operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M}$$

$$(2'_1) \quad c' = \frac{m'_1}{\operatorname{tg} \theta'_A - \operatorname{tg} \theta'_M}$$

$$(2'_2) \quad c' = \frac{2a' - m'_1}{\operatorname{tg} \theta'_B - \operatorname{tg} \theta'_M}$$

onde, lembrando de (1) acima que $\operatorname{tg} \theta_M = \frac{u}{2c}$ resulta, respetivamente :

$$(3_1) \quad \operatorname{tg} \theta_A = \frac{m_1 + \frac{1}{2}u}{c}$$

$$(3_2) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{(2a' - m_1) + \frac{1}{2}u}{c}$$

$$(3'_1) \quad \operatorname{tg} \theta'_A = \frac{m'_1 + \frac{1}{2}u}{c'}$$

$$(3'_2) \quad \operatorname{tg} \theta'_B = \frac{(2a' - m'_1) + \frac{1}{2}u}{c'}$$

E com os dados numéricos :

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{4321,9 + \frac{1}{2}(35671,4)}{93700,5} = 0,23647259$$

FIG. 22

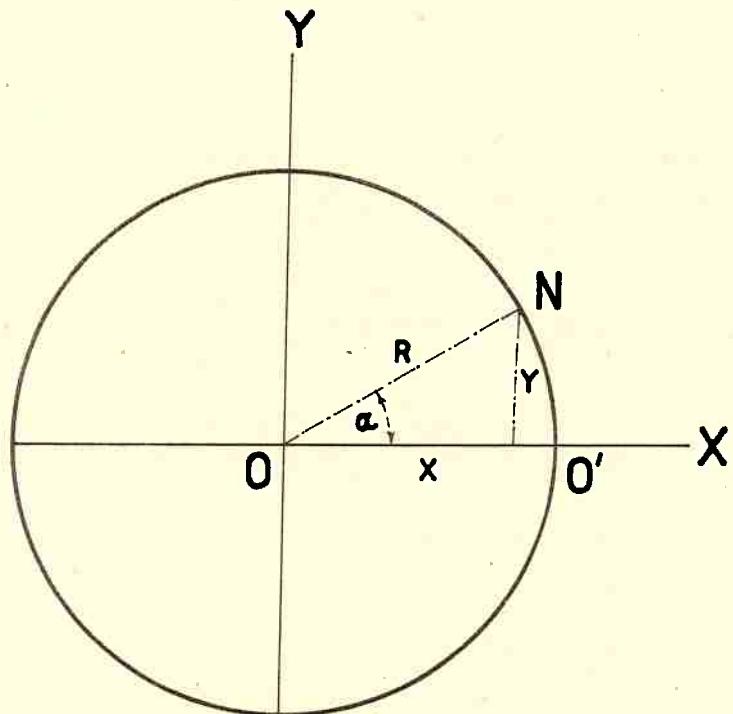
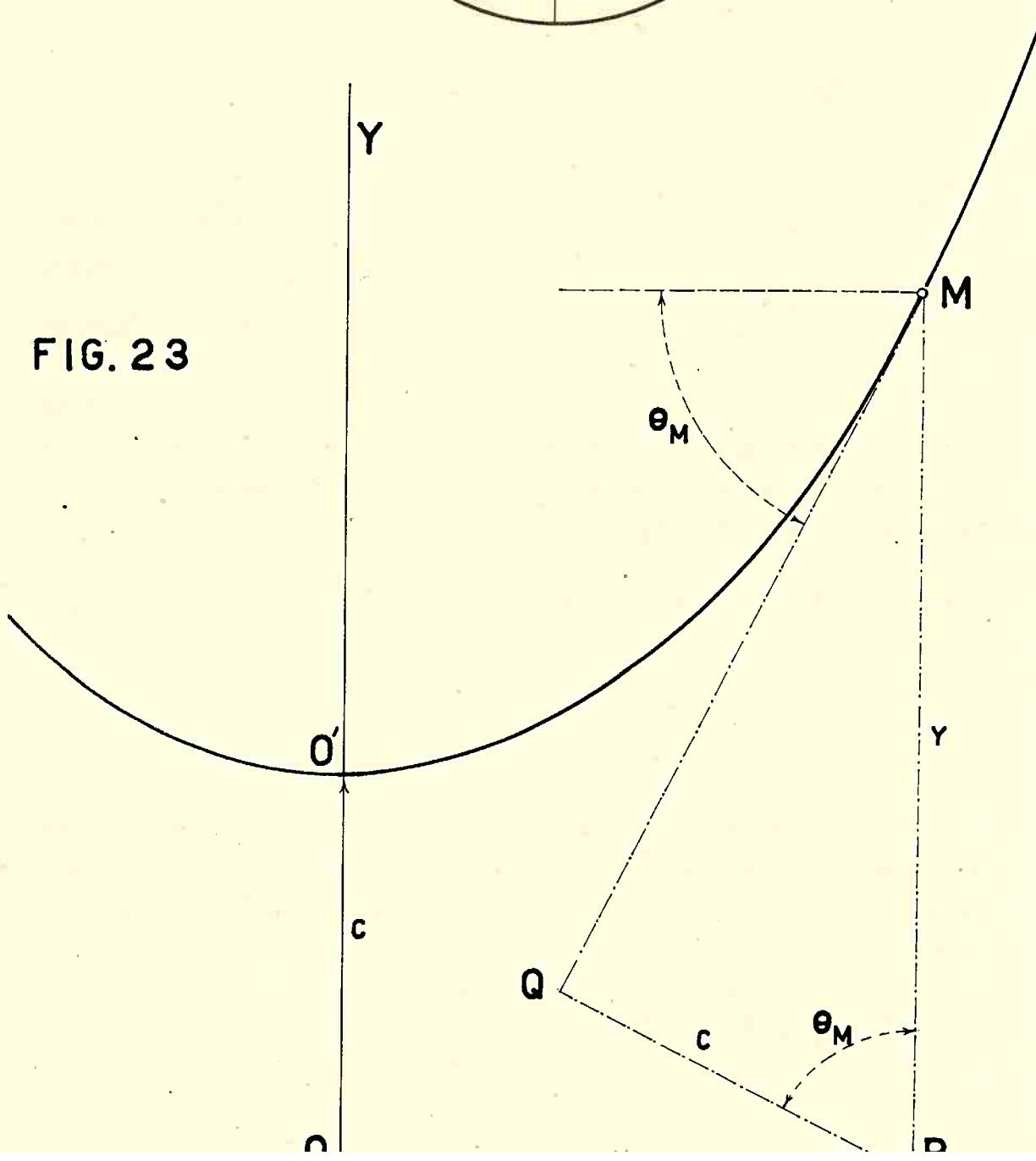


FIG. 23



$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{5178,1 + \frac{1}{2}(35671,4)}{93700,5} = 0,24561022$$

$$\operatorname{tg} \theta'_A = \frac{2093,9 + \frac{1}{2}(35671,4)}{97311,3} = 0,20480253$$

$$\operatorname{tg} \theta'_B = \frac{7406,6 + \frac{1}{2}(35671,4)}{97311,3} = 0,25939742$$

de onde os ângulos :

$$\theta_A = 13^\circ 18' 16,3''$$

$$\theta_B = 13^\circ 47' 57,4''$$

$$\theta'_A = 11^\circ 34' 27,4''$$

$$\theta'_B = 14^\circ 32' 30,7''$$

3. ALGUMAS ANALOGIAS E RELAÇÕES CONHECIDAS ENTRE FUNÇÕES CIRCULARES E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS LIGADAS À CATENÁRIA

Lembremos que se pode considerar o círculo de raio unitário R , referido a um sistema de eixos cartesianos ortogonais OX e OY (fig. 22), como a figura plana limitada pela curva de centro O cujos pontos N satisfazem a relação

$$(4) \quad X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 = 1$$

ou

$$(4') \quad x^2 + y^2 = R^2$$

onde

$$X_\alpha = \frac{x}{R} \quad \text{e} \quad Y_\alpha = \frac{y}{R}$$

Assim também, de maneira semelhante, se pode considerar a catenária de parâmetro unitário c , referida a eixos ortogonais OX e OY (fig. 23), como a curva plana cujos pontos M satisfazem a relação

$$(5) \quad Y_\theta = \frac{X_\theta + \frac{-X_\theta}{e}}{2}$$

ou

$$(5') \quad \frac{y}{c} = \frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}$$

onde

$$X_\theta = \frac{x}{c} \quad Y_\theta = \frac{y}{c} \quad e = 2,718281828459 \dots$$

presenta a base dos logarítmos neperianos também chamados hiperbólicos ou naturais.

As funções circulares, como se sabe, podem ser definidas por meio de segmentos de retas e relações entre estes segmentos, referidos ao círculo de raio unitário $R = \overline{ON} = \overline{OO'}$ (fig. 22).

Semelhantemente, vamos indicar a maneira de definir as funções hiperbólicas também por meio de relações entre segmentos de retas ou mesmo segmentos de retas referidos à catenária de parâmetro unitário $c = \overline{OO'}$ (fig. 23).

Vimos (pag. 26) que em cada ponto M da curva de abcissa $x = \overline{OP}$ e ordenada $y = \overline{PM}$ se pode construir um triângulo retângulo MPQ (fig. 23) cujo lado \overline{MQ} , de comprimento igual ao arco $\widehat{MO'}$ é tangente à curva no ponto M e faz o ângulo $|\theta_M| < 90^\circ$ com o eixo dos x , e cujo lado $\overline{PQ} = c$ representa o parâmetro c da catenária e faz o mesmo ângulo θ_M com o eixo dos y .

NOTA - Considerando fisicamente a catenária como um fio suspenso, o eixo dos x representa a direção horizontal e o eixo dos y a direção vertical.

Isto posto, para cada ponto genérico M da curva, vamos chamar :

1º) ao ângulo $\theta_M = \operatorname{amh}$ de amplitude hiperbólica da curva no ponto;

2º) à relação $\frac{x}{c} = X_\theta = \operatorname{argh} X_\theta$ de argumento hiperbólico no ponto cuja amplitude hiperbólica é θ_M ;

3º) à relação $\frac{y}{c} = Y_\theta = \cosh X_\theta$ de cosseno hiperbólico do argumento hiperbólico X_θ cuja amplitude hiperbólica é θ_M ;

NOTA - Esta expressão

$$(5'') \quad Y = \cosh X_\theta = \frac{e^{X_\theta} + e^{-X_\theta}}{2} \quad \text{representa a equação da catenária unitária. Inversamente, exprime-se também :}$$

$$(6) \quad x_\theta = \arg \cosh Y$$

que se lê "argumento cujo cosseno hiperbólico é Y".

4º) à relação $\frac{MO}{c} = \frac{MQ}{c} = \operatorname{senh} x_\theta$ de seno hiperbólico do mesmo argumento x_θ ;

5º) à relação $\frac{MQ}{y} = \frac{\operatorname{senh} x_\theta}{\cosh x_\theta} = \operatorname{tgh} x_\theta$ de tangente hiperbólica sempre do mesmo argumento x_θ ;

6º) à relação $\frac{y}{MQ} = \frac{\cosh x_\theta}{\operatorname{senh} x_\theta} = \operatorname{coth} x_\theta$ de cotangente hiperbólica do mesmo argumento x_θ ;

7º) à relação $\frac{c}{y} = \frac{1}{Y_\theta} = \operatorname{sech} x_\theta$ de secante hiperbólica do argumento hiperbólico x_θ ; e

8º) à relação $\frac{c}{MQ} = \operatorname{cosech} x_\theta$ de cossecante hiperbólica do argumento x_θ .

NOTA - Consideraremos sempre $| \theta | < 90^\circ$

Dessa maneira se verifica que cada função hiperbólica é definida para um argumento hiperbólico x_θ , e a cada valor deste argumento corresponde uma amplitude hiperbólica θ_M . E por isso os valores numéricos tanto dos argumentos hiperbólicos como das funções hiperbólicas, numa tabela convenientemente construída, podem ser encontrados em função de ângulos menores do que 90° os quais representam as amplitudes hiperbólicas θ_M dos argumentos x_θ .

Ou, em outros termos, as funções hiperbólicas de cada argumento x_θ podem ser expressas também por meio de funções circulares da respetiva amplitude hiperbólica θ_M , como passamos a verificar.

Tendo presente a figura 23 e as definições das funções circulares do ângulo θ_M no triângulo retângulo MPQ, pode-se escrever, imediatamente, como segue, as relações de definição destas funções circulares que correspondem e se identificam com as que definem as funções hiperbólicas do argumento x_θ .

Assim se encontram :

$$(7) \quad \cosh x_\theta = \sec \theta_M = \frac{1}{\cos \theta_M} = Y_\theta$$

$$(8) \quad \operatorname{senh} x_\theta = \operatorname{tg} \theta_M$$

$$(9) \quad \operatorname{tgh} X_{\theta} = \operatorname{sen} \theta_M$$

$$(10) \quad \operatorname{coth} X_{\theta} = \operatorname{cosec} \theta_M$$

$$(11) \quad \operatorname{sech} X_{\theta} = \operatorname{cos} \theta_M$$

$$(12) \quad \operatorname{cosech} X_{\theta} = \operatorname{cot} \theta_M$$

O argumento X_{θ} pode ser calculado em função da amplitud de θ_M por meio de logarítmos vulgares ou decimais pela expressão:

$$(13) \quad \frac{\log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{\theta_M}{2})}{M^{-1}} = X_{\theta}$$

onde $(M^{-1}) = (0,434294481903 \dots)$ é o módulo dos logarítmos hiperbólicos ou neperianos, que permite transformar logarítmos vulgares em hiperbólicos.

A expressão (13) acima pode se justificar da maneira seguinte.

Vamos considerar a expressão (5) ou (5') (pags. 107 e 108) com a qual definimos matematicamente a catenária sob a forma unitária:

$$(5) \quad Y = \cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

Multiplicando ambos os membros dessa expressão por $2e^X$ obtem-se logo a seguinte equação do segundo grau que tem e^X como incógnita:

$$e^{2X} - 2Y e^X + 1 = 0$$

Resolvendo:

$$e^X = Y \pm \sqrt{Y^2 - 1}$$

expressão que é real sómente com $Y \geq 1$.

E pela definição de logaritmo neperiano:

$$(14) \quad x = \ell(Y \pm \sqrt{Y^2 - 1})$$

onde substituindo Y pela sua definição em termos de amplitude hiperbólica indicada na expressão (7) da página 109 vem:

$$(14') \quad x = \ell\left(\frac{1}{\cos \theta} \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}\right)$$

ou

$$(14'') \quad x = \ell \frac{1 \pm \sin \theta}{\cos \theta}$$

ou exprimindo em logaritmos vulgares, sendo $(M^*)^1$ o módulo dos logaritmos neperianos :

$$(14''') \quad x = \frac{1}{M^*} \log \frac{1 \pm \sin \theta}{\cos \theta}$$

Assim resta demonstrar a igualdade

$$(15) \quad \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

para se verificar a validade da expressão (13) referida à página anterior.

Uma expressão da trigonometria plana que dá a tangente da soma de dois arcos em função das respetivas tangentes permite escrever :

$$(15') \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}$$

Outra expressão da trigonometria dá :

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)^2}} = \\ = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

Substituindo (16) em (15') e (15) :

$$\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{1 + \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta - \sin \theta}$$

Igualando o produto dos meios com o dos extremos e simplificando vem

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Sendo esta uma identidade fundamental, conclui-se que a expressão (15) é verdadeira.

E a (15) substituída em (14''') mostra que a (13) da página 110, isto é,

$$x_\theta = \frac{\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta}{2} \right)}{M^*}$$

é válida.

4. EXPRESSÕES DE CÁLCULO E VERIFICAÇÃO
DAS DISTÂNCIAS E DIFERENÇAS DE NIVEL

1º) Pelas funções hiperbólicas

Suponhamos na figura 18 que a distância horizontal X' e a diferença de nível Y' entre os pontos de suspensão A e B são dadas por

$$X' = h_1 + h_2$$

$$Y' = v_2 - v_1$$

sendo h_1 e v_1 a distância e a diferença de nível entre A e M e h_2 e v_2 a distância e a diferença de nível entre B e M, respectivamente, expressas em milímetros.

Chamemos :

c o parâmetro comum aos dois arcos de catenária em milímetros;

H_A e H_M os argumentos hiperbólicos dos pontos A e M da catenária de vértice O'' e cuja origem de coordenadas seja O_A ; e

H_B e H_M os argumentos hiperbólicos dos pontos B e M da catenária de vértice O' e cuja origem de coordenadas seja O_B .

Tendo presente as definições anteriormente estudadas sobre funções hiperbólicas relacionadas com a catenária, pode-se escrever :

$$(17) \quad |h_1| = c (|\operatorname{argh} H_A| - |\operatorname{argh} H_M|)$$

$$(18) \quad |h_2| = c (|\operatorname{argh} H_B| - |\operatorname{argh} H_M|)$$

$$(19) \quad X' = h_1 + h_2 = c (\operatorname{argh} H_A + \operatorname{argh} H_B - 2 \operatorname{argh} H_M)$$

Estas expressões, vamos supor, se referem à leitura indicada no ponto M por m_1 com o NIVELDIASTIMETRO (fig. 8).

Considerando a outra leitura m'_1 do par necessário e o parâmetro c' , se obtém semelhantemente :

$$(19') \quad X'' = h'_1 + h'_2 = c' (\operatorname{argh} H'_A + \operatorname{argh} H'_B - 2 \operatorname{argh} H'_M)$$

Pode-se ainda escrever, tendo em vista a definição de

cosseno hiperbólico :

$$(20) \quad |v_1| = c(|\cosh H_A| - |\cosh H_M|)$$

$$(21) \quad |v_2| = c(|\cosh H_B| - |\cosh H_M|)$$

$$(22) \quad Y' = v_2 - v_1 = c(\cosh H_B - \cosh H_A)$$

Expressão indicada para a leitura m_1 .

Para a leitura m'_1 e o parâmetro c' se escreve :

$$(22') \quad Y'' = v'_2 - v'_1 = c'(\cosh H'_B - \cosh H'_A)$$

Haviamos achado antes pelo cálculo numérico os parâmetros c e c' (pag. 102) assim como as amplitudes hiperbólicas θ_M e θ'_M (pag. 106), θ_A (pag. 107), θ_B , θ'_A , θ'_B (pag. 107) para os casos das leituras m_1 e m'_1 , respetivamente (pag. 94).

Assim em função desses ângulos que representam as amplitudes hiperbólicas, podem ser obtidos, numa táboa numérica apropriada de funções hiperbólicas, os argumentos H_M e H'_M , H_A , H_B e H'_A , H'_B e os cossenos hiperbólicos $\cosh H_B$, $\cosh H_A$ e $\cosh H'_B$, $\cosh H'_A$.

Esses elementos numéricos nas fórmulas (19) e (19'), (22) e (22') acima permitem calcular dois valores X' e X'' para a mesma distância horizontal e dois valores Y' e Y'' para as diferenças de nível, valores estes que devem diferir entre si da constante vertical ΔY conhecida (Ver fig. 8).

29) Pelas funções circulares das amplitudes hiperbólicas

As expressões (19) e (19') da distância horizontal e (22) e (22') das diferenças de nível podem ser escritas em termos das funções circulares das respetivas amplitudes hiperbólicas como segue.

Substituindo nessas expressões os argumentos e as funções hiperbólicas pelas funções circulares que lhes são equivalentes, indicadas pela (13) da página 110 e (7) da página 109, resulta :

$$(23) \quad x' = \frac{c}{M^2} \left[\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta_A}{2} \right) + \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta_B}{2} \right) - 2 \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta_M}{2} \right) \right]$$

$$(23') \quad x'' = \frac{c'}{M^2} \left[\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta'_A}{2} \right) + \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta'_B}{2} \right) - 2 \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta'_M}{2} \right) \right]$$

$$(24) \quad y' = c (\sec \theta_B - \sec \theta_A)$$

$$(24') \quad y'' = c' (\sec \theta'_B - \sec \theta'_A)$$

3º) Exemplos numéricos

Reunimos num quadro, a seguir, os elementos numéricos colhidos em tabelas de cossenos e tangentes trigonométricas naturais e de logarítmos vulgares de tangentes referentes aos ângulos ou amplitudes hiperbólicas θ .

Na coluna 2. figuram as tangentes de θ calculadas antes (pags. 105, 106 e 107) com as quais pudemos obter êsses ângulos indicados na coluna 1., e que se referem, os três primeiros, à leitura $m_1 = 4321,9$ mm e, os três últimos, à leitura $m'_1 = 2093,4$ mm no NIVELDIASTÍMETRO.

θ	$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta}{2} \right)}{M^2}$	$\sec \theta$
		$= \operatorname{argh} X_\theta$	
0.			
$m_1 = 4321,9$ mm	$\theta_A = 13^\circ 18' 16,3''$	0,23647259	1,02757952
	$\theta_B = 13^\circ 47' 57,4''$	0,24561022	1,02972052
	$\theta_M = 10^\circ 46' 38,0''$	0,19034797	1,01795506
$m'_1 = 2093,4$ mm	$\theta'_A = 11^\circ 34' 27,4''$	0,20480253	1,02075664
	$\theta'_B = 14^\circ 32' 30,7''$	0,25939742	1,03309578
	$\theta'_M = 10^\circ 23' 10,2''$	0,18328498	1,01665794

Na coluna 3. estão reproduzidos os valores de $\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta}{2} \right)$ que equivalem a argumentos hiperbólicos das respe-

tivas amplitudes hiperbólicas da coluna 1.

Na coluna 4. estão reproduzidos os valores de $\sec \theta$ que equivalem a cossenos hiperbólicos dos argumentos referentes às amplitudes hiperbólicas da coluna 1.

Substituindo êsses valores numéricos nas expressões (19) e (19'), (22) e (22') (pags. 112 e 113) ou nas (23) e (23'), (24) e (24') (pag. 114) obtêm-se dois valores X' e X'' que se equivalem e dois valores Y' e Y'' que diferem entre si do comprimento vertical $\Delta Y = 1000,0$ mm.

Os cálculos numéricos estão indicados a seguir

$$\text{Com } m_1 = 4321,9 \text{ mm}$$

Na (19) ou (23)

$$\text{argh } H_A = 0,23432372$$

$$\text{argh } H_B = 0,24320572$$

$$\underline{0,47752944}$$

$$-2 \text{argh } H_M = -0,37843400$$

$$\underline{0,09909544}$$

$$c = \underline{93700,5}$$

$$X' = \underline{9285,29}$$

$$\begin{array}{l} \text{medida} \\ \text{direta} = \underline{9285,50} \end{array}$$

$$\text{Diferença} \quad 0,21 \text{ mm}$$

Na (18) ou (24)

$$\cosh H_B = 1,02972052$$

$$\cosh H_A = \underline{1,02757952}$$

$$\underline{0,00214100}$$

$$c = \underline{93700,5}$$

$$Y' = \underline{200,61}$$

$$\begin{array}{l} \text{medida} \\ \text{direta} = \underline{200,00} \end{array}$$

$$\text{Diferença} \quad - 0,61 \text{ mm}$$

$$\text{Com } m'_1 = 2093,4 \text{ mm}$$

Na (19') ou (23')

$$\text{argh } H'_A = 0,20339724$$

$$\text{argh } H'_B = 0,25657337$$

$$\underline{0,45997061}$$

$$2 \text{argh } H'_M = -0,36454758$$

$$\underline{0,09542303}$$

$$c' = \underline{97311,3}$$

$$X'' = \underline{9285,74}$$

$$\begin{array}{l} \text{medida} \\ \text{direta} = \underline{9285,50} \end{array}$$

$$\text{Diferença} \quad - 0,24 \text{ mm}$$

Na (18') ou (24')

$$\cosh H'_B = 1,03309578$$

$$\cosh H'_A = \underline{1,02075664}$$

$$\underline{0,01233914}$$

$$c' = \underline{97311,3}$$

$$Y'' = \underline{1200,74}$$

$$\begin{array}{l} \text{medida} \\ \text{direta} = \underline{1200,00} \end{array}$$

$$\text{Diferença} \quad - 0,74$$

48) COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Os dois valores X' e X'' têm como média o valor 9285,5 mm obtido assim pela teoria, o qual, fortuitamente, é o mesmo valor obtido pela medida direta como está indicado à página 36 da primeira tese e que ali figura com o número de ordem 32.

NOTA - O valor medido e ali figurado é 9785,5 mm (Ver coluna 15 daquela página 36) e difere de 9285,5 mm exatamente de 500,00 mm, diferença constante do comprimento horizontal do indicador de leituras $m_1 m_2$ (figs. 1 e 2) que na teoria foi suposto reduzido a um ponto M (fig. 18).

Os dois valores Y' e Y'' diferem entre si, como se esperava, de $\Delta Y = 1000,1$ mm com diferença de aproximação da casa decimal em relação ao valor dado $\Delta Y = 1000,0$ mm.

Esses dois valores $Y' = 200,61$ mm e $Y'' = 1200,74$ mm diferem das medidas diretas respetivas 200,0 mm e 1200,0 mm apenas de 0,61 mm e 0,74 mm quantidades da ordem dos erros acidentais constatados na primeira tese como se encontra à mesma página 36, acima citada, exemplo nº 32, coluna 21.

H - CONCLUSÕES

Em consequência dos desenvolvimentos anteriores com as verificações realizadas por caminhos diversos se conclui:

1º) A interpretação racional, físico-matemática, da nossa teoria do primeiro tipo de NIVELDIASTIMETRO criado é coerente e mostra que a fórmula elementar

$$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{\Delta Y}{2} - [(K_1) - (K'_1)]}{m_1 - m'_1}$$

baseada em conceitos simples, emitidos na primeira tese, estabele-

ceu desde inicio a coerência de tôda a teoria desenvolvida tanto na parte empírica e elementar como na parte racional e transcendente.

2º) As curvas experimentais representadas nas figuras 9 e 10 da primeira tese, reproduzidas e corretas nas figuras 6 e 7 da tese atual, conforme foi justificado a páginas 87/88, equivalem praticamente às da figura 21 desta segunda tese construídas racionamente. Ou, em outras palavras, as curvas da figura 21 construídas racionalmente como indicámos constituem verdadeiros modelos matemáticos das curvas construídas experimentalmente e indicadas nas figuras 6 e 7, tal como se considera a catenária homogênea definida pela sua fórmula clássica

$$Y = \cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

como modelo matemático da figura de equilíbrio formada por um fio flexível, homogêneo e inextensível suspenso por suas extremidades.

Fica assim confirmada, agora racionalmente, a demonstração empírica da primeira tese proposta nos termos que se encontram no trecho de seu prefácio reproduzido a seguir :

" A tese que defendemos neste trabalho (la. tese) consiste em mostrar, de maneira elementar, que o dispositivo relativamente simples de nossa invenção, a que demos o nome de NIVELDIASTIMETRO, permite medir diretamente com uma FITA MÉTRICA ou um FIO PADRÃO, ao mesmo tempo, a distância horizontal e a diferença de nível corretas entre pontos dados, independentemente dos processos clássicos já conhecidos para a medida de quaisquer dessas grandes linhas."

I - ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DA TEORIA

1. CONSIDERAÇÕES

As consequências das demonstrações aqui apresentadas e anunciamos como objetivos remotos no prefácio e conclusão da primeira tese serão objeto de uma " GENERALIZAÇÃO DA IDEIA DE NIVELDIASTIMETRO" que oferecemos sob o tópico III dêste trabalho.

No prefácio da tese anterior havíamos prometido o "desenvolvimento do estudo dos princípios em que se baseia o NIVELDIASTIMETRO" cujos fundamentos conceituais fixámos elementarmente nessa mesma tese.

O estudo que acabamos de fazer neste tópico II representa aquele "desenvolvimento" prometido.

No trecho final intitulado "Conclusão" da mesma tese anterior, anunciamos uma convicção, então já adquirida, nos termos que reproduzimos a seguir :

"Os estudos que fizemos até agora dão-nos a convicção de que é possível analisar-se e construir-se um NIVELDIASTIMETRO padrão cujas características constantes permitam calcular uma tabela universal capaz de fornecer : a distância horizontal, a distância vertical (ou diferença de nível) e a distância inclinada entre os pontos extremos de um FIO PADRÃO, pontos estes fixados em posições quaisquer, para cada par de leituras oferecidas pelo aparelho e acessórios em condições ótimas, estabelecidas e definidas."

Essa convicção, então anunciada, se encontra posta em evidência sob o tópico III da tese atual, além de implicitamente sob o tópico II, e ainda, implicita, empiricamente, no estudo elementar da teoria na tese anterior a qual foi resumida sob o tópico I da presente tese.

2. NOVOS TIPOS DE NIVELDIASTIMETRO

Vamos agora fixar como transição para o tópico III dessa tese o sentido que para nós representa o "momento histórico do raciocínio" que nos conduziu à "generalização da idéia de NIVELDIASTIMETRO", embora numa ordem um pouco diferente devido à preocupação lógica e didática na sequência de apresentação da tese atual.

Trata-se do seguinte.

Se o peso P gramas do indicador de leituras suspenso é expresso em milímetros de comprimento do fio padrão de peso unitário p grf/mm pela relação

(25) $u = 2 c \cdot \operatorname{tg} \theta_M$

(Ver pag. 63)

e se, por outro lado,

(26) $c = \frac{2a' - m_1}{\operatorname{tg} \theta_B - \operatorname{tg} \theta_M}$ (pag. 106)

torna-se evidente que podendo medir θ_B diretamente, conhecendo $(2a' - m_1)$ em milímetros, e substituindo nesta última expressão o valor

(27) $\operatorname{tg} \theta_M = \frac{u}{2c}$ obtido da (25)
resulta

(28) $c = \frac{(2a' - m_1) + \frac{1}{2} u}{\operatorname{tg} \theta_B}$

Assim, uma vez conhecido o padrão de comprimento $2a'$ milímetros, flexível e graduado, bastam o ângulo θ_B e uma só leitura m_1 da graduação para se poder obter o parâmetro c , em milímetros, comum aos dois arcos de catenária formados com o NIVELDIASTÍMETRO até agora estudado.

Este parâmetro c calculado pela última fórmula escrita acima (onde $u = \frac{P}{p} \frac{\text{grf}}{\text{grf/mm}}$ em milímetros) permite calcular também a distância horizontal X' e a diferença de nível Y' procuradas entre os pontos extremos A e B (fig. 18) em termos de funções hiperbólicas, como está indicado nas expressões (19) e (22) (pags. 112 e 113) ou de funções circulares equivalentes, como está indicado nas expressões (23) e (24) (pag. 114), tendo em vista as amplitudes hiperbólicas θ_M , θ_B acima indicadas e θ_A dada por meio de

(29) $\operatorname{tg} \theta_A = \frac{m_1 + \frac{1}{2} u}{c}$

tal como foi obtido à página 106.

No subtítulo C do tópico III indicamos o dispositivo que permite medir θ_B uma vez que m_1 é obtido com o NIVELDIASTÍMETRO antes estudado. A figura 24 sugere a montagem do caso em questão.

Assim, com os dois únicos dados variáveis, m_1 linear e θ_B angular, se pode obter a distância X_1 e a diferença de nível

Y_1 procuradas, de maneira também inédita, mas não tão interessante como a maneira simplificada que iremos indicar depois.

Damos agora a seguir um exemplo numérico do caso acima que foi realizado com dados obtidos pelos primeiros dispositivos que desenhámos e fizemos construir rudimentarmente para a medida de θ_B .

Exemplo numérico

Sejam os dois dados : $m_1 = 4861,0$ mm obtido com o indicador de leituras do primeiro tipo de NIVELDIASTIMETRO estudado; e $\theta_B = 9^\circ 32' 30''$ obtido com o dispositivo, estudado na III parte desta tese, apropriado para medir as amplitudes hiperbólicas. Este dispositivo faz parte integrante do segundo tipo de NIVELDIAS TIMETRO, NIVELDIASTIMETRO ANGULAR, como o designamos (Ver subtítulo C do tópico III, pag. 140). O valor de θ_B é o que decorre de uma leitura correta do efeito de desretificação dos níveis de bolha e correta ainda do efeito de curvatura da catenária no organo de leitura como se verá depois.

Trata-se agora de calcular, com êsses dois dados, a distância horizontal X' e a diferença de nível Y' por meio das fórmulas (23) e (24) da página 114.

Nessas fórmulas já é conhecido $\theta_B = 9^\circ 32' 30''$ indicado acima. Falta obter θ_M e θ_A para a sua aplicação, sendo $u = u' = 35671,4$ mm já citado em exemplos anteriores, e $2a' + \overline{m_1 m_2} = 9790,0 + 500,0$ mm o padrão de comprimento, suspenso por suas extremidades A e B, e $m_1 = 4861,0$ mm a leitura indicada em sua graduação com origem em A (fig. 24).

Note-se que a seguir vamos adotar $2a' = 9790,0$ mm como padrão no cálculo numérico, lembrando que $\overline{m_1 m_2} = 500,0$ mm representa o comprimento horizontal entre os dois apoios do indicador de leituras suspenso (fig. 24) que é uma constante a somar ao resultado do cálculo da distância horizontal e que não influi no resultado da diferença de nível.

Assim, pela (28) da página 119,

$$c = \frac{(9790,0 - 4861,0) + \frac{1}{2}(35671,4)}{0,168090} = 135431,4$$

Pela (27) da página 119 :

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{35671,4}{2(135431,4)} = 0,1316955 \quad \text{se obtém}$$

$$\theta_M = 7^\circ 30' 9''$$

Pela (29) da página 119:

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{4861,0 + \frac{1}{2} (35671,4)}{135431,4} = 0,1675882 \quad \text{se obtém}$$

$$\theta_A = 9^\circ 30' 49''$$

Lembrando (pag. 110) que $M^x = 0,43429448 \dots$ e aplicando as fórmulas (23) e (24) da página 114 resulta :

$$x' = \frac{135431,4}{0,4342945} [0,0724456 + 0,0726612 - 2(0,0570312)] = 9681,0 \text{ mm}$$

$$+ \frac{m_1 m_2}{1} = \text{constante do indicador (fig. 24)} = 500,0 \text{ mm}$$

Distância calculada 10181,0 mm

Distância medida por outro meio 10182,3 mm

Desvio 1,3 mm

$$y' = 135431,4 (1,0140288 - 1,0139454) = 11,3 \text{ mm}$$

Diferença de nível calculada 11,3 mm

Diferença de nível medida por outro meio 12,0 mm

Desvio 0,7 mm

Neste ponto do raciocínio, quem nos deu a honra e a satisfação de acompanhar a sequência de idéias aqui apresentada poderá compreender como e porque a "verificação por meio das funções hiperbólicas" (pags. 104 e seguintes) dos resultados da aplicação do "desenvolvimento dos princípios do NIVELDIASTIMETRO" nos conduziu a uma simplificação dos dispositivos de medida e a uma "generalização da idéia de NIVELDIASTIMETRO" .

Ao invés de calcular o ângulo θ_A por meio de

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{m_1 + \frac{1}{2} u}{c}$$

como o fizemos no caso anterior, pode-se medi-lo diretamente da maneira indicada para o ângulo θ_B (Ver figuras 27, 28, 29 e 30 do subtítulo C, no tópico III) o que torna superabundante e dispensável o indicador de leituras suspenso e, assim também, os têrmos em m_1 e em u das fórmulas indicadas.

E dessa maneira se pode calcular a distância horizontal X e a diferença de nível Y entre os pontos A e B (figs. 27 e 28) com o fio padrão suspenso livremente por suas extremidades, sem qualquer indicador suspenso intermediário.

Neste caso as fórmulas necessárias se simplificam nas expressões

$$X = \frac{c}{m} \left[\log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta_B}{2} \right) \pm \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\theta_A}{2} \right) \right]$$

$$Y = c (\sec \theta_B - \sec \theta_A) \quad \text{sendo}$$

$$c = \frac{2a'}{\operatorname{tg} \theta_B \pm \operatorname{tg} \theta_A}$$

e onde se emprega o sinal "menos" (-) dos têrmos afetados do duplo sinal (+) quando o vértice da única catenária que se forma (fig. 27) não se encontra entre os pontos A e B de suspensão, e o sinal "mais" (+) quando o vértice da curva se encontra entre aqueles pontos (fig. 28).

NOTA - O aparecimento dêste duplo sinal algébrico nestas últimas fórmulas não decorre da simplificação imediata das fórmulas (23) e (24) da página 114 as quais admitem, naquela sequência, a existência do indicador de leituras suspenso, de peso definido para o cálculo de $\operatorname{tg} \theta_A$ por meio da leitura m_1 pela expressão indicada à página 119.

Estudaremos na parte III dêste trabalho o significado das três fórmulas escritas por último.

Queremos agora apenas pôr em evidência que desta maneira se economiza, em cada medida, o trabalho correspondente às segunda e terceira operações indicadas para o primeiro tipo de NIVELDIAS-TIMETRO estudado (Ver pags. 4 e 5), restando, neste segundo tipo,

apenas a primeira operação de suspensão do fio padrão pelas extremidades acrescida, nas medidas de rotina, de simples aperto dos dois parafusos fixadores p (figs. 29 e 30), um em cada dispositivo das extremidades do fio, que registam, automaticamente, as leituras para obter os ângulos θ_A e θ_B necessários.

Assim também, se verifica que com dois únicos dados variáveis, θ_A e θ_B neste caso, ambos angulares, se pode obter a distância horizontal X e a diferença de nível Y por mais u'a maneira inédita (figs. 27 e 28).

Finalmente, se notarmos ainda que neste caso nem se necessita ter uma fita métrica graduada em qualquer trecho de sua extensão, bastando usar um simples fio de comprimento padrão, far-se á uma idéia da simplicidade construtiva dêste novo tipo de NIVELDIASTIMETRO além da simplicidade relativa de fórmulas que tornam possível a organização de uma tabela niveldiastimétrica universal como foi por nós anunciada, no final da primeira tese.

Dessa maneira se pode obter, simultaneamente, a distância horizontal X e a diferença de nível Y com uma simplicidade que parece merecer o qualificativo de interessantíssima senão espetacular para quem sabe o que tem sido até hoje o problema de medir diretamente (com padrão de comprimento) distâncias, sempre dependendo do conhecimento prévio ou da determinação por outros meios da diferença de nível correspondente, ainda que se procure obter sómente distância horizontal.

Antes de examinarmos êste novo tipo de NIVELDIASTIMETRO, é oportuno e de interesse científico registrarmos, desde logo, a possibilidade de existência de vários tipos de NIVELDIASTIMETRO e não apenas os dois tipos historicamente antes assinalados, a saber:

- a) o primeiro tipo examinado na primeira tese e nas partes anteriores da tese atual;
- b) o segundo tipo baseado na medida direta dos ângulos θ e cujas principais características estudamos num dos subtitulos da parte seguinte intitulada "GENERALIZAÇÃO DA IDÉIA DE NIVELDIAS TÍMETRO".

FIG. 25

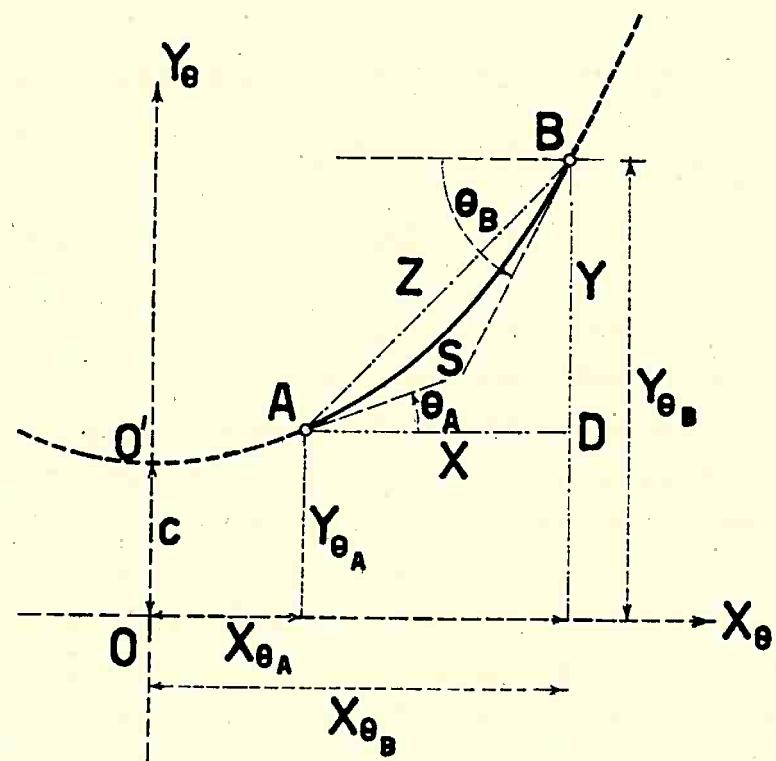
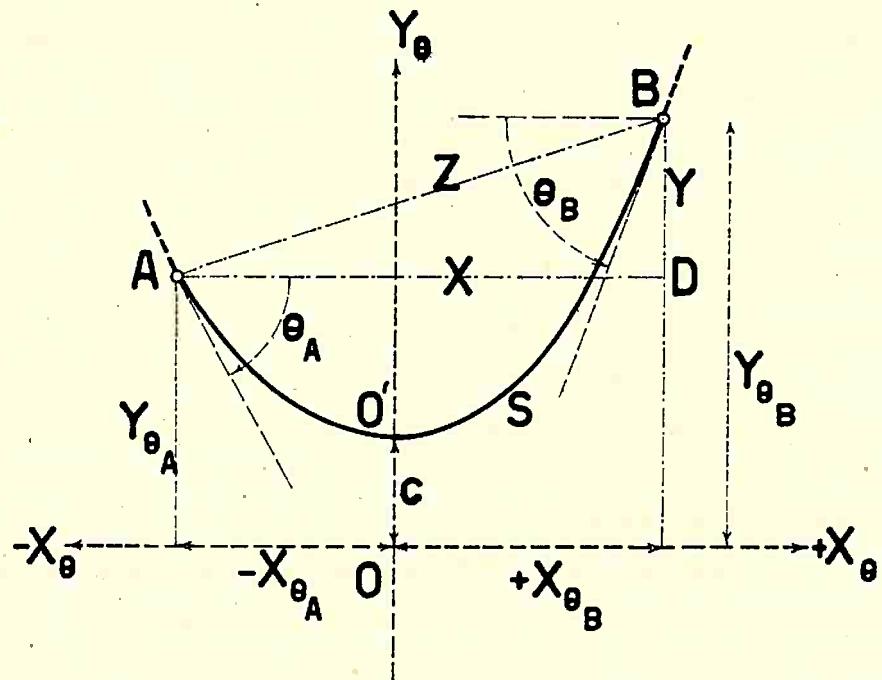


FIG. 26



III - GENERALIZAÇÃO DA IDEIA
DE NIVELDIASTIMETRO

A - ESCLARECIMENTOS. NIVELDIASTIMETRIA

Parece agora oportuno, nesta terceira parte do trabalho, justificar a nossa convicção manifestada ao concluir a tese anterior, "de que é possível analisar-se e construir-se um NIVELDIAS - TIMETRO padrão cujas características constantes permitam calcular uma tabela universal capaz de fornecer : a distância horizontal, a distância vertical (ou diferença de nível) e a distância inclinada entre os pontos extremos de um FIO PADRÃO, pontos estes fixados em posições quaisquer, para cada par de leituras oferecidas pelo a parelho e acessórios em condições ótimas, estudadas e definidas."

Para justificar essa convicção agora, basta imaginar um fio padrão de comprimento S , flexível, fixo pelas suas extremidades A e B em posições quaisquer (por exemplo, como indicam, genericamente, as figuras 25 e 26) e observar, como o vamos fazer :

1º) que a distância horizontal X , a diferença de nível Y e a componente horizontal c das tensões no fio podem ser obtidas por meio das amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B , considerando o fio padrão de comprimento S conhecido como um arco de catenária homogênea;

2º) que, nessa hipótese, as amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B podem ser obtidas por meio de duas leituras indicadas por ação da gravidade em dispositivos de vários tipos a que chamamos genericamente NIVELDIASTIMETRO no qual o nível de bolha ou o fio de prumo são peças essenciais;

3º) que conhecendo o peso unitário, a secção e o módulo de elasticidade do fio padrão, evidentemente a distância horizontal X e a diferença de nível Y podem ser corretas do efeito de alongamento elástico do fio.

Uma vez entendidas e comprovadas essas asserções fica evidente que se pode calcular uma tabela universal em que entrando com as variáveis θ_A e θ_B se possa obter X e Y , e, assim, também a distância inclinada

$$\overline{AB} = \sqrt{X^2 + Y^2} - Z$$

Note-se bem que certas características constantes como o peso unitário e o módulo de elasticidade do fio padrão sendo conhecidas, as correções necessárias para cada par de valores X e Y , devido ao alongamento elástico do fio, podem ser também tabeladas em função do padrão S e de cada par de valores θ_A e θ_B .

Assim se justifica :

a) que os resultados obtidos nas tabelas ficariam sujeitos ao erro sistemático corrigível devido à variação de temperatura de uma época para outra;

b) que o erro sistemático devido à variação de aceleração da gravidade de um lugar para outro da Terra embora pequena, deveria, em princípio, admitir ainda uma correção;

c) que os princípios em que se baseia o NIVELDIASTIMETRO poderão ainda se tornar particularmente úteis àqueles que se dedicam ao estudo especializado da Metrologia.

Essas convicções manifestámos ao encerrar a tese anterior porque já havíamos intuído o desenvolvimento da tese atual, em virtude da experiência adquirida com aquela.

Por isso mesmo é que, por direito de paternidade, intitulamos NIVELDIASTIMETRIA o capítulo da Metrologia, senão da Topografia (cujos fundamentos se encontram nesta tese) que cuida de medidas baseadas em algum tipo de NIVELDIASTIMETRO tal como, de agora em diante, estes dispositivos devem ser entendidos.

Convencionamos chamar NIVELDIASTIMETRO ao dispositivo que, baseado na ação da gravidade, permite obter distância e diferença de nível utilizando, essencialmente, um padrão de comprimento flexível (fio, fita ou corrente métrica) de características definidas (massa, homogeneidade, secção, módulo de elasticidade e coeficiente de dilatação térmica), o nível de bolha ou o fio de prumo, e cuja função imediata é indicar, por ação da gravidade, duas leituras em graduações simples mas apropriadas que nos conduzem àquela finalidade.

NOTA - O NIVELDIASTIMETRO estudado na primeira tese e nas partes I e II da atual representa assim o protótipo que nesta parte III se integra numa "GENERALIZAÇÃO DA IDÉIA DE NIVELDIASTIMETRO" aqui introduzida.

Nesta generalização se verifica que as duas leituras oferecidas por um NIVELDIASTIMETRO podem nos conduzir sempre a raciocinar com duas amplitudes hiperbólicas nas extremidades de um arco de catenária materializado por um fio padrão, de peso unitário, secção e módulo de elasticidade conhecidos.

B - AS FUNÇÕES NIVELDIASTIMÉTRICAS

1. O OBJETIVO

Para facilitar a nossa linguagem e, por motivo mnemônico devido a uma remota analogia que sugerimos a seguir, chamaremos de niveldiastimétricas as funções relativas a um arco S de catenária unitária, abaixo indicadas.

Intitulamos "seno niveldiastimétrico" (sen S) e "cosseno niveldiastimétrico" (cos S) de um arco S de catenária unitária às seguintes relações (figs. 25 e 26) :

$$\text{sen } S = \frac{Y}{S}$$

$$\text{cos } S = \frac{X}{S}$$

Assim, supondo que S representa, fisicamente, o comprimento de um fio flexível e homogêneo suspenso por suas extremidades entre dois pontos A e B (figs. 25 e 26), X representará também fisicamente, a distância horizontal e Y representará a diferença de nível entre aqueles pontos A e B , o que, nos parece, torna sugestivo o nome dado a tais relações.

Em qualquer das figuras 25 ou 26 o triângulo retângulo ABD , que tem Y e X como catetos e Z como hipotenusa, permite escrever :

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\text{Lembremos que } S = \frac{S}{c}, Y = \frac{Y}{c}, X = \frac{X}{c} \text{ e } Z = \frac{Z}{c}$$

na catenária que tem parâmetro c e assim, na catenária unitária, isto é, quando $c = 1$, resultará $S = s$, $Y = y$, $X = x$ e $Z = z$.

Isto posto, podemos escrever :

$$(1) \quad Y = S \cdot \operatorname{senn} S$$

$$(2) \quad X = S \cdot \operatorname{cosn} S$$

$$(3) \quad z = s \sqrt{\operatorname{senn}^2 S + \operatorname{cosn}^2 S} \quad \text{ou}$$

$$(1') \quad y = s \cdot \operatorname{senn} S = s \cdot \operatorname{senn} \frac{s}{c}$$

$$(2') \quad x = s \cdot \operatorname{cosn} S = s \cdot \operatorname{cosn} \frac{s}{c}$$

$$(3') \quad z = s \sqrt{\operatorname{senn}^2 S + \operatorname{cosn}^2 S} = s \sqrt{\operatorname{senn}^2 \frac{s}{c} + \operatorname{cosn}^2 \frac{s}{c}}$$

onde s , y , x e c (minúsculas) podem ser expressos em milímetros por exemplo.

Desta maneira sendo s o comprimento do fio padrão de um NIVELDIASTIMETRO e sendo possível definir as duas funções niveldiastimétricas em termos das duas amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B obtidas nos extremos do fio suspenso e considerado como um arco de catenária, pode-se calcular : a distância horizontal x , a diferença de nível y e a distância inclinada z entre os extremos do fio padrão.

O nosso objetivo aqui não é o do matemático que possa estar interessado em esmiuçar para desenvolver e ostentar todas as características de tais funções.

Também não é nosso objetivo aqui esclarecer o engenheiro ou o arquiteto que possa estar interessado nos efeitos arquitetônicos e nas condições de resistência e estabilidade de ogivas e arcos alteados ou abatidos, formados de arcos de catenária com ordenadas y negativas, isto é, colocados em posição invertida em relação às curvas semelhantes formadas de fios flexíveis suspensos pelas duas extremidades.

O que nos interessa, particularmente, é fazer notar que as funções niveldiastimétricas uma vez tabeladas convenientemente como números reais se tornam úteis quando menos aos topógrafos senão aos metrologistas no estudo ou no emprêgo de um NIVELDIASTIMETRO. Pois a utilização de uma tabela de duas entradas θ_A e θ_B sob este aspecto (figs. 25 e 26) para se obter X e Y se torna relativamente fácil de compreender e de ensinar, devido a uma certa analogia dos senos e cosenos niveldiastimétricos com os senos e

cossenos trigonométricos. Estes, de certa maneira, são casos particulares daqueles quando $\theta_A = \theta_B$.

E agora poder-se-á compreender porque na "Introdução" des ta tese (pag. 3) como na da tese anterior afirmamos e aqui confir mamos :

"A aplicação de rotina do dispositivo (O NIVELDIASTÍMETRO) pode, em primeira aproximação, ser ensinada a pessoa sem grande preparo especializado além do conhecimento de simples operações com números, e permite obter, rapidamente, não só a distância horizontal já corrigida do efeito de curvatura da catenária, mas ainda, simultaneamente, a diferença de nível entre os dois pontos em cujas verticais são fixados os extremos da fita para sua suspensão. Acresce ainda que os resultados não sofrem praticamente influência direta dos acidentes e da inclinação do terreno!"

Por tódos êsses motivos vamos mostrar que uma tabela das funções niveldiastimétricas pode ser calculada por meio de fórmulas bem definidas que caracterizam essas funções.

O sentido da utilidade de uma tabela talvez se torne mais sugestivo fazendo notar que o emprêgo das funções niveldiastimétricas com as quais se obtêm a distância e a diferença de nível procuradas é semelhante ao emprêgo das funções circulares (senos, cossenos e tangentes naturais) quando se reduz ao horizonte uma distância retilínea inclinada e se calcula trigonométricamente uma diferença de nível, com a variante, apenas, que num NIVELDIASTÍMETRO o padrão de comprimento, suspenso pelas suas extremidades, forma uma curva, e os dados neste caso são dois ângulos θ_A e θ_B . O caso retilíneo é apenas um caso particular dêste em que os dois ângulos θ_A e θ_B são iguais entre si.

2. EXPRESSÃO DAS FUNÇÕES SENNIS E COSNIS EM TERMOS DE FUNÇÕES HIPERBOLICAS

de funções hiperbólicas em suas relações com a catenária e consideremos dois pontos A e B extremos de um arco S da curva no caso da figura 25 e no caso da figura 26.

Escrevem-se assim duas expressões (4) e (5) seguintes para os dois casos. Note-se que somente a (5) tem o duplo sinal algébrico : o sinal negativo (-) para o caso da figura 25 e o sinal positivo (+) para o da figura 26.

$$(4) \quad Y = \frac{y}{c} = |\cosh x_{\theta_B}| - |\cosh x_{\theta_A}|$$

$$(5) \quad X = \frac{x}{c} = |\operatorname{argh} x_{\theta_B}| \mp |\operatorname{argh} x_{\theta_A}|$$

onde $y = Y$ quando $c = 1$, isto é, para a catenária unitária. A expressão de $|c|$

$$(6) \quad |c| = \frac{s}{|\operatorname{senh} x_{\theta_B}| \mp |\operatorname{senh} x_{\theta_A}|}$$

se obtém interpretando convenientemente a definição de seno hiperbólico que demos à página 109 e tendo em vista os dois casos das figuras 25 e 26, isto é,

$$(7) \quad |s| = \left| \frac{s}{c} \right| = |\widehat{O'B}| \mp |\widehat{O'A}| = |\operatorname{senh} x_{\theta_B}| \mp |\operatorname{senh} x_{\theta_A}|$$

onde resulta c da expressão (6).

Desta maneira c pode ser expresso em milímetros quando s (minúsculo) é dado nessa unidade.

NOTA - Convencionamos utilizar nas expressões (5), (6) e (7) o sinal algébrico negativo (-) ou positivo (+) conforme o vértice O' da catenária esteja, respetivamente, fóra do intervalo ou dentro do intervalo S da curva contido entre os dois pontos A e B que o delimitam (Ver figuras 25 e 26).

Vejamos agora como expressar Y e X de (4) e (5) em termos que contenham S (maiúsculo).

Para isso basta dividir cada uma dessas expressões pela (7) acima, membro a membro, donde resulta :

$$(4') \quad Y = S \frac{\left| \cosh X_{\theta_B} \right| - \left| \cosh X_{\theta_A} \right|}{\left| \operatorname{senh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{senh} X_{\theta_A} \right|}$$

$$(5') \quad X = S \frac{\left| \operatorname{argh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{argh} X_{\theta_A} \right|}{\left| \operatorname{senh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{senh} X_{\theta_A} \right|}$$

Comparando estas (4') e (5') respetivamente com as expressões (1) e (2) ou (1') e (2') da página 127, as funções nível diastimétricas se escrevem em termos de funções hiperbólicas como segue

$$(8) \quad \operatorname{senn} S = \operatorname{senn} \frac{s}{c} = \frac{\left| \cosh X_{\theta_B} \right| - \left| \cosh X_{\theta_A} \right|}{\left| \operatorname{senh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{senh} X_{\theta_A} \right|}$$

$$(9) \quad \operatorname{cosn} S = \operatorname{cosn} \frac{s}{c} = \frac{\left| \operatorname{argh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{argh} X_{\theta_A} \right|}{\left| \operatorname{senh} X_{\theta_B} \right| + \left| \operatorname{senh} X_{\theta_A} \right|}$$

3. EXPRESSÃO DAS FUNÇÕES $\operatorname{senn} S$ E $\operatorname{cosn} S$
EM TÉRMINOS DE FUNÇÕES CIRCULARES DAS
AMPLITUDES HIPERBÓLICAS

Substituindo nas expressões (8), (9) e (6) acima, as funções hiperbólicas pelas funções circulares equivalentes das respetivas amplitudes hiperbólicas, conforme foi indicado nas expressões (7) e (8) da página 109, se obtém outro aspecto das funções nível diastimétricas e do parâmetro c da catenária em termos de funções circulares, a saber :

$$(8') \quad \operatorname{senn} S = \operatorname{senn} \frac{s}{c} = \frac{\left| \sec \theta_B \right| - \left| \sec \theta_A \right|}{\left| \operatorname{tg} \theta_B \right| + \left| \operatorname{tg} \theta_A \right|}$$

$$(9') \quad \operatorname{cosn} S = \operatorname{cosn} \frac{s}{c} = \frac{\left| \operatorname{logtg} \left(45^\circ + \frac{\theta_B}{2} \right) \right| + \left| \operatorname{logtg} \left(45^\circ + \frac{\theta_A}{2} \right) \right|}{M^* \left(\left| \operatorname{tg} \theta_B \right| + \left| \operatorname{tg} \theta_A \right| \right)}$$

sendo $M^* = 0,434294481903 \dots \dots$ e

$$(6') |c| = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|}$$

NOTA - Nestas expressões (8'), (9') e (6') valem as mesmas convenções introduzidas em NOTA da página 129.

Vemos assim que se pode calcular as funções niveldiastimétricas e o parâmetro da respectiva catenária por meio de tábuas das funções circulares : secantes, tangentes naturais e logaritmos de tangentes.

Conclui-se por isso que é possível construir-se por meio dessas tábuas de funções circulares já existentes, as tábuas com os parâmetros c e as respectivas funções niveldiastimétricas. A estas vamos chamar simplesmente "Tabelas Niveldiastimétricas" que apresentaremos oportunamente.

Finalmente, substituindo as (8') e (9') acima nas respectivas (1') e (2') da página 127, vem :

$$(10) \quad y = s \frac{|\sec \theta_B| - |\sec \theta_A|}{|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|}$$

$$(11) \quad x = s \frac{|\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_B}{2})| \mp |\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_A}{2})|}{M^*(|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|)}$$

expressões que - conhecido o padrão s (minúsculo) em milímetros por exemplo - permitem calcular a distância x e a diferença de nível y também em milímetros por meio de funções circulares das duas amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B supostas obtidas com um NIVELDIASTIMETRO.

Nessas expressões (10) e (11) pode-se substituir y , x e s (minúsculos) por Y , X e S (maiúsculos) no caso da catenária unitária.

E, ainda, das expressões (4), (5) e (6) da página 129, resulta imediatamente :

$$(10') \quad y = c (|\cosh X_{\theta_B}| - |\cosh X_{\theta_A}|)$$

$$(11') \quad x = c (|\operatorname{argh} x_{\theta_B}| \mp |\operatorname{argh} x_{\theta_A}|)$$

sendo c dado pela

$$(6) \quad |c| = \frac{s}{|\operatorname{senh} x_{\theta_B}| \mp |\operatorname{senh} x_{\theta_A}|}$$

onde x , y e c podem ser obtidos em milímetros, uma vez s dado nessa unidade. E o cálculo numérico pode ser realizado por meio de tabelas organizadas para se poder entrar com as amplitudes hiperbólicas θ e obter imediatamente as funções: cosseno hiperbólico, argumento hiperbólico e seno hiperbólico.

4. PRECISÃO TEÓRICA DE UM NIVELDIASTIMETRO

Para se ter uma primeira idéia de como julgar teórica - mente das possibilidades de um niveldiastimetro tendo em vista o seu grau de precisão, vamos obter a diferencial da função $\operatorname{senn} S$ e da função $\operatorname{cosn} S$ em relação às amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B nos extremos de um arco de catenária.

Assim, uma vez definida a ordem de grandeza dos erros $d\theta_A$ e $d\theta_B$ na medida daquelas amplitudes com um NIVELDIASTIMETRO, e considerando variações pequenas mas finitas, poder-se-á obter a ordem de grandeza dos erros dX e dY na distância e na diferença de nível medidas com determinado aparelho.

a) Considerando em primeiro lugar a função $\operatorname{senn} S$

$$(8') \quad \operatorname{senn} S = \frac{\sec \theta_B - \sec \theta_A}{\operatorname{tg} \theta_B \mp \operatorname{tg} \theta_A} \quad (\text{pag. 130})$$

vamos escrevê-la sob outro aspecto (8'') mediante as transformações que se seguem :

$$\operatorname{senn} S = \frac{1}{\cos \theta_B (\operatorname{tg} \theta_B \mp \operatorname{tg} \theta_A)} - \frac{1}{\cos \theta_A (\operatorname{tg} \theta_B \mp \operatorname{tg} \theta_A)}$$

ou

ou

$$\text{senn } S = \frac{\cos \theta_A - \cos \theta_B}{\cos \theta_B \cos \theta_A (\operatorname{tg} \theta_B + \operatorname{tg} \theta_A)}$$

ou

$$\text{senn } S = \frac{\cos \theta_A - \cos \theta_B}{\operatorname{sen} \theta_B \cos \theta_A + \cos \theta_B \operatorname{sen} \theta_A}$$

ou

$$(8'') \quad \text{senn } S = \frac{\cos \theta_A - \cos \theta_B}{\operatorname{sen} (\theta_B - \theta_A)}$$

Diferenciando esta última (8'')

$$(12) \quad d \text{senn } S = \frac{\partial \text{senn } S}{\partial \theta_A} d\theta_A + \frac{\partial \text{senn } S}{\partial \theta_B} d\theta_B$$

resulta :

$$(12') \quad d \text{senn } S = \frac{-\operatorname{sen} \theta_A \operatorname{sen} (\theta_B - \theta_A) + \cos (\theta_B - \theta_A) (\cos \theta_A - \cos \theta_B)}{\operatorname{sen}^2 (\theta_B - \theta_A)} d\theta_A +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \theta_B \operatorname{sen} (\theta_B - \theta_A) - \cos (\theta_B - \theta_A) (\cos \theta_A - \cos \theta_B)}{\operatorname{sen}^2 (\theta_B - \theta_A)} d\theta_B$$

Exemplo numérico :

Suponhamos $\theta_A = 3^\circ \pm 1'$ medido acima do horizonte (fig. 25) e $\theta_B = 9^\circ \pm 1'$ medido abaixo do horizonte.

Aplicando a expressão (8') ou (8'') da página anterior e acima, empregando o sinal negativo do denominador, para $\theta_A = 3^\circ$ e $\theta_B = 9^\circ$, resulta com oito decimais :

$$\text{senn } S = 0,10467188$$

Aplicando a expressão (10) da página 131, que equivale a (1') da página 127 e supondo um padrão $s = 50000$ mm, resulta o valor da diferença de nível

$$y = s \cdot \text{senn } S = 50000 (0,10467188) \quad \text{ou}$$

$$y = 5233,594 \text{ mm}$$

Aplicando agora a expressão (12') para $\theta_A = 3^\circ$ $d\theta_A = \pm 1'$
 $= \pm \frac{1}{3438}$ e $\theta_B = 9^\circ$ $d\theta_B = \pm 1' = \frac{1}{3438}$ no caso acima referi
do resulta :

$$d \operatorname{senn} S \approx \pm 0,00028967$$

E o erro na diferença de nível calculada com o padrão
 $s = 50000$ mm será da ordem :

$$dy = s.d \operatorname{senn} S \approx \pm 14,4835 \text{ mm para } d\theta_A = d\theta_B = \pm 1'$$

Fazendo

$$d\theta_A = d\theta_B = \pm 1'' = \pm \frac{1}{206265}$$

encontramos :

$$d \operatorname{senn} S \approx \pm 0,00000483$$

$$\text{e } dy \approx \pm 0,2414 \text{ mm}$$

Damos a seguir os diversos valores do erro dy calculados diretamente por diferença entre os valores y obtidos pela expressão $y = s \cdot \operatorname{senn} S$ com $\theta_B = + 9^\circ$ e $\theta_A = - 3^\circ$ e os obtidos com θ_B e θ_A próximos destes, diferindo de $\pm 1'$.

NOTA - Consideramos aqui as amplitudes hiperbólicas $\theta < 90^\circ$ positivas (+), quando medidas abaixo do horizonte e negativas (-) quando medidas acima do horizonte de cada ponto da catenária.

$$\begin{array}{lll} \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & y = 5233,5940 \text{ mm} \\ \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = - 2^\circ 59' & y = \underline{5219,1145 \text{ mm}} \end{array}$$

$$\text{Diferença : } +14,4795 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & y = 5233,5940 \text{ mm} \\ \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = - 3^\circ 00' & y = \underline{5226,3130 \text{ mm}} \end{array}$$

$$\text{Diferença : } + 7,2810 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = -3^\circ 00' & y = 5233,5940 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = -3^\circ 01' & y = \underline{5233,5185 \text{ mm}} \\
 & & \text{Diferença : } + 0,0755 \text{ mm}
 \end{array}$$

Assim, sempre com aqueles mesmos

$$\begin{array}{lll}
 \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = -3^\circ 00' & y = 5233,5940 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = -2^\circ 59' & y = \underline{5226,3955 \text{ mm}} \\
 & & \text{Diferença : } + 7,1985 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = -3^\circ 01' & y = 5240,7990 \text{ mm} \\
 & & \text{Diferença : } - 7,2050 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 9^\circ 01' & \theta_A = -2^\circ 59' & y = 5233,6795 \text{ mm} \\
 & & \text{Diferença : } - 0,0855 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 9^\circ 01' & \theta_A = -3^\circ 00' & y = 5240,8780 \text{ mm} \\
 & & \text{Diferença : } - 7,2840 \text{ mm} \\
 \text{para } \theta_B = + 9^\circ 01' & \theta_A = -3^\circ 01' & y = 5248,0825 \text{ mm} \\
 & & \text{Diferença : } -14,4885 \text{ mm}
 \end{array}$$

Verifica-se, nesses exemplos, que é muito mais provável o erro se encontrar abaixo de $|\pm 7| \text{ mm}$ do que entre esse valor e o erro máximo $|\pm 14,49| \text{ mm}$, quando $d\theta_B$ e $d\theta_A$ estão entre $\pm 1'$ nas proximidades de $\theta_B = 9^\circ$ e $\theta_A = -3^\circ$.

b) Considerando em segundo lugar a função

$\cos n S$

$$(9') \quad \cos n S = \frac{\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_B}{2}) \mp \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_A}{2})}{M^*(\operatorname{tg} \theta_B \mp \operatorname{tg} \theta_A)}$$

(pag. 130) onde $M^* = 0,43429448 \dots$ e diferenciando-a

$$(13) \quad d \cos n S = \frac{\partial \cos n S}{\partial \theta_B} d\theta_B + \frac{\partial \cos n S}{\partial \theta_A} d\theta_A$$

e tendo em conta que

$$d \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta}{2}) = \frac{d\theta}{\cos \theta} M^*$$

resulta :

$$(13') \quad d\cosn S = \frac{(tg\theta_B \mp tg\theta_A) - \frac{1}{M \cos \theta_B} \left[\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_B}{2}) \mp \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_A}{2}) \right]}{\cos \theta_B (tg \theta_B \mp tg \theta_A)^2} d\theta_B$$

$$+ \frac{(tg\theta_B \mp tg\theta_A) - \frac{1}{M \cos \theta_A} \left[\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_B}{2}) \mp \log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_A}{2}) \right]}{\cos \theta_A (tg \theta_B \mp tg \theta_A)^2} d\theta_A$$

Exemplo numérico

Suponhamos ainda $\theta_A = 3^\circ \pm 1'$ medido acima do horizonte (fig. 25) e $\theta_B = 9^\circ \pm 1'$ medido abaixo do horizonte.

Aplicando a expressão (9') da página 130, empregando o sinal negativo (-) dos térmos que têm o duplo sinal (\mp) para $\theta_A = 3^\circ$ e $\theta_B = 9^\circ$ resulta com oito decimais :

$$\cosn S = 0,99404716$$

Aplicando a expressão (11) da página 131 que equivale à (2') da página 127 e supondo o mesmo padrão $s = 50000$ mm, resulta o valor da distância horizontal :

$$x = s \cdot \cosn S = 50000 (0,99404716)$$

$$\text{ou} \quad x = 49702,358 \text{ mm}$$

Aplicando agora a expressão (13') acima para $\theta_A = 3^\circ$ $d\theta_A = \pm 1' = \pm \frac{1}{3438}$ e $\theta_B = 9^\circ$ $d\theta_B = \pm 1'$

resulta no caso referido :

$$d \cosn S \approx \mp 0,00003050 \text{ mm}$$

E o erro na distância horizontal calculada com o padrão $s = 50000$ mm será da ordem

$$dx = s \cdot d\cosn S \approx \mp 1,525 \text{ mm}$$

$$\text{para } d\theta_A = d\theta_B = \pm 1'$$

Fazendo

$$d\theta_A = d\theta_B = \pm 1'' = \pm \frac{1}{206265}$$

encontramos

$$d\cosn S \approx \mp 0,000000508$$

$$\text{e} \quad dx \approx \mp 0,0254 \text{ mm}$$

Damos a seguir os diversos valores do erro dx calculados diretamente por diferença entre os valores x obtidos pela expressão $x = s \cdot \cos n S$ com $\theta_B = + 9^\circ$ e $\theta_A = - 3^\circ$ e os obtidos com θ_B e θ_A próximos destes, diferindo de $\pm 1'$.

Com $\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49702,3580$ mm
 para $\theta_B = + 8^\circ 59'$ $\theta_A = - 2^\circ 59'$ $x = 49703,8825$ mm
 Diferença : - 1,5245 mm

Com $\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49702,3580$ mm
 para $\theta_B = + 8^\circ 59'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49703,2610$ mm
 Diferença : - 0,9030 mm

Com $\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49702,3580$ mm
 para $\theta_B = + 8^\circ 59'$ $\theta_A = - 3^\circ 01'$ $x = 49702,6255$ mm
 Diferença : - 0,2675 mm

Assim, sempre com os mesmos

$\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49702,3580$ mm
 para $\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 2^\circ 59'$ $x = 49702,9905$ mm
 Diferença : - 0,6325 mm

para $\theta_B = + 9^\circ 00'$ $\theta_A = - 3^\circ 01'$ $x = 49701,7325$ mm
 Diferença : + 0,6255 mm

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 2^\circ 59'$ $x = 49702,0825$ mm
 Diferença : + 0,2755 mm

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $x = 49701,4490$ mm
 Diferença : + 0,9090 mm

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 3^\circ 01'$ $x = 49700,8230$ mm
 Diferença : + 1,5350 mm

Verifica-se, nesses exemplos, que é muito mais provável o erro se encontrar abaixo de $\pm 0,9$ mm do que entre esse valor e o erro máximo $\pm 1,53$ mm, quando $d\theta_B$ e $d\theta_A$ estão entre $\pm 1'$ nas proximidades de $\theta_B = 9^\circ$ e $\theta_A = - 3^\circ$.

Aceitando como hipótese razoável que os ângulos θ possam vir a ser medidos com erro ainda menor que $\pm 1'$;

notando que o exemplo teórico estudado acima representa uma medida com declividade superior a dez por cento que é um limite prático nas medidas comuns de bases geodésicas :

esse exemplo, embora teórico, não pode deixar de despertar atenção para o assunto e interesse do profissional pelo NIVEL-DIASTIMETRO, mesmo sem falar em outras possibilidades do aparelho.

c) Considerando, em terceiro lugar, a componente horizontal do esforço de distensão

dada pela expressão (6') da página 131, em termos do peso da unidade de comprimento que mede o fio padrão s :

$$(6') |c| = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|}$$

e diferenciando-a em relação a θ_B e a θ_A ,

$$(14) d|c| = \frac{\partial c}{\partial \theta_B} d\theta_B + \frac{\partial c}{\partial \theta_A} d\theta_A$$

ou

$$(14') d c = \left[\frac{-\sec^2 \theta_B}{(|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|)^2} d\theta_B \mp \frac{-\sec^2 \theta_A}{(|\operatorname{tg} \theta_B| \mp |\operatorname{tg} \theta_A|)^2} d\theta_A \right] s$$

Exemplo numérico

Suponhamos ainda, e finalmente, $\theta_A = 3^\circ \pm 1'$ medido acima do horizonte (fig. 25) e $\theta_B = 9^\circ \pm 1'$ medido abaixo do horizonte.

Aplicando a expressão (6') reproduzida acima, empregando o sinal negativo (-) do termo que tem o duplo sinal (+), para $\theta_A = 3^\circ$ $\theta_B = 9^\circ$ e $s = 50000$ mm resulta, em milímetros, com oito algarismos :

$$s = 471802,00 \text{ mm}$$

Se o peso em gramas por metro linear do fio padrão for $p = 25,73522 \text{ grf/m}$

resulta que a componente horizontal do esforço de distensão no fio

suspensos e nas condições acima indicadas, expressa em gramas-força com oito algarismos, será:

$$\begin{aligned} |c'| &= 471802,00 \text{ mm} (0,02573522 \text{ grf/mm}) & \text{ou} \\ |c'| &= 12141,928 \text{ grf} \end{aligned}$$

Aplicando a expressão (14') da página anterior para $\theta_B = 9^\circ$ $d\theta_B = \pm 1' = \pm \frac{1}{3438}$ e $\theta_A = 3^\circ$ $d\theta_A = \pm 1'$ no caso referido, resulta:

$$\begin{aligned} dc &= \pm 2625,8875 \text{ mm} \\ \text{ou} \quad dc' &= \pm 67,57779 \text{ grf} \end{aligned}$$

Fazendo

$$d\theta_B = d\theta_A = \pm 1'' = \pm \frac{1}{206265}$$

encontramos:

$$\begin{aligned} dc &= \pm 43,7648 \text{ mm} \\ \text{ou} \quad dc' &= \pm 1,1263 \text{ grf} \end{aligned}$$

Damos a seguir os diversos valores do erro dc' calculados diretamente por diferença entre os valores c' obtidos por meio da expressão (6') da página anterior, com $\theta_B = + 9^\circ$ e $\theta_A = - 3^\circ$ e os obtidos com θ_B e θ_A próximos destes, diferindo de $\pm 1'$.

$$\begin{array}{lll} \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & c' = 12141,928 \text{ grf} \\ \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = - 2^\circ 59' & c' = \underline{12142,672} \text{ grf} \\ & & \text{Diferença :} \quad - 0,744 \text{ grf} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & c' = 12141,928 \text{ grf} \\ \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = - 3^\circ 00' & c' = \underline{12176,186} \text{ grf} \\ & & \text{Diferença :} \quad - 34,258 \text{ grf} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Com } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & c' = 12141,928 \text{ grf} \\ \text{para } \theta_B = + 8^\circ 59' & \theta_A = - 3^\circ 01' & c' = \underline{12209,888} \text{ grf} \\ & & \text{Diferença :} \quad - 67,960 \text{ grf} \end{array}$$

E sempre com os mesmos

$$\begin{array}{lll} \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 00' & c' = 12141,928 \text{ grf} \\ \text{para } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 2^\circ 59' & c' = \underline{12108,602} \text{ grf} \\ & & \text{Diferença :} \quad + 33,326 \text{ grf} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{para } \theta_B = + 9^\circ 00' & \theta_A = - 3^\circ 01' & c' = 12175,440 \text{ grf} \\ & & \text{Diferença :} \quad + 33,512 \text{ grf} \end{array}$$

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 2^\circ 59'$ $c' = 12074,718$ grf
 Diferença : $+67,209$ grf

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 3^\circ 00'$ $c' = 12107,859$ grf
 Diferença : $+34,069$ grf

para $\theta_B = + 9^\circ 01'$ $\theta_A = - 3^\circ 01'$ $c' = 12141,182$ grf
 Diferença : $+ 0,746$ grf

Nesses exemplos, se verifica que é muito mais provável o erro no valor da componente horizontal do esfôrço de distensão no fio se encontrar abaixo de $|\pm 34|$ grf do que entre esse valor e o erro máximo $|\pm 67|$ grf quando $d\theta_B$ ed θ_A estão entre $\pm 1'$ nas proximidades de $\theta_B = 9^\circ$ e $\theta_A = - 3^\circ$.

De qualquer maneira se conclui que conhecendo a imprecisão nos ângulos θ_A e θ_B se pode avaliar a imprecisão na componente horizontal do esfôrço de distensão e no valor médio da força no fio suspenso. E com isto se pode avaliar, como veremos logo mais, a imprecisão no alongamento elástico do fio, por meio de seu módulo de elasticidade, e a imprecisão nas medidas das distâncias e diferenças de nível na parte que corresponde à imprecisão no avaliar aquêle alongamento elástico.

C - SEGUNDO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO

1. CARACTERÍSTICAS DOMINANTES

O NIVELDIASTIMETRO, tipo angular, foi o segundo desenhado e construído. Como vimos (pags. 117 e seguintes) foi uma consequência implícita nas demonstrações da existência do primeiro tipo, feitas de início empiricamente, baseadas em conceitos elementares, e depois, racionalmente, baseadas nos mesmos conceitos mas interpretados pela teoria da catenária homogênea.

O primeiro tipo foi objeto de estudo da primeira tese e dos tópicos gerais I e II da tese atual.

O segundo tipo (angular) é objeto de cogitação deste sub

FIG. 27

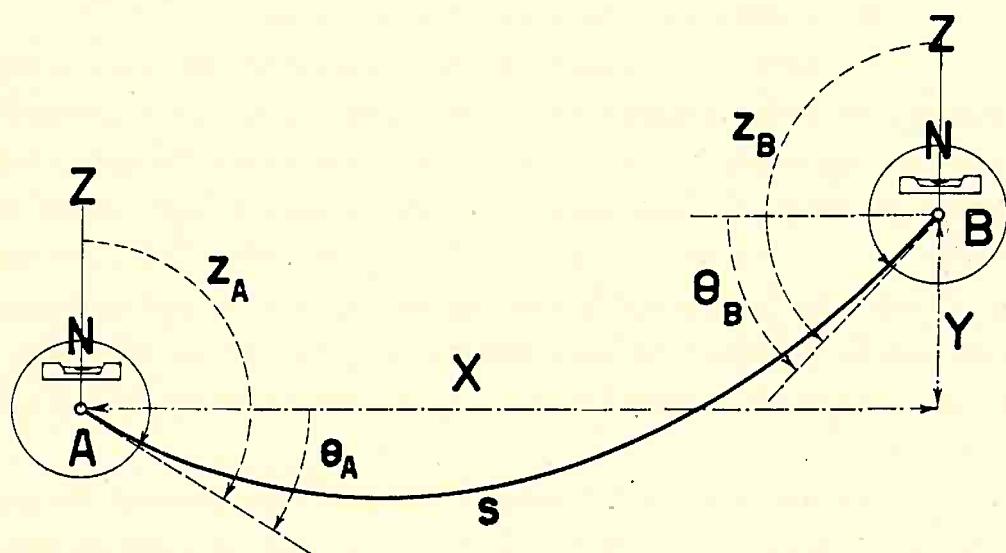
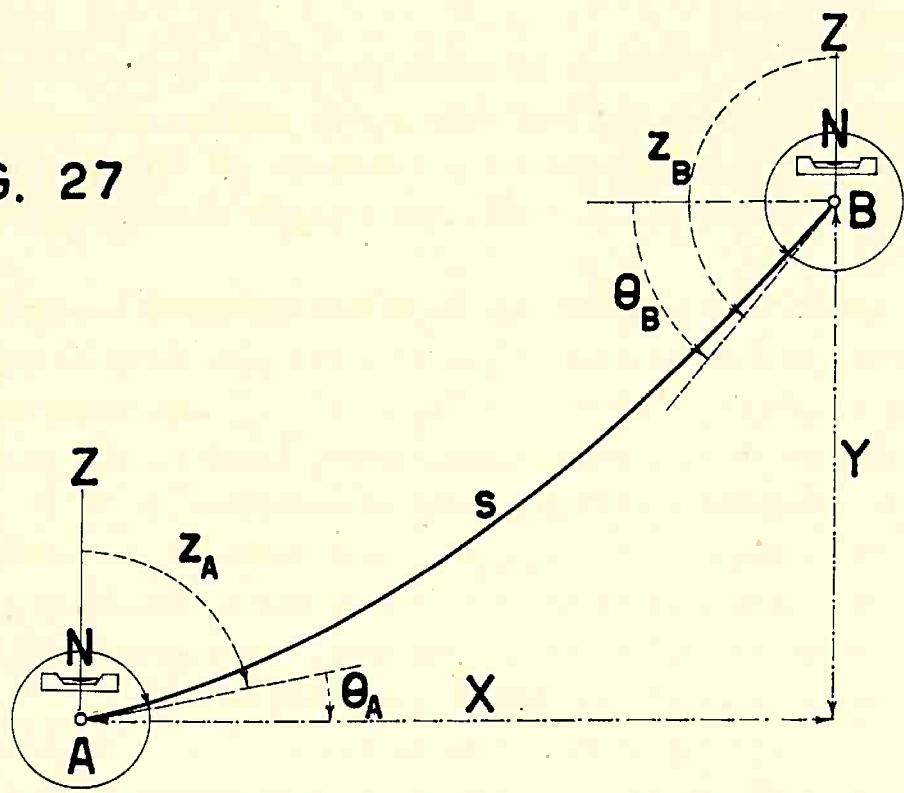


FIG. 28

título C do tópico geral III que estamos desenvolvendo.

Passamos agora ao estudo de algumas de suas características dominantes.

Este tipo é baseado na medida direta de um par de amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B para cada par de medidas procuradas, a saber: a distância horizontal X e a diferença de nível Y entre dois pontos A e B (figs. 25 e 26), com o padrão flexível de comprimento S .

Assim, este segundo tipo de NIVELDIASTIMETRO consiste, essencialmente, em dispositivos (figs. 27 e 28) para medir os ângulos de inclinação ($\theta_A = 90^\circ - z_A$ e $\theta_B = 90^\circ - z_B$) das tangentes nas extremidades de um padrão de comprimento flexível, fio ou fita ou corrente, suspenso e fixo por essas extremidades A e B.

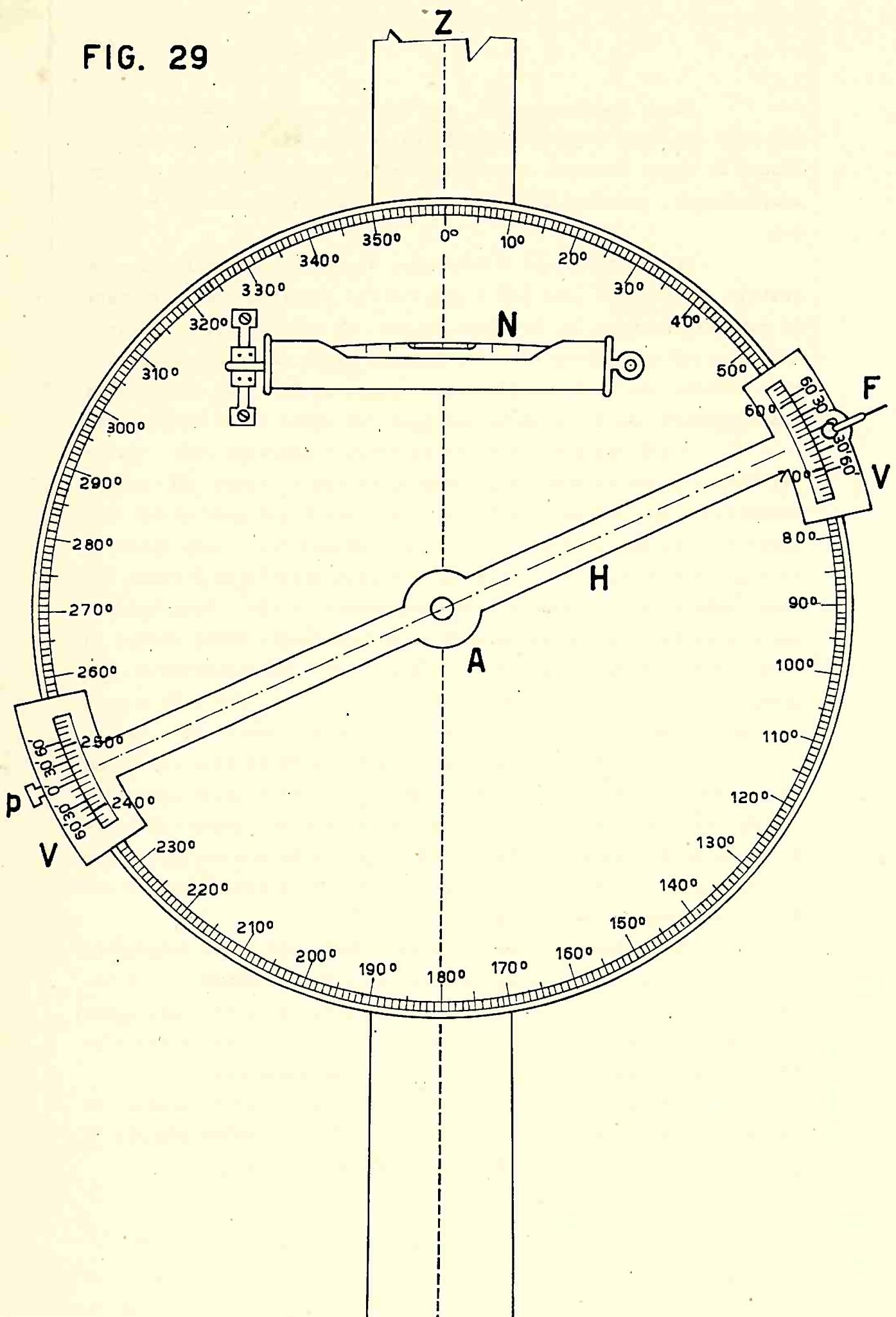
Esses ângulos θ_A e θ_B , o comprimento s do padrão homogêneo e suas características (como sejam, massa específica e secção ou sua massa por metro linear, seu módulo de elasticidade e seu coeficiente de dilatação térmica) permitem obter:

- 1º) o esforço de distensão no fio;
- 2º) a distância horizontal X entre os pontos fixos A e B;
- 3º) a diferença de nível Y entre eles.

O dispositivo compõe-se principalmente de dois círculos graduados, em graus sexagesimais por exemplo (ou dois sectores circulares, ou ainda, duas peças de qualquer outro formato, com algum tipo de graduação adequada, no mesmo plano, e que possam servir teórica e praticamente de substitutos dos círculos), colocados, cada círculo (ou substituto) com seu centro A e B, nas extremidades do padrão flexível de comprimento s (fig. 27 ou fig. 28), e com seus planos no plano vertical que contém os dois pontos indicados A e B.

Uma vez colocado o zero ou origem convencional da graduação de cada círculo (ou substituto) na vertical de cada um dos repetitivos centros A e B (por meio de níveis de bolha N ou fios de prumo), o próprio padrão flexível e homogêneo, suspenso e em seu equilíbrio natural, indica nas vizinhanças de suas extremidades as leituras da graduação dos círculos (ou substitutos) permitindo obter com rigor os ângulos z_A e z_B que as retas tangentes à curva \widehat{AB} (considerada uma catenária homogênea) nos referidos pontos formam com a direção da vertical.

FIG. 29



Esses ângulos z_A e z_B (ou leituras substitutas) empregados como dados em fórmulas matemáticas ou em tabelas numéricas ou ábacos de dupla entrada, convenientemente construídos para emprêgo simplificado, permitem obter as grandezas procuradas acima referidas.

Convém notar que o indicador de leitura angular (ou de leitura substituta) pode ser o próprio fio flexível que, terminando numa pequena argola, se adata ao eixo de cada círculo graduado como sugerem as figuras 27 e 28, podendo girar em torno desse eixo para indicar nas proximidades dos extremos do fio, as inclinações das tangentes, ou as leituras que permitem obter essas inclinações.

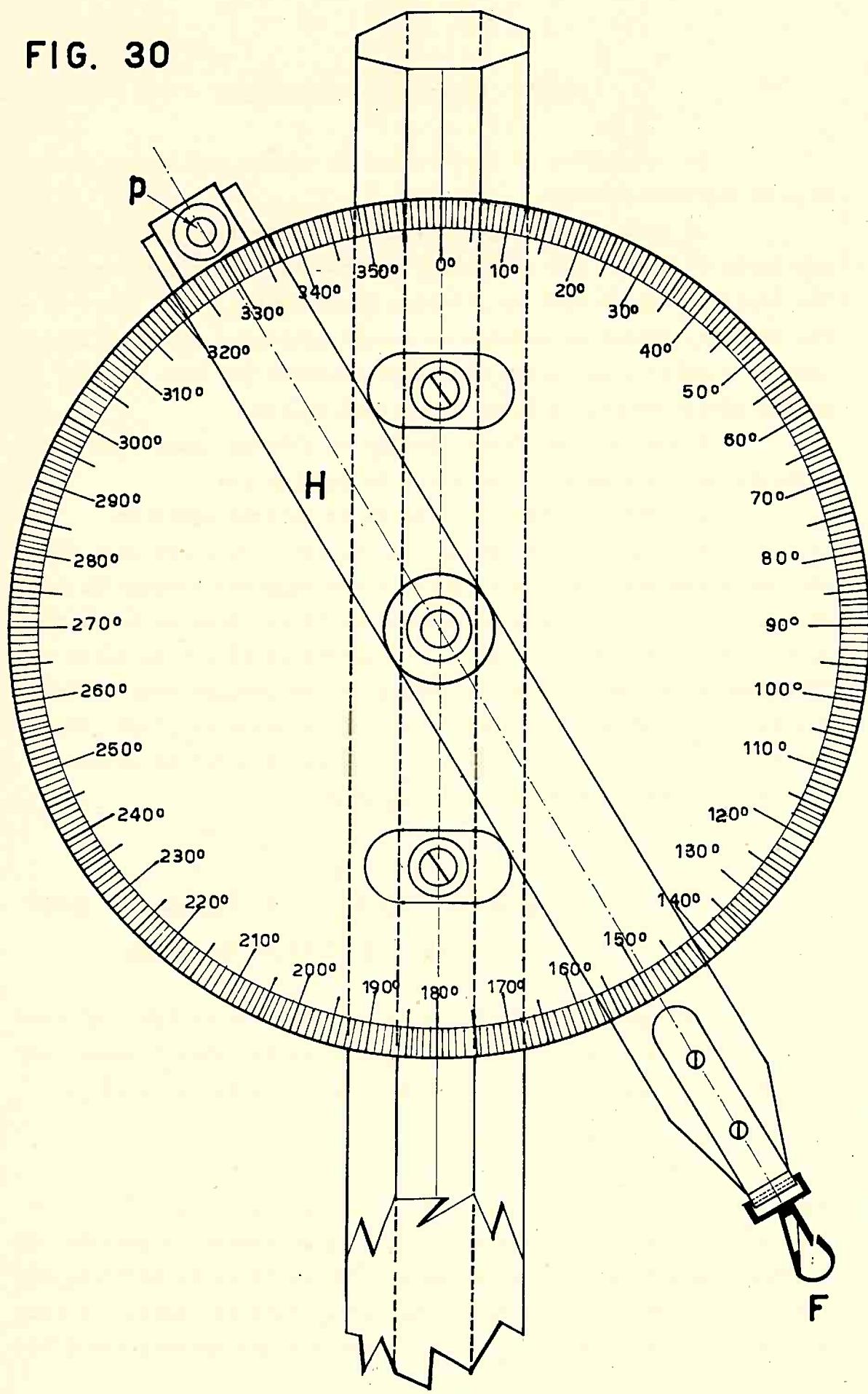
O indicador de leituras do círculo graduado pode ainda ter outros aspectos como, por exemplo, sugere a figura 29 onde é constituído por uma pequena haste ou alidade H que pode girar em torno do eixo horizontal A do círculo graduado fixo numa balisa e cujo plano é verticalizado. Na extremidade periférica F dessa alidade, pode enganchar-se o fio de comprimento padrão. Para aumentar o grau de precisão da leitura pode-se empregar ainda outros recursos como nônios V e lupas ou microscópios. Um dispositivo ou parafuso fixador p. permite fixar os nônios (fig. 29) após o equilíbrio natural do fio suspenso como indicam as figuras 27 e 28.

O nônio V do círculo vertical de um teodolito, como sugere também a figura 29, pode ser construído especialmente para servir de indicador de leitura de sua graduação e ser usado como complemento do NIVELDIASTIMETRO, contanto que tenha seu movimento livre em torno do eixo horizontal A e que a extremidade F do fio padrão possa prender-se ao suporte do nônio.

Dessa maneira, pode-se medir, dentro do rigor compatível com os cuidados da medida dos ângulos θ_A e θ_B , a distância e a diferença de nível entre duas estações com dois teodolitos adequados, utilizando os seus respectivos círculos verticais devidamente adaptados para operações de medida das grandezas indicadas.

Com estas sugestões julgamos ter aqui fixado algumas características essenciais de um NIVELDIASTIMETRO dêste segundo tipo que chamamos também de NIVELDIASTIMETRO ANGULAR.

FIG. 30



MODELO RUDIMENTAR CONSTRUIDO

Por enquanto, só construimos um modelo rudimentar d'este tipo de NIVELDIASTIMETRO.

Os dois círculos graduados de meio em meio grau sexagesimal desde 0° a 360° têm o diâmetro de 158 milímetros cada um deles. São constituidos de matéria plástica transparente (fig. 30) e fixos em duas balisas de madeira de secção oitavada, com 36 milímetros de diâmetro, que podem ser verticalizadas por meio de dois pequenos níveis esféricos fixos um em cada balisa.

Esses círculos foram fixados em alturas iguais contadas a partir da ponta de apôio inferior de cada balisa.

A haste ou alidade H, também de matéria plástica, tem gravado longitudinalmente um traço muito fino que serve para indicar por transparência duas leituras diametralmente opostas da graduação do círculo. Numa extremidade periférica traz um mosquetão F, ao qual se engancha o fio de comprimento padrão, e na outra extremidade o parafuso fixador p para fixar em posição essa alidade H quando o padrão de comprimento flexível e suspenso (figs. 27 e 28) estiver em equilíbrio natural, as bolhas dos níveis centradas e as balisas assim supostas verticalizadas.

2. LEITURAS CORRETAS DO EFEITO DE DESRETIFICAÇÃO DOS NÍVEIS DE BOLHA

As leituras zenitais z_A ou z_B (fig. 27 ou fig. 28) corretas do efeito de desretificação dos níveis de bolha N podem ser obtidas com a média de duas leituras simples, pela expressão :

$$(1) \quad z = \frac{D + 360^\circ - I}{2}$$

onde $D < 180^\circ$ é a primeira leitura indicada pelo aparelho e $I > 180^\circ$ é a segunda leitura indicada após inverter a posição do círculo graduado girando a balisa de 180° em torno da vertical, mantendo fixo o seu ponto de apôio inferior. Essa expressão (1) equivale à leitura zenital (z_A ou z_B) correta e que corresponde à ba-

lisa verticalizada sobre seu apôio (fig. 27 ou fig. 28).

A graduação do círculo varia de 0° a 360° e o zero dessa graduação pode ficar próximo da direção do zenite quando a bolha do nível está centrada.

Quando a bolha está centrada, a direção da vertical é indicada na graduação do círculo pelo zenite instrumental

$$(2) \quad z = \frac{D + 360^\circ + I}{2}$$

Uma vez determinada desta maneira o zenite instrumental Z , inicialmente, com duas leituras D e I de cada círculo na respetiva balisa, a leitura zenital z (z_A ou z_B) correta do efeito de desretificação do nível de bolha pode ser depois obtida com uma única leitura D na primeira posição, ou I na segunda, respetivamente, por uma das expressões seguintes

$$(3) \quad z = D + 360^\circ - Z$$

$$(4) \quad z = -I + Z$$

Qualquer destas expressões (3) ou (4) equivale à leitura zenital (z_A ou z_B) correta e que corresponde à balisa verticalizada sobre seu apôio.

Exemplo numérico

Numa das primeiras medidas que realizámos com este aparelho, obtivemos os valores reunidos a seguir

Posições da balisa com o círculo	Leituras diametralmente opostas de cada círculo	
	no ponto A	no ponto B
Primeira	$102^\circ 15'$	$102^\circ 40'$
	$282^\circ 5'$	$282^\circ 35'$
Segunda	$D_A = 102^\circ 10'$	$D_B = 102^\circ 37,5'$
	$255^\circ 5'$	$255^\circ 15'$
	$74^\circ 40'$	$74^\circ 50'$
	$I_A = 254^\circ 52,5'$	$I_B = 255^\circ 02,5'$

Pela expressão (1) obtém-se :

no ponto A,

$$z_A = \frac{102^\circ 10' + 360^\circ - 254^\circ 52,5'}{2} = 103^\circ 38,75'$$

e no ponto B,

$$z_B = \frac{102^\circ 37,5' + 360^\circ - 255^\circ 02,5'}{2} = 103^\circ 47,50'$$

São as leituras zenitais corretas do efeito de desretificação dos níveis de bolha, obtidas, cada uma, pela média de duas leituras D_A e I_A no ponto A, e D_B e I_B no ponto B, indicadas no aparelho após a centragem da respetiva bolha dos níveis.

Pela expressão (2), pode-se obter os zenites instrumentais dos círculos :

no ponto A

$$z_A = \frac{102^\circ 10' + 360^\circ + 254^\circ 52,5'}{2} = 358^\circ 31,25'$$

e no ponto B

$$z_B = \frac{102^\circ 37,5' + 360^\circ + 255^\circ 02,5'}{2} = 358^\circ 50,0'$$

Estes valores indicam na graduação do respetivo círculo a direção da vertical, quando a bolha de seu nível está centrada, dentro da precisão compatível com os dados exemplificados e com as características do aparelho.

Supondo os zenites instrumentais z_A e z_B determinados em operações prévias, como foi indicado, pode-se obter, posteriormente, leituras zenitais z_A ou z_B corretas do efeito de desretificação dos níveis de bolha, cada qual com uma só leitura D_A ou I_A , D_B ou I_B indicadas após a centragem da bolha do nível.

Com efeito, supondo os zenites instrumentais z_A e z_B calculados acima como se tivessem sido determinados em operações prévias, e as leituras indicadas no quadro da página anterior, como leituras isoladas, resulta da aplicação das fórmulas (3) e (4) (pag. 144), respetivamente :

no ponto A

$$z_A = 102^\circ 10' + 360^\circ - 358^\circ 31,25' = 103^\circ 38,75'$$

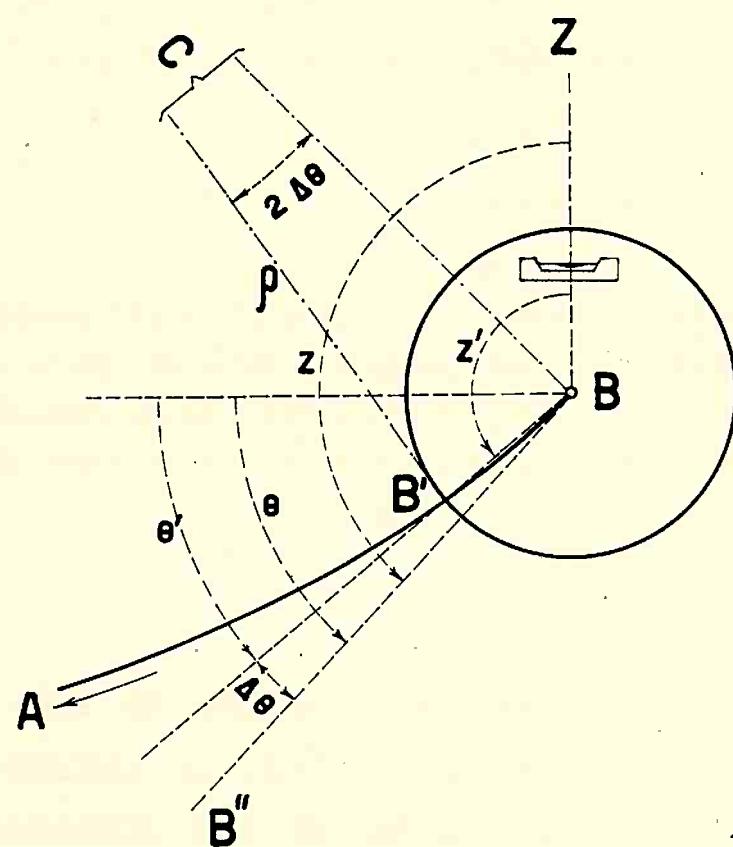
ou $z_A = -254^\circ 52,5' + 358^\circ 31,25' = 103^\circ 38,75'$

e no ponto B

$$z_B = 102^\circ 37,5' + 360^\circ - 358^\circ 50,0' = 103^\circ 47,50'$$

ou $z_B = -255^\circ 02,5' + 358^\circ 50,0' = 103^\circ 47,50'$

FIG. 31



Valores que confirmam os que foram calculados antes no inicio da página anterior pela expressão (1) (pag. 143), como era de se esperar.

Dessa maneira, com o exemplo numérico, sugerimos a utilidade prática das fórmulas e convenções adotadas nas operações de medida com um NIVELDIASTIMETRO do segundo tipo, isto é, de um NIVELDIASTIMETRO ANGULAR.

NOTA - As fórmulas seguintes

$$(1') \quad z = \frac{D - I}{2}$$

$$(2') \quad z = \frac{D + I}{2}$$

$$(3') \quad z = D + Z$$

$$(4') \quad z = -I + Z$$

equivalem às fórmulas (1), (2), (3) e (4) escritas anteriormente, qualquer que seja o valor do zenite instrumental Z , desde zero até 360° , com a única condição já satisfeita nas (1), (2), (3) e (4), de se somar 360° à leitura D sempre que $D < I$.

3. CORREÇÃO DA LEITURA DE CADA CÍRCULO
DEVIDO AO EFEITO DE CURVATURA DO
FIO PADRÃO EM SUAS EXTREMIDADES

A maneira de se prender o fio padrão nas extremidades para sua suspensão sugerida nas figuras 29 e 30 não é, teóricamente, a mais recomendada.

Em princípio, a maneira indicada na figura 31 prevalece teóricamente porque permite o estudo racional do efeito da catenária que daí decorre.

Tenhamos em vista essa figura 31 em que se esquematiza um trecho da extremidade $B'B$ do fio padrão AB onde B é o centro do círculo graduado para a medida da amplitude hiperbólica.

$$(5) \quad \theta = \theta' + \Delta\theta = z - 90^\circ = z' + \Delta\theta - 90^\circ$$

Devido à curvatura do fio padrão em cada extremidade, a amplitude hiperbólica θ na extremidade B é obtida por meio da leitura θ' indicada na graduação do círculo pelo fio suspenso no seu centro, tornando-se necessária a correção $\Delta\theta$.

Admitimos que esta correção $\Delta\theta$ representa, dessa maneira, o ângulo entre a corda do arco $\widehat{BB'}$ da catenária e a verdadeira tangente $\overline{BB''}$ no ponto B desse arco.

Sendo ρ o raio de curvatura desse arco $\widehat{BB'}$, o seu ângulo ao centro será $2\Delta\theta$ (fig. 31).

Sendo $\overline{BB'} = r$ a corda do mesmo arco $2\Delta\theta$ de centro C e raio ρ , podemos escrever:

$$r = 2\rho \operatorname{sen} \Delta\theta$$

e

$$(6) \quad \Delta\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{r}{2\rho}$$

Dessa maneira, conhecendo-se o comprimento $r = \overline{BB'}$ da corda, isto é, o raio do círculo graduado, e podendo-se obter o raio de curvatura do arco $\widehat{BB'}$ da catenária (fig. 31), como vamos ver, poder-se-á calcular a correção $\Delta\theta$ necessária que procuramos.

O raio de uma curva plana num ponto de coordenadas X e Y é dada, em Análise, pela expressão

$$(7) \quad P = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

onde, para a catenária unitária,

$$Y = \cosh X$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{senh}^2 X \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cosh X$$

$$(7') \quad P = \frac{(1 + \operatorname{senh}^2 X)^{3/2}}{\cosh X} = \frac{(\cosh^2 X)^{3/2}}{\cosh X} = \cosh^2 X = Y^2$$

E para a catenária de parâmetro c o seu raio de curvatura ρ será

$$(8) \quad \rho = c Y^2 = c \cosh^2 X = c \sec^2 \theta$$

no ponto de ordenada Y , contada a partir da origem ou base da catenária, isto é, no ponto de amplitude hiperbólica θ , lembrando (pag. 109) que $\cosh X_\theta = \sec \theta$.

Substituindo a (8) na (6) vem :

$$(6') \quad \Delta\theta = \arcsen \frac{r \cdot \cos^2 \theta}{2c}$$

onde pela (5)

$$(9) \quad \cos^2 \theta = \cos^2(\theta' + \Delta\theta) = (\cos \theta' \cos \Delta\theta - \sin \theta' \sin \Delta\theta)^2$$

ou

$$(9') \quad \cos^2 \theta = \cos^2 \theta' \cos^2 \Delta\theta - 2 \cos \theta' \sin \theta' \cos \Delta\theta \sin \Delta\theta + \sin^2 \theta' \sin^2 \Delta\theta$$

Por outro lado, sabemos que o parâmetro c da catenária é calculado pela expressão (pag. 131)

$$(10) \quad c = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta_B| + |\operatorname{tg} \theta_A|}$$

Com os valores das primeiras leituras θ'_B e θ'_A , antes das respectivas correções $\Delta\theta_B$ e $\Delta\theta_A$, calcula-se esse parâmetro, em primeira aproximação, por

$$(10') \quad c' = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta'_B| + |\operatorname{tg} \theta'_A|}$$

onde s sendo o padrão dado em milímetros, c' será obtido nessa unidade.

Supondo, em primeira aproximação, $\Delta\theta$ uma quantidade relativamente pequena, e, por isso, substituindo na (6') $\cos^2 \theta$ por $\cos^2 \theta'$ e c por c' , resulta :

$$(6'') \quad \Delta\theta' = \arcsen \frac{r \cdot \cos^2 \theta'}{2c'}$$

valor que permite obter a correção procurada com bastante aproximação em casos comuns.

De qualquer maneira, em última análise nesta teoria, esse valor de $\Delta\theta'$ posto no lugar de $\Delta\theta$ na expressão (9) ou (9'), permite obter um valor mais aproximado de $\cos^2 \theta$ e a ordem de grandeza do erro teórico da primeira aproximação.

4. EXEMPLO NUMÉRICO DE MEDIDA REALIZADA
COM UM NIVELDIASTIMETRO TIPO ANGULAR

Examinemos uma medida realizada com um aparelho rudimentar descrito antes (pag. 143) (fig. 30) e com as leituras angulares reunidas à página 144 pelas quais obtivemos os valores

$$\theta'_A = z' - 90^\circ = 103^\circ 39' - 90^\circ = 13^\circ 39'$$

$$\theta'_B = z' - 90^\circ = 103^\circ 48' - 90^\circ = 13^\circ 48'$$

(pag. 145) escritos até o minuto próximo embora as leituras só pudessem ser estimadas dentro de $\pm 15'$ uma vez que o círculo era rudimentarmente graduado de $30'$ em $30'$.

NOTA - O círculo graduado de $30'$ em $30'$ tendo o diâmetro de 158 mm, o menor intervalo, em fração de milímetro, é de $\frac{3,1416 (158 \text{ mm})}{2(360)} = 0,69 \text{ mm}$

Aquêles valores θ'_A e θ'_B representam as leituras corretas do efeito de desretificação dos níveis de bolha conforme indicámos antes (pags. 143 e seguintes).

Resta obter as leituras

$$\theta_A = \theta'_A + \Delta\theta'_A$$

$$\theta_B = \theta'_B + \Delta\theta'_B$$

dadas pela expressão (5) (pag. 146) corretas do efeito da curvatura do fio padrão em suas extremidades, sabendo que o comprimento total desse padrão era $s = 10290,0 \text{ mm}$, contado desde o centro A até o centro B dos dois círculos graduados, e sabendo ainda que as duas pequenas hastas extremas e retilíneas (BB' na figura 31) que completam esse comprimento total s eram de $r = 145 \text{ mm}$ cada uma delas.

Calculando as correções $\Delta\theta'_A$ e $\Delta\theta'_B$ pela expressão (6") da página 148

$$\Delta\theta' = \text{arc sen } \frac{r \cdot \cos^2 \theta'}{2 c'}$$

onde c' é dado pela (10') da mesma página

$$c' = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta'_B| + |\operatorname{tg} \theta'_A|}$$

resulta, por partes :

$$c' = \frac{10290,0}{0,24562 + 0,24285} = 21065,8 \text{ mm}$$

e

$$\Delta \theta'_A = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{145 \text{ mm (0,94432)}}{2(21065,8 \text{ mm})} \approx 0,00325$$

$$\Delta \theta'_B = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{145 \text{ mm (0,94309)}}{2(21065,8 \text{ mm})} \approx 0,00325$$

onde

$$\Delta \theta'_A \approx 0^\circ 11' \quad \text{e} \quad \Delta \theta'_B \approx 0^\circ 11'$$

escrito até o minuto próximo.

Assim as leituras corretas serão :

$$\theta_A = 13^\circ 39' + 11' = 13^\circ 50'$$

$$\theta_B = 13^\circ 48' + 11' = 13^\circ 59'$$

Com essas leituras corretas, se pode calcular a distância horizontal x e a diferença de nível y pelas expressões (11') (10') e (6) a páginas 131 e 132 e ali interpretadas, a saber :

$$(6) \quad |c| = \frac{s}{|\operatorname{senh} X_{\theta_B}| + |\operatorname{senh} X_{\theta_A}|}$$

$$(11') \quad x = c \left(|\operatorname{argh} X_{\theta_B}| + |\operatorname{argh} X_{\theta_A}| \right)$$

$$(10') \quad y = c \left(|\cosh X_{\theta_B}| - |\cosh X_{\theta_A}| \right)$$

E, numéricamente, para o exemplo em questão :

$$c = \frac{10290,0 \text{ mm}}{0,24902 + 0,24624} = 20777,0 \text{ mm}$$

$$x = 20777,0(0,24651 + 0,24382) = 10187,6 \text{ mm}$$

Na medida horizontal, para verificação

obteve-se

$$x = \underline{10183,3} \text{ mm}$$

$$\text{Diferença:} \quad 4,3 \text{ mm}$$

e

$$y = 20777,0(1,03054 - 1,02987) = 13,9 \text{ mm}$$

Na medida com nível de luneta para verificação, obteve-se

$$y = \underline{13,0} \text{ mm}$$

$$\text{Diferença : } 0,9 \text{ mm}$$

Esses resultados estão dentro da precisão que se podia esperar uma vez que as leituras dos ângulos θ comportavam uma estimativa dentro de $\pm 15'$ e a maneira de suspensão da fita (fig. 30) não foi a do tipo teórico (fig. 31).

De fato, calculando novamente os valores x e y com os ângulos

$$\theta_A = 14^\circ 01,3' \quad \text{e} \quad \theta_B = 14^\circ 09,7'$$

que diferem dos anteriores de $|11,3'|$ e $|10,7'|$, respetivamente, encontramos :

$$x = 10184,4 \text{ mm}$$

$$\text{Pela medida no plano horizontal} \quad x = \underline{10183,3} \text{ mm}$$

$$\text{Diferença : } 1,1 \text{ mm}$$

$$y = 13,0 \text{ mm}$$

$$\text{Pela medida com nível de luneta} \quad y = \underline{13,0} \text{ mm}$$

$$\text{Diferença : } 0$$

NOTA - Se, como assinalamos à página 149, o intervalo angular de $|30'|$ corresponde ao intervalo de $|0,69|$ mm na periferia dos círculos graduados, a diferença angular da ordem de $|10'|$ corresponderá a uma estimativa linear cerca de $|0,23|$ mm para a leitura direta dêsses círculos.

A componente horizontal da tensão no fio expressa em milímetros sendo de 20777,0 mm e o peso por milímetro sendo de 0,012318 grf/mm, aquela componente em gramas será da ordem de $20777,0 (0,012318) \approx 255,93$ grf.

NOTA - As medidas podem ser feitas com maior segurança nas tensões bem mais elevadas.

Assim, poder-se-á imaginar e calcular, senão intuir, as

possibilidades de precisão que teria um aparelho micrométrico em que os ângulos θ pudessem ser medidos com erros da ordem de $\pm 1''$ (um segundo de arco).

À página 132 e seguintes indicamos uma maneira de considerar as possibilidades teóricas de um NIVELDIASTIMETRO e apresentamos alguns exemplos numéricos, também teóricos, mas sugestivos.

5. CORREÇÃO E ERRO DEVIDO AO ALONGAMENTO ELÁSTICO DO PADRÃO DE COMPRIMENTO

Uma vez que a tensão tangencial ao longo do fio padrão varia de ponto para ponto segundo um diagrama representado pela própria catenária que ele forma no espaço, ocorre, para o cálculo do seu alongamento elástico, a necessidade de determinar a sua tensão tangencial média y_m e compará-la com a tensão y_0 conhecida, na qual o fio é considerado um certo padrão s_0 , para se obter a variação de tensão (ou melhor, esforço de distensão)

$$(1) \quad \Delta y = y_m - y_0$$

que permite realizar a correção Δs devido àquele alongamento.

Assim o valor do padrão considerado em cada medida deve ser

$$(2) \quad s = s_0 + \Delta s$$

onde

$$(3) \quad \Delta s = \frac{s_0 \Delta y}{G \cdot E}$$

sendo G a secção do fio, em milímetros quadrados por exemplo, e E o seu módulo de elasticidade que pode ser dado em quilograma força por milímetro quadrado nesse caso.

A componente horizontal da tensão em qualquer ponto da curva sendo c , a componente vertical média será

$$(4) \quad u_m = c \cdot \operatorname{tg} \psi = c \cdot \frac{y}{x} = c \frac{\operatorname{senn} S}{\operatorname{cosn} S}$$

onde ψ representa o ângulo que a corda \overline{AB} do arco \widehat{AB} da catenária (fig. 25 ou 26) faz com a horizontal. Note-se que

$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{senn} S}{\operatorname{cosn} S}$ em virtude de (1') e (2') da página 127.

E a tensão tangencial média será dada por

$$(5) \quad y_m = \sqrt{c^2 + u^2} = c \sqrt{1 + \left(\frac{u_m}{c}\right)^2}$$

onde seus elementos c e u_m podem ser obtidos por meio da expressão (4) (pag. 152) e com auxílio das (6'), (8') e (9') (pags. 130 e 131), sempre em termos das duas amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B medidas por meio de duas leituras angulares realizadas com o NIVELDIASTIMETRO e devidamente corrigidas conforme vimos antes (pags. 143 e 146).

Assim, só há a considerar aqui o alongamento elástico do fio padrão e o erro no avaliar esse alongamento devido ao efeito dos erros $d\theta_A$ e $d\theta_B$ na medida dos ângulos θ_A e θ_B que influem na tensão média do fio conforme vimos acima e havíamos dito à página 140.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para obter os alongamentos elásticos do fio sujeito a tensão, por efeito da suspensão pelas suas extremidades, e para avaliar a ordem de grandeza do erro nos alongamentos obtidos, é necessário admitir hipóteses determinadas sobre as dimensões do fio e sobre algumas propriedades da matéria que o constitui.

1º exemplo :

Suponhamos um fio padrão de comprimento $s_0 = 48000,00\text{mm}$ em repouso e sob tensão y_0 nula.

Se a sua secção é $G = 2,138 \text{ mm}^2$, seu módulo de elasticidade $E = 16000 \text{ kgf/mm}^2$ e, por suspensão, fica submetido a uma tensão média de 10 kgf, o seu comprimento deverá ser

$$s = 48000,00 \text{ mm} + \Delta s$$

onde a correção Δs calculada pela expressão (3) (pag. 152) será :

$$\Delta s = \frac{48000 \text{ mm} (10 \text{ kgf})}{2,138 \text{ mm}^2 (16000 \text{ kgf/mm}^2)} = 14,03 \text{ mm}$$

2º exemplo :

Suponhamos agora um fio suspenso nas condições indicadas num exemplo dado a páginas 133, 136 e 137 e ali desenvolvidas, a saber : $\theta_A = -3^\circ \pm 1'$ medido acima do horizonte e $\theta_B = +9^\circ \pm 1'$ medido abaixo do horizonte.

Trata-se de avaliar a ordem de grandeza do erro no alongamento elástico obtido para o fio padrão de comprimento $s_0 = 50000$ mm tomado como referência, quando o erro nos ângulos indicados é de $\pm 1'$ e sabendo que o peso total do fio naquele comprimento s_0 corresponde à massa total $M = 1286,761$ gr, sendo sua massa específica $d = 8,1$ gr/cm³ e seu módulo de elasticidade $E = 16000$ kgf/mm²

Se σ é a secção do fio, a sua densidade pode ser expressa por

$$d = \frac{M}{\sigma s_0} \quad \text{e assim}$$

$$\sigma = \frac{M}{d \cdot s_0} = \frac{1286761 \text{mgr}}{8,1 \text{ mgr/mm}^3 (50000 \text{ mm})} = 3,1772 \text{ mm}^2$$

Por outro lado a tensão média y_m dada pelas expressões (4) e (5) (pags. 152 e 153) para os ângulos $\theta_A = -3^\circ$ e $\theta_B = +9^\circ$ pode ser calculada.

Assim, pela

$$(4) \quad u_m = c \frac{y}{x} \quad \text{onde}$$

$$c = 471802,00 \text{ mm} \quad (\text{pag. 138})$$

$$y = 5233,594 \text{ mm} \quad (\text{pag. 133})$$

$$x = 49702,358 \text{ mm} \quad (\text{pag. 136})$$

e resulta

$$u_{m_0} = 49680,142 \text{ mm}$$

E pela

$$(5) \quad y_m = \sqrt{c^2 + u_m^2}$$

resulta

$$y_{m_0} = 474410,4 \text{ mm}$$

E sendo $p = 0,02573522$ grf/mm o peso em grama por milímetro de comprimento do padrão, resulta a tensão média em gramafôrça

$$(5') \quad y'_{m_0} = p \cdot y_{m_0} = 12209,06 \text{ grf}$$

Calculemos agora a tensão média y_m pelas mesmas expressões (4) e (5) (pags. 152 e 153) com os ângulos $\theta_A = -3^\circ 01'$ e $\theta_B = +8^\circ 59'$.

Assim pela (4)

$$u_m = c \frac{y}{x} \quad \text{onde substituindo } c \text{ por } c' \text{ grf}$$

$$c' = 12209,888 \text{ grf (pag. 139)}$$

$$y = 5233,5185 \text{ mm (pag. 135)}$$

$$x = 49702,6255 \text{ mm (pag. 137)}$$

resulta

$$u'_m = 1285,660 \text{ grf}$$

E pela

$$(5) \quad y'_m = \sqrt{c'^2 + u'^2} = \sqrt{12209,888^2 + 1285,660^2} \text{ grf}$$

resulta a tensão média em gramafôrça :

$$(5'') \quad y'_m = 12277,389 \text{ grf}$$

Calculemos em seguida pela expressão (3) (pag. 152)

$$(3) \quad ds = \frac{s_0 \Delta y}{G E}$$

a variação do comprimento padrão $s_0 = 50000 \text{ mm}$, quando os ângulos obtidos $\theta_A = -3^\circ$ e $\theta_B = +9^\circ$ variam para $\theta_A = -3^\circ 01'$ e $\theta_B = +8^\circ 59'$ sendo $G = 3,1772 \text{ mm}^2$ $E = 16000 \text{ kgf/mm}^2$ e

$$\Delta y = y'_m - y'_{m_0} = (12277,389 - 12209,060) \text{ grf}$$

$$\Delta y = 68,329 \text{ grf}$$

Resulta

$$ds = \frac{50000 \text{ mm} (68,329 \text{ grf})}{3,1772 \text{ mm}^2 (16000000 \text{ grf/mm}^2)} \approx 0,067 \text{ mm}$$

Se calculássemos da mesma maneira a variação de s_0 quando os ângulos variam de $\theta_A = -3^\circ$ e $\theta_B = +9^\circ$ para $\theta_A = -2^\circ 59'$ e $\theta_B = +9^\circ 01'$ nas condições indicadas acima, iríamos obter

$$\Delta y \approx -68 \text{ grf} \quad \text{e} \quad ds \approx -0,07 \text{ mm}$$

Assim se conclui que quando nas proximidades de $\theta_A = -3^\circ$ e $\theta_B = +9^\circ$ esses ângulos apresentam uma incerteza de $\pm 1'$ (minuto sexagesimal), o padrão $s_0 = 50000 \text{ mm}$, nas condições indicadas,

oferece uma incerteza da ordem de $\pm 0,067$ mm devido à variação elástica.

E o êrro relativo na medida da distância horizontal, por exemplo, nas mesmas condições, devido a essa variação em cada fia da de 50000 mm, seria no máximo da ordem de

$$\pm \frac{0,067}{50000} \approx \pm \frac{1}{746000}$$

e mais provavelmente abaixo da metade desse valor, isto é, abaixo de $\pm \frac{1}{1592000}$ pelo motivo que indicámos à página 140.

E se a incerteza naqueles ângulos $\theta_A = -3^\circ$ e $\theta_B = +9^\circ$ fôr da ordem de apenas $\pm 6''$ (segundos sexagesimais) aquelle último êrro relativo devido à incerteza na variação elástica ficaria teóricamente reduzido a $\pm \frac{1}{15920000}$.

NOTA - Dessa maneira, uma das características que torna este NIVELDIASTIMETRO, tipo angular, particularmente diferente reside na possibilidade que ele oferece de obter a tensão média no fio padrão (depois de definidas as demais características desse padrão a saber: homogeneidade, massa, secção e módulo de elasticidade) por meio das próprias medidas angulares e, assim, independentemente da conservação dos dinamômetros de mola e do atrito que neles persiste, e independentemente de pesos utilizados e atrito nas polias quando se mede a tensão no fio por meio de pesos distensôres conhecidos, como se faz nos basímetros filares na atualidade.

6. INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Segundo Benoit e Guillaume (Ver Bibliografia), o comprimento $s_{t,f}$ de um fio, à temperatura t e submetido à tensão f , pode ser dado pela expressão:

$$(1) \quad s_{t,f} = s_{0,0} \left[1 + \alpha t + \frac{f}{G E (1 + \gamma t)} \right]$$

onde

$s_{0,0}$ representa o comprimento do fio, em metros por exemplo, à temperatura 0 (zero grau centesimal) e sob a tracção 0 (nula), isto é, em repouso, apoiado sobre um plano horizontal;

α é o seu coeficiente de dilatação térmica média entre as temperaturas zero e t expresso, por exemplo, para cada grau centesimal de variação de temperatura;

G a sua secção, em milímetros quadrados, por exemplo;

E , seu módulo de elasticidade, por exemplo, em quilograma-força por milímetro quadrado;

γ o coeficiente de variação térmica do módulo de elasticidade do fio expresso para cada grau de variação de temperatura.

Sempre a título de exemplo, calculamos a seguir o acréscimo

$$(2) \quad \Delta s_t = s_{0,0} \left[\alpha t + \frac{f}{G \cdot E (1 + \gamma t)} \right]$$

de comprimento de um fio padrão de liga invar, para uma variação de temperatura de 0 (zero) $^{\circ}\text{C}$ a $t^{\circ}\text{C}$ supondo:

$s_{0,0} = 50$ metros, o comprimento do fio em repouso e à temperatura zero centesimal;

$\alpha = (0,338 + 0,00007 t) 10^{-6}$ o coeficiente de dilatação térmica média, entre as temperaturas 0 (zero) $^{\circ}\text{C}$ e $t^{\circ}\text{C}$, expresso para cada grau centesimal; assim para $t = 15^{\circ}$ resulta $\alpha = 0,339 \times 10^{-6}$;

$$f = 12 \text{ kgf}$$

$$G = 3,1772 \text{ mm}^2$$

$$E = 15000 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\gamma \approx 0,47 \times 10^{-3} \text{ para cada grau centesimal.}$$

NOTA - Este coeficiente γ é positivo para os fios invar.

Assim resulta pela expressão (2) :

$$\Delta s_{15} = 12,7558 \text{ mm}$$

valor que representa o acréscimo de comprimento do fio padrão nas condições indicadas.

Supondo na mesma expressão (2) da página anterior $t = 14^{\circ}\text{C}$ e depois $t = 16^{\circ}\text{C}$ e mantendo as demais condições exemplificadas resulta :

$$\Delta s_{14} = 12,7447 \text{ mm}$$

$$\Delta s_{16} = 12,7669 \text{ mm}$$

$$\underline{\Delta s_{15} = 12,7558 \text{ mm}}$$

$$\underline{\Delta s_{14} - \Delta s_{15} = -0,0111 \text{ mm}}$$

$$\underline{\Delta s_{15} = 12,7558 \text{ mm}}$$

$$\underline{\Delta s_{16} - \Delta s_{15} = +0,0111 \text{ mm}}$$

Dessa maneira se verifica que nas condições acima com a temperatura $t = 15^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$, isto é, com uma imprecisão de $\pm 1^{\circ}\text{C}$ na temperatura, resulta uma imprecisão de $\Delta s = \pm 0,011 \text{ mm}$ na correção da dilatação calculada.

E o erro máximo relativo nas mesmas condições, com o padrão de 50000 mm, será da ordem de $\pm \frac{0,011 \text{ mm}}{50000 \text{ mm}} = \pm \frac{1}{5000000}$.

De maneira semelhante se verifica, nas condições referidas, que para uma imprecisão de $\pm 5^{\circ}\text{C}$ na temperatura o erro máximo relativo devido a essa causa no avaliar a correção de dilatação é próximo de $\pm \frac{1}{1000000}$.

7. INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

O peso de um corpo de massa m num lugar em que a aceleração da gravidade é g será

$$p = mg$$

e noutro lugar em que a aceleração da gravidade é g' será

$$p' = mg'$$

E a variação do peso da mesma massa quando ela passa do primeiro para o segundo lugar será

$$(1) \quad \Delta p = p' - p = m(g' - g)$$

proporcional à variação ($g' - g$) da aceleração da gravidade entre os dois lugares.

Assim :

$$(1') \quad p' = p + \Delta p$$

Expressando g e g' em termos da gravidade normal g_n :

$$(2) \quad g = g_n + \Delta g$$

$$(3) \quad g' = g_n + \Delta g'$$

e admitindo, como exemplo, que em Sèvres (ponto de latitude norte próxima de 49°) existe a relação

$$(4) \quad \frac{g}{g_n} = 1,00033$$

e que em Christiania (Oslo - ponto de latitude norte próxima de 60°) existe a relação

$$(5) \quad \frac{g'}{g_n} = 1,00128$$

resulta que a variação de peso da massa m quando passasse de Sèvres para Christiania seria a seguinte, substituindo em (1) os termos g e g' por seus valores dados em (4) e (5) :

$$(6) \quad \Delta p = mg_n(1,00128 - 1,00033) = 0,00095 mg_n$$

ou

$$(6') \quad \Delta p = 0,00095 p_n$$

onde

$$(7) \quad p_n = m g_n$$

é o peso da massa m sob a gravidade normal g_n .

Exemplificando ainda, se um fio invar tivesse em Sèvres o peso unitário

$p = m g = 1,00033 m g_n = 1,00033 p_n = 0,02573522 \text{ grf/mm}$
ele teria sob a gravidade normal g_n o peso unitário

$$(8) \quad p_n = \frac{0,02573522}{1,00033} = 0,02573522(1 + 0,00033)^{-1}$$

ou

$$(8') \quad p_n = 0,02573522 (1 - 0,00033) = 0,02572930 \text{ grf/mm}$$

Dessa maneira, o peso unitário do mesmo fio invar em Christiania seria, pelas (1') e (6') :

$$(9) \quad p' = p + 0,00095 p_n$$

e a variação de peso, passando de Sèvres para Christiania, seria

$$\Delta p = 0,00095 (0,02572930) = 0,00002444 \text{ grf/mm}$$

A influência desse acréscimo de peso no comprimento s_0 do fio, quando suspenso por suas extremidades, será um acréscimo ds devido à distensão elástica do mesmo o qual terá em Christiânia o comprimento

$$s'_0 = s_0 + ds$$

Supondo o fio padrão suspenso nas condições indicadas no "segundo exemplo" figurado à página 154, a tensão média no fio sendo dada pela (5') (pag. 154)

$$(5') \quad y'_{m_0} = p \cdot y_{m_0}$$

onde

y_{m_0} = 474410,4 mm, a variação de tensão devido à variação da gravidade de Sèvres para Christiânia será :

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \Delta p \cdot y_{m_0} = 0,00002444 \text{ grf/mm} (474410,4 \text{ mm}) = \\ &= 11,595 \text{ grf} \end{aligned}$$

E a variação ds do comprimento padrão s_0 = 50000 mm será dada pela expressão (3) da página 155 no exemplo considerado

$$(3) \quad ds = \frac{s_0 \Delta y'}{\sigma E}$$

fazendo

$$\Delta y' = 11,595 \text{ grf} \quad \sigma = 3,1772 \text{ mm}^2 \quad E = 16000000 \text{ grf/mm}^2$$

ou

$$ds = \frac{50000 \text{ mm} (11,595 \text{ grf})}{3,1772 \text{ mm}^2 (16000000 \text{ grf/mm}^2)} \approx 0,011 \text{ mm}$$

isto é, o padrão s_0 terá um comprimento acrescido cerca de 1 centésimo de milímetro, nas condições indicadas.

8. INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DO FIO PADRÃO

O estudo da medida de distância baseado simplesmente no efeito de curvatura da catenária e outros efeitos secundários, tal como se vem de fazer, não levou em conta mais um efeito secundário: o de rigidez da fita ou do fio padrão que tende a diminuir a curva

tura matemática, admitida para a catenária, provocando sua deformação cuja influência é da ordem de grandeza que passamos agora a considerar.

Como se verifica na segunda edição de "Traité de Géodesie" de Pierre Tardi e outro (Ver Bibliografia), a teoria referente à deformação da catenária foi estabelecida em 1912 por O. e E. Henrici. Experiências efetuadas e repetidas no "National Physical Laboratory de Teddington" da Gran Bretanha justificaram os resultados daquela teoria retomada por Young e apresentada por Hotine em janeiro de 1939.

Eis, em resumo, a conclusão a que se chega fundamentada na experiência desses autores.

Na atualidade, a aferição, isto é, a determinação do comprimento s de uma fita ou de um fio padrão só é realizada com fundamento na teoria da catenária homogênea, suspendendo-o por suas extremidades tendo suas marcas de referência em nível e submetendo-o a uma força de distensão tangencial conhecida em suas extremidades e obtendo

$$(1) \quad s = \lambda_0 + \frac{1}{6} a^2 \lambda^3$$

quando se desprezam termos em a^4 e superiores;

$$(2) \quad a = \frac{p}{2T}$$

p é o peso unitário, isto é, por unidade de comprimento do padrão e T a força de distensão tangencial;

λ_0 é a corda horizontal dada lógicamente por um protótipo nas condições da aferição (isto é, força de distensão, temperatura e gravidade) e λ a corda horizontal em condições diferentes ou nas mesmas condições (λ_0 neste caso).

Assim

$$(1') \quad s = \lambda_0 + \frac{p^2 \lambda^3}{24 T^2}$$

Considerando depois o padrão s com suas marcas extremas de referência A e B em níveis diversos (como na figura 27) e supondo que a reta \overline{AB} , corda do arco da catenária inclinada, faz o ângulo ψ com o horizonte, aqueles autores mostraram que a projeção horizontal X é igual a λ (corda horizontal de s na

aferição) multiplicada pelo cosseno de um ângulo ω , diferente de ψ , tal que

$$(3) \quad \sin \omega = \frac{Y}{s}$$

onde Y é a projeção vertical ou diferença de nível entre os dois pontos A e B.

Assim a distância horizontal é dada por

$$(4) \quad X = \lambda \cos \omega$$

considerando sempre, como fundamento, a teoria matemática da catenária homogênea.

Porém, introduzindo nas equações de equilíbrio o efeito de rigidez do fio, que, diminuindo a curvatura da catenária exige uma correção $d\lambda$ positiva, aqueles mesmos autores mostraram que esse efeito é, praticamente, independente do desnívelamento para as declividades que se encontram na prática das medidas, e dado por

$$(5) \quad d\lambda \approx \left(\frac{p^2 \lambda^3}{24 T^2} \right) \sin^2 \psi$$

Assim, éste é o valor da correção positiva sobre a distância horizontal calculada, devido ao efeito de rigidez do fio.

Isto equivale a dizer que esse efeito se encontra implicitamente fornecido por meio de λ_0 da aferição e que o valor obtido no caso do fio considerado como arco inclinado de catenária se aplica assim com essa correção (5) ao caso do fio dotado de certa rigidez.

Desta maneira, se X' for a distância horizontal calculada com os dados da catenária, indicados pelo NIVELDIASTIMETRO, a distância horizontal corrigida do efeito de rigidez será

$$X = X' + d\lambda$$

onde

$$d\lambda \approx \left(\frac{p^2 \lambda^3}{24 T^2} \right) \sin^2 \psi$$

representa a correção devido à deformação da catenária.

Por exemplo, supondo

$$\lambda = 50 \text{ m} : \lambda^3 = 125000 \text{ m}^3$$

$$p = 0,025 \text{ kgf/m} : p^2 = 0,000625 \text{ (kgf/m)}^2$$

$$T = 15 \text{ kgf} : T^2 = 225 \text{ (kgf)}^2 \quad \text{e}$$

$$\text{sen } \psi = 0,1 : \text{sen}^2 \psi = 0,01$$

resulta :

$$d\lambda = 144,6 \text{ micra}$$

D - OUTRO TIPO DE NIVELDIASTIMETRO

1. CONSIDERAÇÕES

Além do primeiro tipo de NIVELDIASTIMETRO estudado nessa tese e na tese anterior vimos (pag. 118 e seguintes) que outros tipos podem existir dos quais já assinalámos dois dêles a saber :

um tipo intermediário (fig. 24) também com um indicador de leituras suspenso como no primeiro, para indicar uma leitura m_1 no ponto mais baixo da graduação da fita métrica, e baseado ainda na medida de um ângulo que caracteriza a amplitude hiperbólica θ_B na extremidade de um dos dois arcos de catenária ; e

o segundo tipo (fig. 27 ou 28) baseado na medida de dois ângulos (que caracterizam amplitudes hiperbólicas θ_A e θ_B) nas extremidades de um simples fio padrão, mesmo sem graduação, suspenso livremente entre dois pontos A e B de que se procura a distância horizontal X e a diferença de nível Y, como indica a figura referida. O exame dêste segundo tipo foi objeto de estudo anterior nesta mesma tese. Sendo êste último de construção e de aplicação mais simples, é o que parece oferecer maior interesse imediato.

No entanto, vamos examinar, apenas sucintamente, mais um tipo de NIVELDIASTIMETRO sob o aspecto puramente teórico, pois nunca foi experimentado.

Pode despertar interesse pelo fato de oferecer as duas leituras necessárias para se obter a distância horizontal e a diferença de nível ambas em uma única extremidade do fio padrão como vamos indicar (fig. 32 ou 33).

FIG. 32

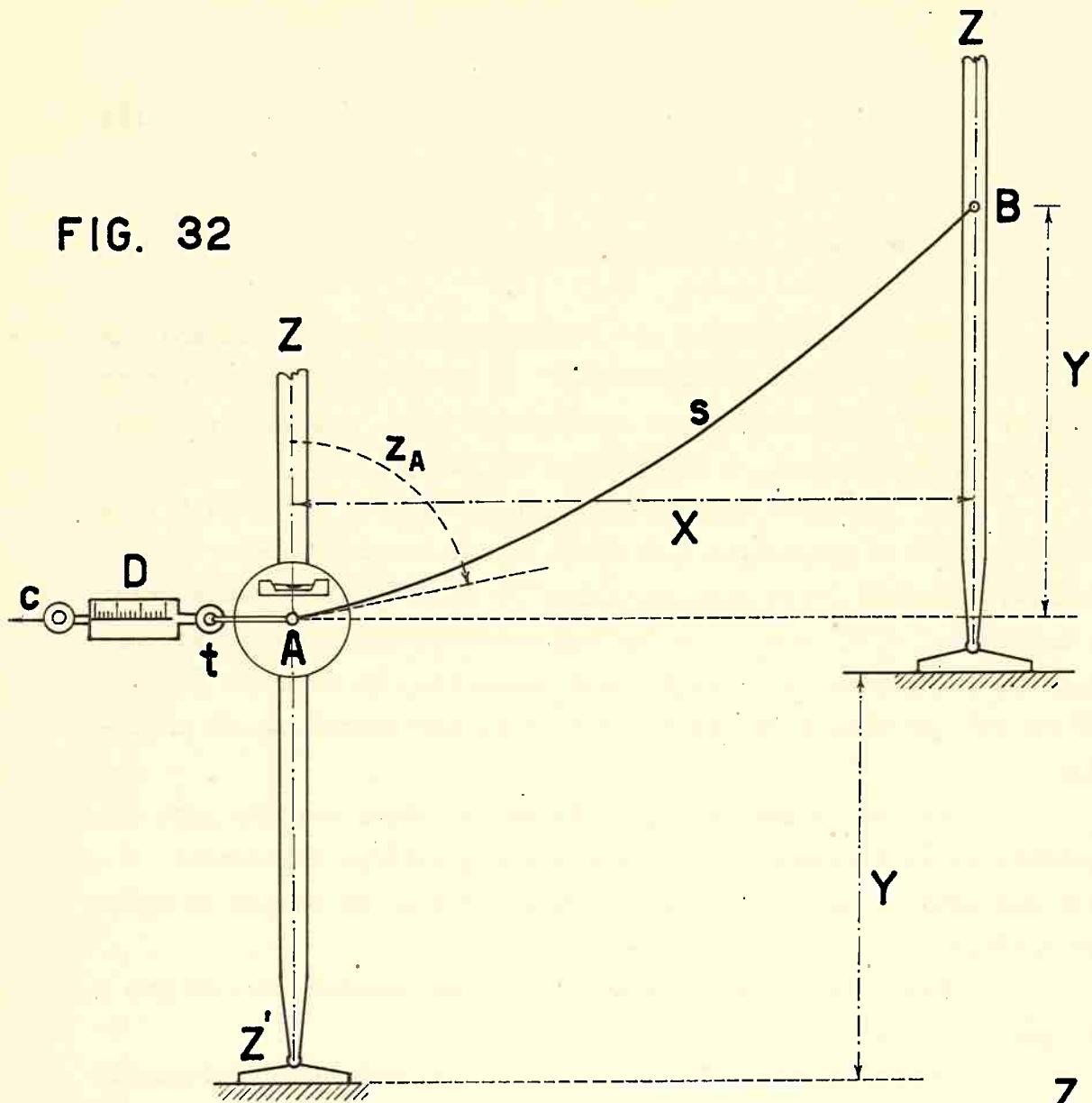
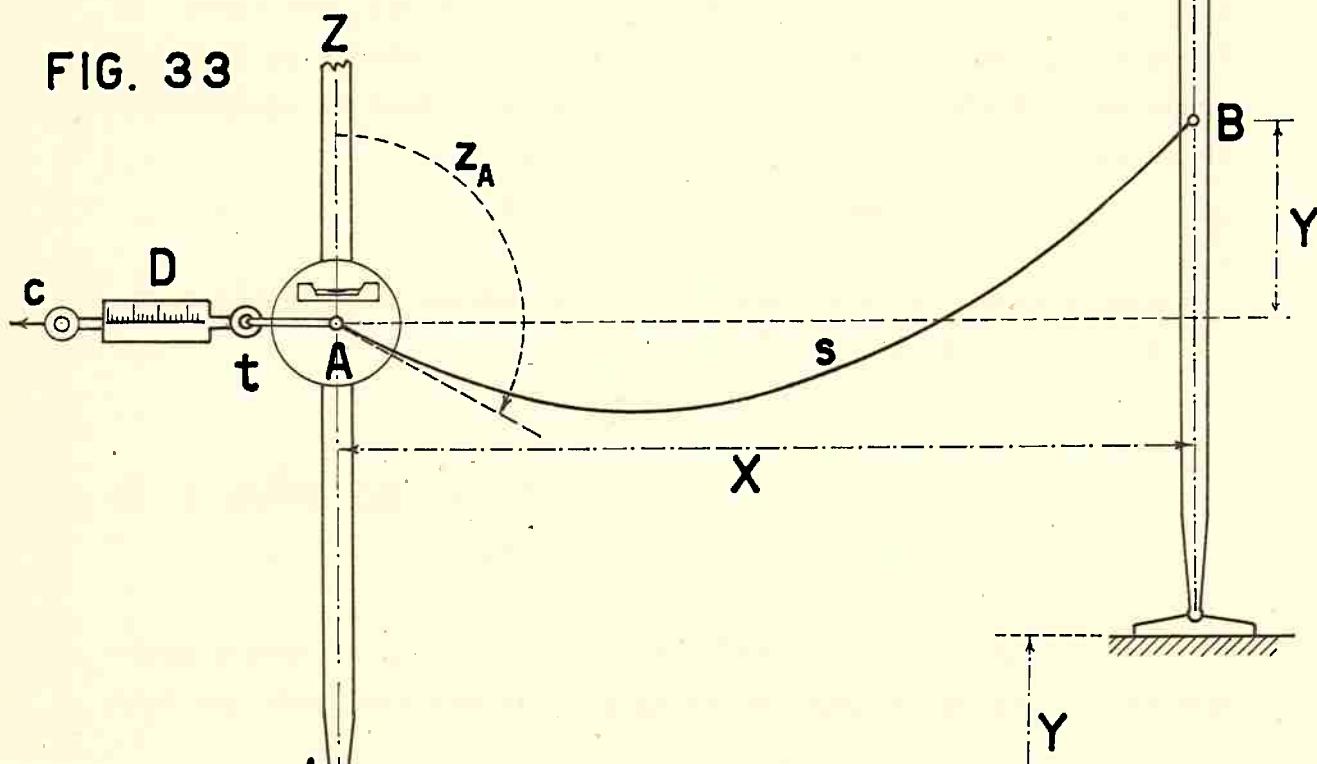


FIG. 33



2. DESCRICAO SUCINTA

Este terceiro tipo de NIVELDIASTIMETRO que podemos chamar "NIVELDIASTIMETRO DINAMOMÉTRICO" é um dispositivo que consta de duas peças essenciais ambas localizadas numa das extremidades do fio padrão flexível, a saber (fig. 32 ou 33) :

1º) um único círculo graduado de centro A (ou peça substitutiva) com o respectivo indicador, igual aos do segundo tipo de NIVELDIASTIMETRO (tipo angular) (fig. 27 ou 28), que permite obter o ângulo $z_A = 90^\circ - \theta_A$ (ou leitura substitutiva) em uma extremidade do fio padrão s, e ainda, conjuntamente, um tirante $\bar{A}t$ (fig. 32 ou 33) que pode girar em torno do eixo horizontal A do círculo;

2º) na extremidade periférica t desse tirante pode enganchar-se um dinamômetro D para medir o esfôrço horizontal c que sustenta em posição vertical o eixo Z'A Z da balisa de apôio do aparelho.

Este eixo Z'A Z passa pela origem convencional da gradação do círculo.

Aquêle esfôrço é o que equilibra a componente horizontal da tensão no fio.

O ângulo $\theta_A = z_A - 90^\circ$ (ou leitura substitutiva que permite obtê-lo) e o esfôrço horizontal c utilizados como dados em fórmulas matemáticas ou em tabelas numéricas ou ábacos de dupla entrada calculáveis por meio daquelas fórmulas, oferecem oportunidade de obter :

1º) a distância horizontal X e

2º) a diferença de nível Y

procuradas entre os dois pontos A e B dados, e que estão indicados nas figuras 32 e 33.

3. CÁLCULO DA DISTÂNCIA HORIZONTAL E DA DIFERENÇA DE NÍVEL

O cálculo da diferença de nível y e da distância horizontal x, em milímetros por exemplo, pode ser realizado por meio

das mesmas fórmulas gerais

$$(1') \quad y = s \cdot \operatorname{sen} S$$

$$(2') \quad x = s \cdot \operatorname{cos} S$$

dadas à página 127 e que serviram de base para o estudo de uma "generalização da idéia de NIVELDIASTÍMETRO" e, assim, para o estudo de um segundo tipo de aparelho (tipo angular).

Indicamos a seguir, para este terceiro tipo de NIVELDIASTÍMETRO (tipo dinamométrico), a maneira de utilizar aquelas fórmulas fundamentais acima, onde :

s representa o comprimento do fio padrão em milímetros e pelas expressões (8') e (9') da página 130

$$(8') \quad \operatorname{sen} S = \frac{|\sec \theta_B| - |\sec \theta_A|}{|\operatorname{tg} \theta_B| + |\operatorname{tg} \theta_A|}$$

$$(9') \quad \operatorname{cos} S = \frac{|\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_B}{2})| + |\log \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\theta_A}{2})|}{M^*(|\operatorname{tg} \theta_B| + |\operatorname{tg} \theta_A|)}$$

em que θ_A é dado por meio do aparelho, da mesma maneira indicada para o segundo tipo (pags. 141, 143 e seguintes);

$$M^* = 0,43429448 \text{ (pag. 110);}$$

θ_B pode ser obtido com o auxílio da expressão (6') da pag. 131 a saber :

$$(a) \quad |c| = \frac{s}{|\operatorname{tg} \theta_B| + |\operatorname{tg} \theta_A|} \quad \text{de onde}$$

$$(b) \quad \operatorname{tg} \theta_B = \frac{s \pm |c \cdot \operatorname{tg} \theta_A|}{|c|}$$

em que

$$(d) \quad c = \frac{f \operatorname{grf}}{p \operatorname{grf/mm}} \quad (\text{em milímetros})$$

f representa o esforço horizontal em gramafôrça indicado pelo dinamômetro do aparelho nas condições já referidas (pag. 164);

p representa o peso unitário do fio padrão em gramafôrça por milímetro.

NOTA - O próprio dinamômetro pode ser graduado para in

dicar c em milímetros, substituindo a graduação que dá f em grama-fôrça por outra que dê $c = \frac{f \text{ grf}}{p \text{ grf/mm}}$ em milímetros, quando se emprega padrão de comprimento com o mesmo peso unitário p grama-fôrça por milímetro.

Dessa maneira, conhecendo-se :

- 1º) o comprimento s milímetros do padrão ;
- 2º) a tensão c , em milímetros, indicada diretamente pelo dinamômetro ou obtida pela expressão (d) quando o dinamômetro fornece a tensão f em grama-fôrça ;
- 3º) a amplitude hiperbólica θ_A obtida por meio do círculo graduado do aparelho ;

pode-se calcular :

θ_B por meio da expressão (b) acima; sen S e cos S pelas expressões (8') e (9') ; e, finalmente, a diferença de nível y e a distância horizontal x procuradas pelas expressões (1') e (2'), tudo com o auxílio de tabelas trigonométricas.

NOTA - Nas expressões (8') (9') e (a) :

1º) emprega-se o sinal algébrico positivo (+) quando a parte mais baixa do fio suspenso está realmente situada no intervalo entre as suas extremidades A e B , como sugere a figura 33;

2º) emprega-se o sinal algébrico negativo (-) quando a parte mais baixa da catenária formada pelo fio suspenso está virtualmente situada fóra do intervalo entre as extremidades A e B , como sugere a figura 32.

Na expressão (b) os sinais algébricos são trocados porque prevalece a convenção acima na expressão fundamental (a) anterior de onde ela proveio.

EXEMPLO NUMÉRICO

Suponhamos a título de exemplo numérico :

1º) $s = 50000 \text{ mm}$ o comprimento do fio padrão suspenso por suas extremidades entre dois pontos A e B;

$$2º) c = \frac{8500 \text{ grf}}{0,025735 \text{ grf/mm}} = 330289 \text{ mm}$$

onde 8500 grf representa o esforço f indicado pelo dinamômetro, e 0,025735 grf/mm representa o peso unitário p do fio padrão;

3º) $\theta_A = 5^\circ 10'$ a amplitude hiperbólica obtida por meio do círculo graduado do aparelho.

NOTA - A parte mais baixa do fio suspenso supõe-se no intervalo situado entre A e B (fig. 33).

Trata-se de calcular em milímetros :

1º) a diferença de nível y e

2º) a distância horizontal x

entre os dois pontos A e B.

Substituindo os dados numéricos na expressão (a) (pag. 165), adotando nela o sinal algébrico positivo (+) e isolando o valor de $\operatorname{tg} \theta_B$:

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{50000 \text{ mm} - 330289(0,09042) \text{ mm}}{330289 \text{ mm}} = 0,06096$$

onde

$$\theta_B \approx 3^\circ 29' 19''$$

Levando este valor de θ_B e o valor dado $\theta_A = 5^\circ 10'$ nas expressões (8') e (9') (pag. 165) resulta :

$$\operatorname{sen} S = \frac{1,00186 - 1,00408}{0,06096 + 0,09042} = - 0,01469$$

$$\operatorname{cos} S = \frac{0,02646 + 0,03922}{0,43429(0,06096 + 0,09042)} = 0,99898$$

Levando estes valores e $s = 50000 \text{ mm}$ nas expressões (1') e (2') (pag. 165) resulta finalmente :

$y = 50000 \text{ mm}(-0,01469) \approx -735 \text{ mm}$ isto é, com o ponto B abaixo de A ;

$$x = 50000 \text{ mm}(0,99898) \approx 49949 \text{ mm}$$

IV - CONCLUSÃO

O leitor que nos tenha honrado com a sua atenção acompanhando a "generalização da idéia de NIVELDIASTIMETRO" que introduzimos na terceira parte da tese atual desde os "esclarecimentos" oferecidos à página 124 e seguintes, e, particularmente, o leitor que nos vem acompanhando desde a página 140 onde iniciamos o estudo e uma análise do segundo tipo de NIVELDIASTIMETRO (tipo angular) já deve ter notado que duas leituras apenas do aparelho, nas condições estudadas e definidas, nos conduzem por meio de fórmulas matemáticas também definidas ao valor numérico da distância horizontal e da diferença de nível entre os pontos extremos de um fio padrão, pontos estes fixados em posições relativas quaisquer.

Assim se infere que as fórmulas indicadas tornam possível construir-se tábuas universais de duas variáveis para NIVELDIASTIMETROS padrões cujas características constantes permitem obter a distância e a diferença de nível corretas, em princípio, do efeito da curvatura da catenária (e do efeito de distensão elástica do fio padrão, levando em conta o seu coeficiente de elasticidade).

Esses valores ficariam ainda sujeitos principalmente à correção devido ao efeito da variação de temperatura de uma época para outra.

Quanto ao efeito da variação da aceleração da gravidade de um lugar para outro da Terra, embora sua ordem de grandeza seja pequena, sendo ele sistemático, pode, em princípio, ser levado em conta, como correção que indicamos antes, se o grau de precisão atingido assim o exigir, tal como as demais correções.

Assim o havíamos previsto e anunciado na conclusão da primeira tese.

Em resumo, temos oferecido neste trabalho :

1º) os principais elementos teóricos necessários para uma última análise experimental do NIVELDIASTIMETRO e para a construção de tabelas niveldiastimétricas e ábacos;

2º) os elementos necessários a sua aplicação imediata em trabalhos de Topografia, empregando fórmulas indicadas.

NOTA - Cabe aos laboratórios com recursos especializados de Metrologia e aos construtores de aparelhos de precisão aquela última análise experimental capaz de concluir até que grau podem ser controlados os elementos em jôgo evidenciados na teoria.

Esperamos contar com o apôio e a bôa vontade da parte de Topógrafos e Geodetas e de tôdos aquêles que se dedicam ao estudo da Metrologia, ou que puderem compreender a utilidade que hâ no coñecimento e na divulgação dos princípios em que se baseia o NIVELDIASTIMETRO. Tôdos êles concorrerão para o progresso da Ciênciia neste sector do conhecimento se nos ajudarem a difundir êstes princípios e se nos oferecerem sugestões para o aperfeiçamento de tais dispositivos cuja utilidade não se pode duvidar em face do que ficou demonstrado nesta tese.

A pesquisa, a descoberta, a introdução nos meios competentes e a divulgação de uma idéia e de técnicas novas constituem tarefa de longa paciênciia que o problema econômico financeiro exige se faça por etapas sucessivas à medida que o tempo, as circunstâncias, a compreensão dos espiritos esclarecidos e as oportunidades se ofereçam para realizá-la.

No presente trabalho concretizamos mais uma etapa necessária para tornar possível a divulgação do uso e estimular novas pesquisas em torno da construção de aparelhos de medida que chamaemos NIVELDIASTIMETRO e de suas consequências.

A finalidade imediata do NIVELDIASTIMETRO sendo a medida de distância e diferença de nível com padrões de comprimento flexíveis, as tabelas niveldiastimétricas são necessárias ao Metrologista, ao Topógrafo, ao Pesquisador, da mesma maneira que o são as tabelas trigonométricas e taquiométricas para o uso de Teodolitos e Taquiometros.

É oportuno fazer notar que se o processo antes existente para a medida de distâncias horizontais (bases) com fios ou fitas métricas exige ainda a medida da diferença de nível por outro pro-

cesso em medida do esfôrço de tracção com dinamômetros ou pesos dis tensores conhecidos, e lembrando que no processo niveldiastimétrico essas medidas com outros aparelhos não são necessárias, é para se concluir que se elas forem utilizadas com o rigor possível, como dados superabundantes, o atual processo poderá vir a obter, em terrenos antes considerados desfavoráveis, a medida direta de distâncias horizontais com um grau de precisão talvez nunca atingido sis temáticamente. Esta é outra convicção nossa que está implícita em bora não o tenhamos provado praticamente nesta tese.

Num trabalho próximo em que pretendemos apresentar as Primeiras Tabelas Niveldiastimétricas, atualmente em fase de cálculo, examinaremos também mais esta nova e interessatíssima questão assim descoberta.

Outra convicção do autor da importância fundamental desta tese reside nas consequências interessantes que advêm da simultaneidade da medida das duas grandezas, a distância e a diferença de nível, o que só poderá ser examinado em outro trabalho.

Esperamos que os espíritos esclarecidos e as oportunidades melhor oferecidas na cátedra nos possibilitem a continuação da tarefa que racionalmente vimos empreendendo na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Conforme pequeno relato acompanhando recomendação que apresentámos em a "PRIMEIRA REUNIÃO DE CONSULTA SÔBRE CARTOGRAFIA sob o patrocínio da COMISSÃO INTERESTADUAL DA BACIA PARANÁ-URUGUAI (CIBPU) e do INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE) e auspícios da SECÇÃO BRASILEIRA DO INSTITUTO PAN AMERICANO DE GEOGRAFIA E HISTÓRIA (IPGH)" havida na cidade de São Paulo, Brasil, entre os dias 22 e 29 de outubro de 1958, tendo em vista a necessidade de enfrentar em nosso País o problema fundamental da Geodesia que é o da medida de distância isenta de erros sistemáticos, e que transcrevemos resumidamente a seguir, verifica-se que os técnicos especializados na matéria estão se ressentindo da falta de novos artifícios que possibilitem comparar melhor, em medidas extensas, os métodos eletrônicos com os métodos clássicos de

medida de distâncias em Geodesia. A nossa tese além de sua utilidade indicada demonstra, fundamentalmente, a existência específica de artifícios e possibilidades inéditas para o Sistema Métrico e para a Metrologia que precisam ser experimentados com recursos a dequados implícitos assim no estudo de Niveldiastimetria.

O que o autor quer insistir e encarecer para encerrar a presente tese é que ela contém as demonstrações físico-matemáticas da existência dos artifícios que devem ser experimentados, enquanto periclitar, como está acontecendo, a própria aplicação do Sistema Métrico quando se cogita de seus últimos graus de aproximação absoluta em Geodesia.

Eis os "consideranda" e a recomendação do autor aprovados naquela Reunião de Cartografia :

CONSIDERANDO :

Não haver, em última análise, o instrumento único de medida capaz, por suas características de rigor e de simplicidade, de eliminar o uso de outros, nos trabalhos de levantamento topográfico e geodésico do País;

Necessária - para a aferição do que existe e venha a existir, sejam trenas e fios ou instrumentos eletrônicos - a instalação de uma ou mais bases de padronização medidas e controladas pelo que há de melhor na atualidade, a saber : o Comparador de interferência lumínosa do tipo Väisälä, com base no metro padrão rígido e o método clássico com o emprêgo de fios ou trenas (invar), para se observar e pesquisar em que condições e até que grau de precisão e até que distância estas trenas e fios podem servir de padrão para os métodos eletrônicos ou podem ser padronizadas por estes métodos, para torná-los todos comparáveis;

RECOMENDA :

que a Comissão Organizadora se digne solicitar e procurar os meios de obter do Conselho Nacional de Pes-

quisas e de outros organismos que julgar conveniente, as verbas e recursos indispensáveis que permitam fazer funcionar uma instituição permanente, autônoma ou anexa a alguma outra já existente, capaz de estabelecer relações públicas, manter a pesquisa e aperfeiçoamento contínuo e divulgação de métodos de medida de distâncias, e realizar a aferição ou a calibração dos instrumentos necessários ao levantamento geodésico e topográfico de nosso País e, porventura, de outros Países interessados na matéria."

Eis um resumo do relato acima referido :

" A ordem de grandeza dos êrros sistemáticos na medida de distância dependem :

- 1) do instrumento de medida empregado;
- 2) de sua aferição ou calibração;
- 3) de uma instituição permanente que realize a aferição ou calibração.

A Instituição das mais antigas e permanentes o "Bureau International des Poids et Mesures", diante da dificuldade de definir padrão mais natural para a Geodesia, definiu o METRO por meio do Protótipo Internacional, e vem utilizando instrumentos que realizam a aferição ou a calibração de outros semelhantes com recursos de laboratório e de fios por meio de comparadores relativamente curtos mas, internacionalmente reconhecidos para tais aferições e calibrações.

Alguns êrros sistemáticos podem ocorrer na aferição de fios e trenas métricas quando padronizados em laboratórios por meio de comparadores curtos, pois a sua utilização no campo se faz de maneira diferente.

A "Associação Internacional de Geodesia" (A. I. G.) organismo da União Geodésica e Geofísica Internacional (U. G. G. I.), na sua V Assembleia Geral reunida em Lisboa em 1933, por sugestão do então Diretor do Instituto Geodésico Finlandês, Dr. Ilmari Bornsdorff, apro-

vou um projeto de resolução recomendando o estabelecimento de bases de padronização de 500 a 1000 metros de comprimento em diferentes países, com o objetivo de conseguir-se escala uniforme para as triangulações de cada país ou região.

A mesma Associação (A.I.G.) na sua IX Assembleia Geral reunida em Bruxelas em 1951, por proposta daquêle Instituto Geodésico Finlandês aprovou um projeto de resolução traduzido a seguir :

" A Associação Internacional de Geodesia considerando o elevado grau de precisão obtido na medida de uma base padrão na Finlândia com um instrumento de interferência luminescente, recomenda que tais bases sejam medidas por método semelhante em diferentes países pelas organizações interessadas e solicita que o Bureau da Associação facilite os arranjos necessários para que as bases assim medidas possam ser utilizadas quando fôr desejado, por países vizinhos para comparar os resultados obtidos por esse processo com os obtidos com fios e trenas métricas aferidas com os padrões do "Bureau International des Poids et Mesures".

Interpretando Comunicações e artigos técnicos publicados no Vol. 2 dos "Proceedings" da Conferência Regional das Nações Unidas sobre Cartografia para a Ásia e o Extremo Oriente, realizada em Mussorrie, na Índia, em fevereiro de 1955, encontram-se novas e recentes contribuições versando a matéria que continuamos a considerar resumidamente.

Segundo informação do Dr. I. J. Kukkamäki da Delegação da Finlândia e do Instituto Geodésico Finlandês, a União Geodésica e Geofísica Internacional em Assembleia de Roma aprovou resolução para que fosse medida uma base de padronização em cada país europeu utilizando o método de Väisälä (ou aparelho semelhante) para assegurar uma escala uniforme em todas as redes e para calibrar

brar as trenas métricas de invar bem como os geodímetros.

O Instituto de Geodesia Aplicada de Frankfurt da República Federal da Alemanha vem estudando cuidadosamente o aparelho de Väisälä no sentido de realizar certos aperfeiçoamentos que são relatados pelo seu Diretor Dr. Erwin Gigas em dois artigos intitulados "Measurement of Standard Base Lines" e "Problem of the necessity to repeat Base-Line Measurements in the European Triangulation Net" e oferecidos como sugestões da Delegação da Alemanha na Conferência das Nações Unidas sobre Cartografia realizada na Índia em 1955.

Eis a seguir, em resumo, algumas manifestações e sugestões desse representante da Delegação Alemã.

"A questão de como medir uma base de padronização não tem sido suficientemente resolvida na minha opinião. O comparador de Väisälä, na verdade, é um excelente instrumento para medidas de precisão. Por décadas tem sido realizada com este instrumento a medida de bases na Finlândia, e, recentemente, na Finlândia e nas proximidades de Buenos Aires essas medidas foram ampliadas até próximo de um quilômetro. Além disso, a precisão interna sem considerar as influências sistemáticas é muito elevada. Mas não sabemos o grau de precisão absoluto, enquanto faltarem medidas comparáveis. Estas medidas de comparação, contudo ainda não podem ser realizadas com o mesmo instrumento, mas um outro artifício tem de ser aplicado sob condições extremamente diferentes. Não estamos em condições de julgar a verdadeira precisão até que uma tal comparação possa ser feita."

"Se se pretende obter um valor absoluto de comparação para medidas de distâncias, então será necessário que as bases de padronização sejam medidas de maneiras diferentes uti-

lizando instrumentos diferentes para garantir a confiança nas medidas isoladas. Talvez não possamos estar contra as medidas de comparação por meio de fitas invar cujo comprimento tenha sido testado com diferentes distâncias padrão localizadas em lugares tais como Washington, Teddington, Braunschweig e Paris. Depois da execução de tais medidas as fitas têm de ser testadas de novo com as distâncias padrão."

"Eu tomo a liberdade de sugerir que deveis não vos restringir a um único aparelho para estabelecer bases padrão. Sugiro que além do comparador de interferência Finlandês o comparador Alemão possa ser utilizado para com paração e além disso, as bases padrão devem ser medidas por meio de fitas invar de primeira qualidade que tenha sido utilizada por vários anos.

Nas últimas décadas tem havido experiências valiosas por meio de fitas invar e cujos fundamentos essenciais não têm sido publicados em relatórios apesar de sua decisiva importância para a execução destas medidas de precisão. Penso, por exemplo, no uso de engenhosos esticadores apropriados, de suporte de polia e outros."

NOTA - Os grifos são nossos.

Encerrando, assim se encarece e se verifica que a importância da presente tese pode decorrer também da importância básica para a Geodesia e a Metrologia de uma das grandezas fundamentais da Física, periclitante quando se cogita de seus últimos graus de proximação.

Neste sentido acreditamos residir implícito em Niveldias timetria (cujos fundamentos se encontram nesta tese) possibilidade

des teóricas, em última análise, de comparar entre si padrões dos dois tipos que chamamos padrões de massa e padrões eletrônicos, o que implica averiguar com que grau de precisão e em que condições se poderia conhecer a velocidade da luz ou das ondas eletromagnéticas para os fins da Geodesia.

B I B L I O G R A F I A

APPELL, P. e DAUTHEVILLE, S. - "Precis de Mécanique Rationnelle"
Troisième Édition revue et augmentée". Paris. Gauthier-
Villars et Cie. Editeurs.

BENOIT, J. RENÉ et GUILLAUME, CH. ED. - "La Mesure Rapide des Ba-
ses Géodésiques". Cinquième Édition. Paris, Gauthier-Vil-
lars et Cie., Editeurs, 1917.

BORTOLOTTI, ENEA e AGOSTINI, AMEDEO - "Esercizi di Geometria Analí-
tica". Bologna, Nicola Zanichelli. Editore, 1925 e 1926.

CINTRA DO PRADO, L. - "Reduções de medidas à gravidade normal" -
Separata do "Boletim do Círculo de Técnicos Militares".
Dez. 1945. Nº 25.

COMBEROUSSÉ, CHARLES DE - "Cours de Mathématiques" Paris. Gauthier
Villars, Imprimeur. "Appendice au Sixième Livre. Notions
sur les fonctions hyperboliques".

DUPUIS, J. - "Tables de Logarithmes". Paris. Librairie Hachette &
Cie., 1891.

FAYE, H. - "Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique". Paris .
Gauthier-Villars, Imprimeur.

FERRAZ DE MESQUITA, PAULO - "Niveldiastímetro" Novo dispositivo pa-
ra medir diretamente e ao mesmo tempo distâncias e dife-
renças de nível. Tese e comunicação à douta Congregação
da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - São
Paulo, Brasil, 1948.

FRANCESIO, ERNESTO - "La catenaria nelle sue applicazioni allo stu-
dio meccanico dei conduttori delle linee aeree". Artigo
da Revista Italiana "L'Elettrotecnica" de 10-10-1937 ,

25-10-37 e 10-11-1937. Milano.

HOUEL, J. - "Recueil de Formules et de Tables Numeriques". Troisème Édition. Paris. Gauthier-Villars, Imprimeur. 1901.

HUTTE, "Manuel de l'Ingenieur" - Édition Française. Paris & Liège Ch. Béranger, Éditeur. 1911.

JAHNKE-EMDE - "Tables of Functions" with formulae and curves. Second (revised) edition 1933, B. G. Teubner. Leipzig and Berlin.

PETERS, PROF. DR. J. - "Eight-Place Table of Trigonometric Functions" for Every Sexagesimal Second of Quadrant. Photo-Lithoprint Reproduction, Edwards Brothers, Inc. Ann Arbor, Michigan. 1943. Berlin 1939. Verlag des Reichsamts für Landesaufnahme.

POTIN, L. - "Formules et Tables Numériques" relatives aux fonctions circulaires, hyperboliques, elliptiques. - G. Doin & Gauthier-Villars Editeurs a Paris. 1925.

TARDI, PIERRE et GEORGES LACLAVÈRE - "Traité de Géodesie" - Deuxième Édition - Paris, Gauthier- Villars.

United-Nations - Regional Cartographic Conference for Asia and the far East; 15-25 February 1955, Mussoorie, India. Vol. 2 Proceedings of the Conference and Technical Papers. United Nations. New York.