

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP

**Departamento de Engenharia de
Estruturas e Fundações**

ISSN 0103-9822

BT/PEF/9520

**Uma Aplicação da Teoria Constitutiva dos
Materiais Elásticos-Lineares Sujeitos a
Vínculos Internos: Dedução Exata da
Equação de Lagrange para Placas Finas**

**João Maurício Sapienza
Nelson Achcar**



Escola Politécnica - EPBC



31200053707

895743

São Paulo - 1995

Sapienza, João Maurício

Uma aplicação da teoria constitutiva dos materiais elásticos-lineares sujeitos a vínculos internos : dedução exata da equação de Lagrange para placas finas /J.M. Sapienza, N. Achcar. -- São Paulo : EPUSP, 1995.

15p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9520)

1. Elasticidade - Teoria 2. Equação dinâmica 3. Estruturas - Cálculo I. Achcar, Nelson II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações III. Título IV. Série

CDU 539.31
531.3
624.04

UMA APLICAÇÃO DA TEORIA CONSTITUTIVA DOS MATERIAIS ELÁSTICOS-LINEARES SUJEITOS A VÍNCULOS INTERNOS : DEDUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DE LAGRANGE PARA PLACAS FINAS

RESUMO

Nas deduções clássicas da equação de Lagrange para placas finas com pequenas deformações admite-se que o material que as compõe é linearmente elástico, isotrópico e que os deslocamentos satisfazem as condições de Kirchhoff. Juntas, estas hipóteses são contraditórias.

Neste trabalho é apresentada uma rigorosa dedução da equação de Lagrange devida a Podio-Guidugli. Nela, as hipóteses sobre os deslocamentos de Kirchhoff são tomadas como "vínculos internos" e o material é o de maior simetria material compatível com tais vínculos, ou seja, transversalmente isotrópico.

APRESENTAÇÃO

" ... and what are these fluxions? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we call them the ghosts of departed quantities? ... "

Bishop Berkeley in *The Analyst* (a discourse addressed to an infidel mathematician)

As críticas dirigidas por Berkeley às deduções dos primórdios do cálculo não pretendiam contestar seus resultados, apenas apontavam a fragilidade dos argumentos que os sustentavam. Noções (ou "ficções úteis à invenção matemática", segundo Leibniz) como "infinitésimos" ou "acréscimos evanescentes" não eram conceitos estabelecidos com suficiente rigor para que sobre eles se erigissem argumentos matemáticos. Foi o esforço de sucessivas gerações que permitiu que se chegasse à formalização por ϵ 's e δ 's dos conceitos de limite, continuidade e correlatos que fundamentam o cálculo, tal como o estudamos hoje nos primeiros anos da faculdade.

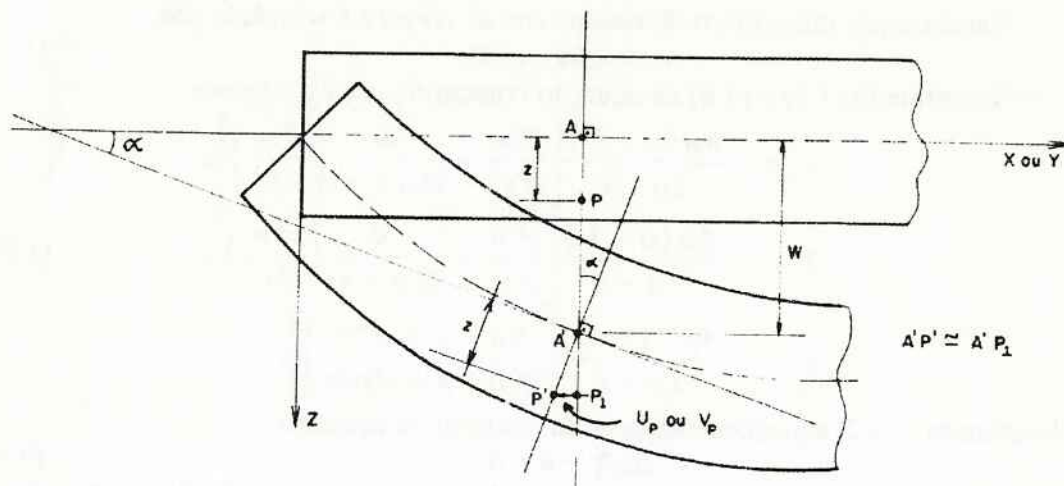
Entretanto, nos mais variados campos das ciências físicas e de engenharia, ainda hoje se argumenta com os mesmos conceitos e métodos criticados por Berkeley. Um caso exemplar é o da equação de Lagrange para placas finas. A dedução clássica enfrenta a dificuldade de compatibilizar as hipóteses cinemáticas de Kirchhoff com a hipótese constitutiva do material ser isotrópico, supondo certas grandezas pequenas o suficiente para que possam, assim como os "incrementos evanescentes", serem desprezados sempre que necessário.

Uma dedução rigorosa da equação de Lagrange, baseada nos modernos conceitos da Mecânica do Contínuo foi obtida por Podio-Guidugli em artigos publicados em [Podio-Guidugli e Vianello, 1992], [Podio-Guidugli e Lembo, 1991] e [Podio-Guidugli, 1989]. Esta demonstração foi estudada por João Maurício Sapienza que a apresentou, junto com seus pré requisitos e uma crítica da dedução clássica, como dissertação de mestrado. O que se segue é uma versão abreviada dessa dissertação.

1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA E COMENTÁRIOS SOBRE A DEDUÇÃO CLÁSSICA DA EQUAÇÃO DE LAGRANGE

O problema que se propõe a resolver é determinar os deslocamentos u_p , v_p e w_p nas direções dos eixos x , y e z respectivamente de um ponto P qualquer de uma placa, submetida a um carregamento distribuído

$$\mathbf{p}(x,y,-h/2) = p(x,y)\bar{\mathbf{k}}. \quad (1.1)$$



$$u_p = -z \operatorname{sen} \alpha \cong -z \operatorname{tg} \alpha = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

A resolução deste problema está baseado nas hipóteses de Kirchhoff, descritas da seguinte forma, conforme [Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1984]:

- H1)** Não há deformação no plano médio da placa.
- H2)** Pontos da placa pertencentes inicialmente à normal ao plano-médio da placa, permanecem sobre a normal à superfície-média da placa após a flexão.
- H3)** A tensão normal na direção transversal à placa pode ser desprezada.

Apesar desta ser a forma mais comum delas serem enunciadas na maioria dos textos, Novozhilov no §46 do capítulo VI de [Novozhilov, 1953] substitui **H3)** por:

- H3')** A distância de todo ponto da placa à superfície-média permanece inalterada pela deformação.

Sendo u , v e w os deslocamentos de um ponto do plano médio, admite-se na dedução clássica que

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = f(x,y) \quad (1.2)$$

Portanto, os deslocamentos de P são dados por

$$u_p = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v_p = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad w_p = w \quad (1.3)$$

Dos deslocamentos anteriores, chegaremos às seguintes três componentes das deformações (*)

$$E_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad E_{22} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad E_{12} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

(*) Os índices 1,2 e 3 correspondem a x , y e z , respectivamente.

Na teoria clássica da elasticidade, admite-se que os materiais são homogêneos e *isotrópicos*, cuja equação constitutiva é da forma

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{1} \quad (1.5)$$

1.1 DEDUÇÃO COM A HIPÓTESE H3) : $T_{33} = 0$

Desprezando a tensão T_{33} conforme hipótese **H3**), teremos, da equação (1.5),

$$T_{33} = 2\mu E_{33} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) = 0,$$

o que nos dará

$$\text{tr}\mathbf{E} = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda}(E_{11} + E_{22}) \quad (1.6)$$

Vamos supor que a *força de volume* (ou *de corpo*) \mathbf{b} seja dada por

$$\mathbf{b} = (0, 0, b_3(x, y, z)). \quad (1.7)$$

Substituindo (1.4) e (1.6) na equação constitutiva (1.5), teremos

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] z \\ T_{22} &= -\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] z \\ T_{12} &= -\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \left[\frac{2\mu + \lambda}{2(\mu + \lambda)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] z \end{aligned} \quad (1.8)$$

que, levados na 1ª e 2ª equações escalares da equação de equilíbrio

$$\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \quad (1.9)$$

e integrando em relação a z essas expressões, observando as condições de contorno de um carregamento perpendicular ao plano médio, cujas tensões tangenciais na superfície de contato da placa com este carregamento são nulas, isto é :

$$T_{13}(x, y, -h/2) = T_{23}(x, y, -h/2) = 0 \quad (1.10)$$

encontraremos as expressões

$$\begin{aligned} T_{13} &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta w \right) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \\ T_{23} &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta w \right) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

COMENTÁRIO 1 :

Se tomarmos, por exemplo, a hipótese **H2**) como uma expressão matematicamente exata da forma

$$E_{13}(x, y, z) = E_{23}(x, y, z) = 0$$

e substituirmos na equação constitutiva dos materiais isotrópicos, (1.5), obteremos então $T_{13} = T_{23} = 0$, uma vez que $T_{13} = 2\mu E_{13}$ e $T_{23} = 2\mu E_{23}$, o que contradiz com as expressões de T_{13} e T_{23} encontradas anteriormente em (1.11).

Substituindo T_{13} e T_{23} na 3ª equação escalar da equação de equilíbrio (1.9) chegaremos a

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial z} = -\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} (\Delta \Delta w) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) - b_3(x, y, z) \quad (1.12)$$

e integrando-a em relação a z , observando as condições de contorno devidas ao carregamento (1.1),

$$T_{33}(x, y, -h/2) = -p(x, y) \quad \text{e} \quad T_{33}(x, y, h/2) = 0 \quad (1.13)$$

e chamando:

$$q(x,y) = p(x,y) + \int_{-h/2}^{h/2} b_3(x,y,z) dz \quad (1.14)$$

e

$$D = \frac{4\mu(\mu + \lambda) h^3}{2\mu + \lambda} \frac{1}{12} \quad (1.15)$$

chegaremos à equação de Lagrange,

$$\boxed{\Delta \Delta w = \frac{q(x,y)}{D}} \quad (1.16)$$

onde $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ é o Laplaciano de w .

1.2 DEDUÇÃO COM A HIPÓTESE H3') : $E_{33} = 0$

Se desprezarmos a deformação E_{33} ao invés da tensão T_{33} , teremos $\text{tr} \mathbf{E} = E_{11} + E_{22}$ e procedendo da mesma forma como anteriormente, chamando

$$D' = (2\mu + \lambda) \frac{h^3}{12} \quad (1.15')$$

também chegaremos à equação de Lagrange

$$\boxed{\Delta \Delta w = \frac{q(x,y)}{D'}} \quad (1.16')$$

COMENTÁRIO 2

Substituindo $\text{tr} \mathbf{E} = E_{11} + E_{22}$ na equação constitutiva (1.5), teremos

$$T_{11} = (2\mu + \lambda) E_{11} + \lambda E_{22}$$

$$T_{22} = \lambda E_{11} + (2\mu + \lambda) E_{22}$$

$$T_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22})$$

o que nos dará

$$T_{33} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu + \lambda)} (T_{11} + T_{22})$$

Substituindo na relação acima as expressões de T_{11} e T_{22} calculadas para a hipótese **H3'**, isto é

$$\begin{aligned} T_{11} &= - \left[(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \\ T_{22} &= - \left[(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z \end{aligned} \quad (1.17')$$

chegaremos a

$$T_{33} = - \frac{\lambda}{\mu} (\Delta w) z$$

o que também contradiz com a solução de (1.12)

Contradições deste tipo ocorrem quando as hipóteses **H2)** e **H3)** são consideradas *exatas*. Nas deduções clássicas, elas são consideradas hipóteses *aproximadas*.

2 VÍNCULOS INTERNOS

Na mecânica do contínuo, um *vínculo interno* é uma prescrição restringindo possíveis deformações. Na teoria linear da elasticidade tal prescrição é sempre expressa pela definição de um subespaço D do espaço \mathbf{sym} de todos tensores simétricos de 2ª ordem, dado como intersecção de sub-espaços da forma

$$D_A = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} / \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{A} é um tensor qualquer, diferente de $\mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ é o produto escalar de dois tensores: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{E})$.

Exemplos

1) Inextensibilidade

Diz-se que um material é *inextensível* num ponto x , na direção e , se as únicas deformações possíveis são aquelas tais que $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot (e \otimes e) = 0$. Numa base (e_1, e_2, e_3) com $e = e_3$, D_e fica caracterizado por

$$\mathbf{E} \in D_e \Leftrightarrow E_{33} = 0$$

ou seja, o vínculo da inextensibilidade na direção e é dado por

$$D_e = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} / \mathbf{E} \cdot (e \otimes e) = 0 \} \quad (2.2)$$

2) Preservação de ortogonalidade

Um exemplo de vínculo que será importante na dedução exata da equação de Lagrange é o da preservação da ortogonalidade, visto que a hipótese **H2)** nada mais é do que a afirmação da preservação da ortogonalidade entre as normais ao plano médio da placa e este plano.

Diz-se que um material *preserva a ortogonalidade*, num ponto x , nas direções e_1 e e_3 , se as únicas deformações possíveis são aquelas tais que $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot (e_1 \otimes e_3) = 0$.

Portanto, o vínculo da preservação da ortogonalidade entre as direções 1-3 pode ser escrito

$$D_o = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} / \mathbf{E} \cdot (e_1 \otimes e_3) = 0 \}. \quad (2.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{E} \in D_o \Leftrightarrow E_{33} = 0$$

Quando um corpo possui vínculos internos é necessário fazer-se a decomposição do tensor das tensões \mathbf{T} em duas partes, uma *ativa* e outra *reativa*.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^A + \mathbf{T}^R \quad (2.4)$$

A tensão ativa é função das deformações do corpo. A reativa tem como objetivo manter o vínculo interno.

Assumiremos que a tensão \mathbf{T}^R não contribui para a potência das tensões, isto é,

$$\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.5)$$

para todo $\mathbf{E} \in D$. Já que \mathbf{T}^R está em D^\perp podemos tomar \mathbf{T}^A em D .

3 SIMETRIA MATERIAL

Um material se diz *linearmente elástico* com vínculo D se para cada ponto x existe uma transformação linear $\mathcal{C}: D \rightarrow D$ tal que

$$\mathbf{T}^A = \mathcal{C}[\mathbf{E}] \quad (3.1)$$

O operador \mathcal{C} é um tensor de 4ª ordem, chamado *tensor de elasticidade* do material no ponto x .

Materiais *homogêneos* são aqueles para os quais \mathcal{C} não depende de x .

Chamamos *grupo de simetria do vínculo* D ao conjunto

$$g_D := \{ \mathbf{Q} \in \text{orth} \mid \mathbf{E} \in D \Rightarrow \mathbf{QEQ}^T \in D \} \quad (3.2)$$

O *grupo de simetria do tensor de elasticidade* $\mathcal{C}: D \rightarrow D$ da *tensão ativa* é definido como

$$g_{\mathcal{C}} := \{ \mathbf{Q} \in g_D \mid \mathbf{QC}[\mathbf{E}]\mathbf{Q}^T = \mathcal{C}[\mathbf{QEQ}^T] \text{ para todo } \mathbf{E} \in D \} \quad (3.3)$$

Veamos agora qual o grupo de simetria que deve ter o material para que a hipótese **H2** seja satisfeita. Observando o exemplo 2) do capítulo anterior, vemos que o vínculo da preservação da ortogonalidade nas direções 1-3 e 2-3 é

$$D_{H2} = \{ \mathbf{E} \in \text{sym} \mid \mathbf{E} \cdot (e_1 \otimes e_3) = \mathbf{E} \cdot (e_2 \otimes e_3) = 0 \} \quad (3.4)$$

o que significa dizer que as componentes E_{13} e E_{23} do tensor \mathbf{E} devem ser nulas.

No ANEXO A demonstraremos que o grupo de simetria do vínculo D_{H2} é o conjunto das rotações, de um ângulo α qualquer, em torno do eixo e_3 , denotadas por

$$Q_{e_3}^\alpha \quad (3.5)$$

Por definição, os materiais *transversalmente isotrópicos* de eixo e_3 são aqueles cujo tensor de elasticidade possui o grupo de simetria

$$g_{\Pi} = \{ Q_{e_3}^\alpha \in \text{orth} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \} \quad (3.6)$$

Portanto, o material de "maior" grupo de simetria, compatível com o vínculo D_{H2} é o transversalmente isotrópico.

4 FÓRMULA DE REPRESENTAÇÃO DO TENSOR DE ELASTICIDADE DOS MATERIAIS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

Proposição:

A fórmula de representação^(*) dos tensores de elasticidade de um material transversalmente isotrópico de eixo e_3 , sem vínculo interno, é:

$$\mathbf{S} = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) + 2S_{2323}(\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= e_1 \otimes e_1 & \mathbf{X}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \\ \mathbf{X}_2 &= e_2 \otimes e_2 & \mathbf{X}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) \\ \mathbf{X}_3 &= e_3 \otimes e_3 & \mathbf{X}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

e (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormal de V^3 , espaço vetorial euclidiano tridimensional.

Teorema:

"Se \mathbf{S} é a fórmula de representação dos operadores de **sym** em **sym**, com um grupo de simetria g dado, então a fórmula de representação dos operadores \mathcal{C} de D em D , com o mesmo grupo de simetria, é

$$\mathcal{C} = \mathbf{I}\mathbf{P}_D \mathbf{S}|_D \quad (4.3),$$

onde $\mathbf{I}\mathbf{P}_D$ é a projeção ortogonal em D e $\mathbf{S}|_D$ é o operador \mathbf{S} restrito a D ."

(*) Veja demonstração no ANEXO B.

4.1 COM VÍNCULO : $E_{13} = E_{23} = 0$

Vamos determinar a fórmula de representação dos tensores de elasticidade de um material transversalmente isotrópico com um vínculo $E_{13} = E_{23} = 0$, ou seja

$$D_{H2) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} \mid \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{E} = 0, i = 5, 6 \} \quad (4.4)$$

Um tensor $\mathbf{E} \in D_{H2)}$ na base (4.2), será da forma

$$\mathbf{E} = E_{11}\mathbf{X}_1 + E_{22}\mathbf{X}_2 + E_{33}\mathbf{X}_3 + E_{12}\mathbf{X}_4 \quad (4.5)$$

O tensor \mathbf{S} restrito a $D_{H2)}$, isto é, $\mathbf{S}|_D$ será

$$\mathbf{S}|_D = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) \quad (4.6)$$

A projeção ortogonal sobre $D_{H2)}$ é

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{II} - \sum_{i=5}^6 \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 \quad (4.7)$$

onde \mathbf{II} é o tensor de 4ª ordem em \mathbf{sym} , tal que: $\mathbf{II}[\mathbf{E}] = \mathbf{E}$ para todo $\mathbf{E} \in \mathbf{sym}$.

Fazendo-se a composição como indicado em (4.3), chegaremos à fórmula de representação dos tensores de elasticidade dos materiais transversalmente isotrópicos, com o vínculo interno $D_{H2)}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_D \mathbf{S}|_D = C_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + C_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + C_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + C_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) \quad (4.8)$$

onde $C_{ijkl} = S_{ijkl}$.

Nos artigos [Podio-Guidugli, 1989] e [Podio-Guidugli e Lembo, 1991] os autores formulam as hipóteses **H3)** e **H3')** com a seguinte exigência sobre o tensor de elasticidade do material, \mathbf{C} .

Se $\mathbf{T} = \mathbf{C}[\mathbf{E}]$ então

$$T_{33} = 0 \Leftrightarrow E_{33} = 0 \quad (4.9)$$

Vamos aplicar o tensor $\mathbf{E} = \mathbf{X}_1$ em \mathbf{C} , como expresso em (4.8) :

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = C_{1111}\mathbf{X}_1 + C_{1122}\mathbf{X}_2 + C_{1133}\mathbf{X}_3$$

$$\begin{matrix} \overline{\mathbf{T}} & \overline{\mathbf{T}}_{11} & \overline{\mathbf{T}}_{22} & \overline{\mathbf{T}}_{33} \end{matrix}$$

Como no tensor $\mathbf{E} = \mathbf{X}_1$ temos $E_{33} = 0$, então, pela exigência anterior, temos que ter $T_{33} = 0$, o que nos leva a concluir

$$C_{1133} = 0 \quad (4.10)$$

e chegamos, finalmente, à fórmula de representação dos tensores de elasticidade para os materiais transversalmente isotrópico, com vínculo interno $D_{H2)}$ e que verifica (4.9);

$$\mathbf{C} = C_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + C_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + C_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3)$$

Chamando

$$\begin{aligned} C_{1111} &= 2\mu + \lambda \\ C_{1122} &= \lambda \\ C_{3333} &= 2\mu + \lambda' \end{aligned} \quad (4.11)$$

e substituindo esses valores na expressão de \mathbf{C} acima, teremos

$$\mathbf{C} = (2\mu + \lambda)(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + \lambda(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + (2\mu + \lambda')(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) \quad (4.12)$$

4.2 COM VÍNCULO : $E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$

Adotando-se a hipótese **H3')** ao invés de **H3)**, a inextensibilidade das linhas perpendiculares ao plano médio indeformado da placa (ao longo da direção e_3) pode ser representado pelo vínculo,

$$D_{H3'}) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} \mid \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{E} = 0 \}$$

e portanto, o vínculo para a placa que satisfaz **H2)** e **H3')** é :

$$D = D_{H2) \cap D_{H3'}) = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} \mid \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{E} = 0, i = 3, 5, 6 \} \quad (4.13')$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, chegaremos a

$$\mathbf{S}|_D = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1133}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) \quad (4.14')$$

pois neste caso um tensor $\mathbf{E} \in D$, é da forma $\mathbf{E} = E_{11}\mathbf{X}_1 + E_{22}\mathbf{X}_2 + E_{12}\mathbf{X}_4$.

A projeção ortogonal sobre D será

$$\mathbf{I}P_D = \mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4 \quad (4.15')$$

Fazendo-se a composição $\mathbf{C} = \mathbf{I}P_D \mathbf{S}|_D$ como indicado em (4.3) teremos

$$\mathbf{C}' = C_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + C_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4)$$

Substituindo os valores de $C_{1111} = 2\mu + \lambda$ e $C_{1122} = \lambda$, chegamos a

$$\mathbf{C}' = (2\mu + \lambda)(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + \lambda(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) \quad (4.16')$$

5 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAGRANGE SEGUNDO PODIO-GUIDUGLI

Vamos então determinar os deslocamentos u_p , v_p e w_p de um ponto P qualquer no interior de uma placa, submetido ao carregamento distribuído, expresso em (1.1).

Ao contrário da dedução clássica que admite o material como sendo isotrópico, vimos no capítulo 3 que o material que satisfaz a hipótese **H2**) terá que ser transversalmente isotrópico.

Esta hipótese **H2**) tomada como uma relação matemática exata, expressa como $E_{13}(x,y,z) = E_{23}(x,y,z) = 0$, implica

$$\frac{\partial u_p}{\partial z} + \frac{\partial w_p}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_p}{\partial z} + \frac{\partial w_p}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

5.1 DEDUÇÃO COM A HIPÓTESE **H3**) : $\mathbf{T}_{33} = \mathbf{0}$

Conforme (4.9), isto é, $\mathbf{T}_{33} = \mathbf{0} \Leftrightarrow E_{33} = 0$, temos

$$E_{33} = \frac{\partial w_p}{\partial z} = 0 \quad (5.2)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (5.1) e (5.2) é

$$\begin{aligned} u_p &= -z \frac{\partial w_p}{\partial x} + u \\ v_p &= -z \frac{\partial w_p}{\partial y} + v \\ w_p &= w(x, y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$. Fazendo $z = 0$ nas equações acima, vemos que u , v e w são os deslocamentos do plano médio \mathbf{M} .

Pela hipótese **H1**), temos

$$\begin{aligned} E_{11}(x,y,0) &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ E_{22}(x,y,0) &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ E_{12}(x,y,0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Logo, $u = \alpha_1 - \beta y$ e $v = \alpha_2 + \beta x$, onde α_1 , α_2 e β são constantes, ou seja

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{W}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0]$ onde \mathbf{W} é um tensor antissimétrico.

Portanto, o campo de deslocamento no plano médio é um *deslocamento rígido infinitesimal*.

Observando (5.3) vemos que, da mesma forma como na dedução clássica, o problema recai em se determinar apenas os deslocamentos w do plano médio.

Levando (5.3) ao tensor das deformações infinitesimais $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$, chegaremos à matriz

$$[\mathbf{E}] = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ sim. & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Aplicando este tensor \mathbf{E} na fórmula de representação (4.12), temos

$$[\mathbf{T}^A] = -z \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \Delta w & 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ & 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda \Delta w & 0 \\ sim & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

De (2.5) concluímos que

$$[\mathbf{T}^R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13}^R \\ & 0 & T_{23}^R \\ sim. & & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, de (2.4) segue-se que

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11}^A & T_{12}^A & 0 \\ & T_{22}^A & 0 \\ sim. & & T_{33}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13}^R \\ & 0 & T_{23}^R \\ sim. & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Substituindo os valores das tensões ativas, de (5.5), nas duas primeiras equações escalares da equação de equilíbrio (1.9), teremos

$$\frac{\partial T_{13}^R}{\partial z} = z \left[\left(2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) + \left(2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] = z \left[(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right] = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial x} z$$

$$\frac{\partial T_{23}^R}{\partial z} = z \left[\left(2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \lambda \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right] = z \left[(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial y} z$$

Integrando em relação a z , tendo em mente as condições de contorno das tensões T_{13} e T_{23} para um carregamento do tipo (1.1), isto é, $T_{13}^R(x, y, -h/2) = T_{23}^R(x, y, -h/2) = 0$, teremos

$$\int_{-h/2}^z \frac{\partial T_{13}^R}{\partial z} dz = T_{13}^R - 0 = \int_{-h/2}^z \left[(2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial x} z \right] dz = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

$$\int_{-h/2}^z \frac{\partial T_{23}^R}{\partial z} dz = T_{23}^R - 0 = \int_{-h/2}^z \left[(2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial y} z \right] dz = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

Levando esses valores na terceira equação escalar da equação de equilíbrio, lembrando que $T_{33} = 0$, chegaremos a

$$\frac{\partial T_{13}^R}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}^R}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}^R}{\partial z} + b_3 = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + 0 + b_3 = 0$$

ou seja

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \Delta \Delta w + b_3(x, y, z) = 0 \quad (5.7)$$

Integrando a equação acima na direção z , de $-h/2$ a $h/2$, teremos

$$- (2\mu + \lambda) \frac{h^3}{12} \Delta \Delta w + \int_{-h/2}^{h/2} b_3(x, y, z) dz = 0 \quad (5.8)$$

Chamemos: $D = (2\mu + \lambda) h^3 / 12$.

O segundo termo do lado esquerdo de (5.8) é $q(x, y)$, quando $p(x, y) = 0$, o que é de se esperar, visto que a hipótese **H3**) afirma que $T_{33}(x, y, z)$ é sempre zero, inclusive no plano $z = -h/2$, o que só será possível se $p(x, y) = 0$.

Substituindo D e $q(x, y)$ em (5.8), chegaremos à equação de Lagrange

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}$$

5.2 DEDUÇÃO COM A HIPÓTESE H3') : $E_{33} = 0$

Neste caso, como o vínculo é $E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$, então, na matriz do tensor E , como expresso em (5.4), a componente $E_{33} = 0$ é devido ao fato de ser um vínculo e de (2.5) concluímos que

$$[\mathbf{T}^R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13}^R \\ & 0 & T_{23}^R \\ \text{sim.} & & T_{33}^R \end{bmatrix}$$

Logo, de (2.4) segue-se que

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11}^A & T_{12}^A & 0 \\ & T_{22}^A & 0 \\ \text{sim.} & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13}^R \\ & 0 & T_{23}^R \\ \text{sim.} & & T_{33}^R \end{bmatrix} \quad (5.6')$$

Agora, ao substituirmos T_{13}^R e T_{23}^R na 3ª equação escalar da equação de equilíbrio, a expressão (5.7) tomará a seguinte forma:

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \Delta \Delta w + \frac{\partial T_{33}^R}{\partial z} + b_3(x, y, z) = 0 \quad (5.7')$$

Da mesma forma, integrando a expressão acima em relação a z , de $-h/2$ a $h/2$, levando-se em conta as condições contorno (1.13), teremos

$$0 + \underbrace{p(x, y) + \int_{-h/2}^{h/2} b_3(x, y, z) dz}_{q(x, y)} = \underbrace{(2\mu + \lambda) \frac{h^3}{12} \Delta \Delta w}_D$$

e chegaremos também à equação de Lagrange

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}$$

6 ANEXO A

GRUPO DE SIMETRIA DO VÍNCULO $E_{13} = E_{23} = 0$

Proposição:

O grupo de simetria do vínculo $D_{H2} = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{sym} \mid \mathbf{E} \cdot (e_1 \otimes e_3) = \mathbf{E} \cdot (e_2 \otimes e_3) = 0 \}$ é o conjunto das rotações $\{ Q_{e_3}^\alpha \}$.

Demonstração:

Seja $g_{D_{H2}}$ o grupo de simetria de D_{H2} e $\{ Q_{e_3}^\alpha \}$ o conjunto das rotações em torno de e_3 .

$$1) \{ Q_{e_3}^\alpha \} \subset g_{D_{H2}} = \{ \mathbf{Q} \in \mathbf{orth} \mid \mathbf{E} \in D_{H2} \Rightarrow \mathbf{QEQ}^T \in D_{H2} \}$$

Sabemos que a matriz de $Q_{e_3}^\alpha$ numa base orto-normal positiva (e_1, e_2, e_3) é

$$[Q_{e_3}^\alpha] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $c = \cos \alpha$ e $s = \sin \alpha$.

Seja $\mathbf{Q} = Q_{e_3}^\alpha$ e \mathbf{E} simétrico. Temos

$$[\mathbf{QEQ}^T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{22} & E_{23} & \\ E_{33} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 E_{11} + 2scE_{12} + s^2 E_{22} & -scE_{11} + (c^2 - s^2)E_{12} + scE_{22} & cE_{13} + sE_{23} \\ -scE_{11} + (c^2 - s^2)E_{12} + scE_{22} & s^2 E_{11} - 2scE_{12} + c^2 E_{22} & -sE_{13} + cE_{23} \\ cE_{13} + sE_{23} & -sE_{13} + cE_{23} & E_{33} \end{bmatrix}$$

Se o tensor \mathbf{E} pertence ao vínculo D_{H2} , ou seja, suas componentes E_{13} e E_{23} são nulas, então, a matriz acima nos mostra que as componentes

$$\mathbf{QEQ}^T_{13} = cE_{13} + sE_{23} = 0$$

$$\mathbf{QEQ}^T_{23} = -sE_{13} + cE_{23} = 0$$

para qualquer rotação α e por isso \mathbf{QEQ}^T também pertence ao vínculo D_{H2} .

$$2) g_{D_{H2}} \subset \{ Q_{e_3}^\alpha \}$$

Para mostrarmos que um $\mathbf{Q} \in g_{D_{H2}}$ é igual a $Q_{e_3}^\alpha$, numa base pré-fixada, teremos que ter para todo \mathbf{Q}

$$Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0 \quad \text{e} \quad Q_{33} = 1$$

A nossa matriz \mathbf{QEQ}^T , para um \mathbf{E} contido em D_{H2} , será

$$\begin{aligned} [\mathbf{QEQ}^T] &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11}E_{11} + Q_{12}E_{12} & Q_{11}E_{12} + Q_{12}E_{22} & Q_{13}E_{33} \\ Q_{21}E_{11} + Q_{22}E_{12} & Q_{21}E_{12} + Q_{22}E_{22} & Q_{23}E_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & (Q_{11}E_{11} + Q_{12}E_{12})Q_{31} + (Q_{11}E_{12} + Q_{12}E_{22})Q_{32} + (Q_{13}E_{33})Q_{33} \\ \dots & \dots & (Q_{21}E_{11} + Q_{22}E_{12})Q_{31} + (Q_{21}E_{12} + Q_{22}E_{22})Q_{32} + (Q_{23}E_{33})Q_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como as componentes \mathbf{QEQ}^T_{13} e \mathbf{QEQ}^T_{23} do tensor \mathbf{QEQ}^T são nulas, visto que \mathbf{QEQ}^T está contido em D_{H2} , podemos reescrever as duas equações acima do seguinte modo:

$$(Q_{11}Q_{31})E_{11} + (Q_{12}Q_{32})E_{22} + (Q_{13}Q_{33})E_{33} + (Q_{12}Q_{31} + Q_{11}Q_{32})E_{12} = 0$$

$$(Q_{21}Q_{31})E_{11} + (Q_{22}Q_{32})E_{22} + (Q_{23}Q_{33})E_{33} + (Q_{22}Q_{31} + Q_{21}Q_{32})E_{12} = 0$$

Como essas equações são dois polinômios nulos, para quaisquer E_{ij} temos:

$$Q_{11}Q_{31} = Q_{12}Q_{32} = Q_{13}Q_{33} = Q_{12}Q_{31} + Q_{11}Q_{32} = 0$$

$$Q_{21}Q_{31} = Q_{22}Q_{32} = Q_{23}Q_{33} = Q_{22}Q_{31} + Q_{21}Q_{32} = 0$$

Relembrando as propriedades de um tensor \mathbf{Q} pertencente a **orth**:

Se $\mathbf{b} = (e_1, e_2, e_3)$ for uma base ortonormal, então

$$1) \mathbf{Q}[e_i] \cdot \mathbf{Q}[e_j] = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad 2) \|\mathbf{Q}[e_i]\| = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

Em outras palavras, a propriedade 1) nos diz que os vetores coluna (ou linha) da matriz do tensor são ortogonais entre si e a propriedade 2) nos afirma que esses vetores tem módulo 1.

Por isso, $Q_{31} = Q_{32} = 0$, pois caso contrário, $Q_{11} = Q_{12} = Q_{21} = Q_{22} = 0$ e $Q_{13} = Q_{23} = 1$ e então produto escalar do vetor linha-1 com o vetor linha-2 da matriz de \mathbf{Q} não é nulo, contradizendo a propriedade 1), isto é, $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 = 1$.

Como o módulo do vetor linha-3, $\|\mathbf{l}_3\| = 1$, então $Q_{33} = 1$.

Novamente, pela primeira propriedade

$$\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_3 = 0 \quad \text{implica em} \quad Q_{11}Q_{31} + Q_{12}Q_{32} + Q_{13}Q_{33} = 0$$

$$\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_3 = 0 \quad \text{implica em} \quad Q_{21}Q_{31} + Q_{22}Q_{32} + Q_{23}Q_{33} = 0$$

o que nos permite afirmar que $Q_{13} = Q_{23} = 0$, concluindo a demonstração.

7 ANEXO B

FÓRMULA DE REPRESENTAÇÃO DO TENSOR DE ELASTICIDADE DOS MATERIAIS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS, SEM VÍNCULO INTERNO

Antes de iniciarmos a demonstração da fórmula de representação, vejamos a seguinte identidade apresentada por Gurtin em [Gurtin, 1972, §21, p.74].

Proposição:

Para todos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} e o tensor \mathbf{Q} pertencente ao grupo de simetria g , definido em (3.3), temos:

$$\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})] = \text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b}) \cdot \mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{c} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{d})] \quad (\text{B.1})$$

Demonstração: Para qualquer vetor \mathbf{v} , temos: $\mathbf{Q}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{Q}^T\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{v})$

Mas, pela definição de tensor *transposto*, veja [Gurtin, 1972, §3, p.6], $\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$

Portanto, $\mathbf{Q}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{Q}^T\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{a}(\mathbf{Q}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b})\mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{Q}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b})$

Como $\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1/2(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$

Então $\mathbf{Q}[\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}[1/2(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})]\mathbf{Q}^T = 1/2[\mathbf{Q}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{Q}^T] =$

$$= 1/2[(\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b}) + (\mathbf{Q}\mathbf{b} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{a})] = \text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b})$$

Como $\mathbf{Q} \in g$, $\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{c} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{d})] = \mathcal{C}[\mathbf{Q}\{\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\}\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\mathbf{Q}^T$

Fazendo-se o produto escalar dos termos extremos das duas linhas anteriores, teremos:

$$\underbrace{\mathbf{Q}[\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\mathbf{Q}^T}_{\parallel} = \text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b}) \cdot \mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{c} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{d})] =$$

$$\text{tr}\{\mathbf{Q}[\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\mathbf{Q}^T\} = \text{tr}\{\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T[\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\} = \\ = \text{tr}\{\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]\} = \text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathcal{C}[\text{sym}(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})]$$

o que demonstra nossa identidade (B.1).

Esta identidade nada mais é do que afirmarmos que a fórmula de representação de um material não depende da base adotada, pois se $\mathbf{b} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathbf{b}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ são duas bases ortonormais tais que $e'_i = \mathbf{Q}e_i$ e $\mathbf{Q} \in g$, então os coeficientes da matriz $[\mathcal{C}]$ nessas bases serão

$$C'_{ijkl} = \text{sym}(e_i' \otimes e_j') \cdot \mathbf{C}[\text{sym}(e_k' \otimes e_l')] = \text{sym}(\mathbf{Q}e_i \otimes \mathbf{Q}e_j) \cdot \mathbf{C}[\text{sym}(\mathbf{Q}e_k \otimes \mathbf{Q}e_l)] = \\ = \text{sym}(e_i \otimes e_j) \cdot \mathbf{C}[e_k \otimes e_l] = C_{ijkl}$$

Proposição:

A fórmula de representação dos tensores de elasticidade de um material transversalmente isotrópico, sem vínculo interno é:

$$\mathbf{S} = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \\ \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) + 2S_{2323}(\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) \quad (4.1)$$

Demonstração:

Um tensor simétrico \mathbf{S} na sua forma mais completa é expresso da seguinte maneira:

$$\mathbf{S} = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1) + S_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1) + \sqrt{2} S_{1112}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_1) + \\ \sqrt{2} S_{1123}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_1) + \sqrt{2} S_{1113}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_1) + S_{2222}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{2233}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) \\ + \sqrt{2} S_{2212}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_2) + \sqrt{2} S_{2223}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_2) + \sqrt{2} S_{2213}(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \\ \mathbf{X}_3) + \sqrt{2} S_{3312}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_3) + \sqrt{2} S_{3323}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_3) + \sqrt{2} S_{3313}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_3) + \\ 2S_{1212}(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + 2S_{1223}(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_4) + 2S_{1213}(\mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_4) + 2S_{2323}(\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5) + \\ 2S_{2313}(\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_6 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_5) + 2S_{1313}(\mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6) \quad (B.2)$$

visto que, por definição, $S_{ijkl} = \text{sym}(e_i \otimes e_j) \cdot \mathbf{S}[\text{sym}(e_k \otimes e_l)]$

Como vimos em (3.6), um material transversalmente isotrópico possui como grupo de simetria o conjunto das rotações em torno de um eixo (escolheremos e_3).

Vamos girar o referencial em torno de e_3 e aplicar na identidade (B.1)

$$\text{Para } \alpha = \pi : \\ \mathbf{Q}^\pi e_1 = -e_1 \\ \mathbf{Q}^\pi e_2 = -e_2 \\ \mathbf{Q}^\pi e_3 = e_3$$

Levando esses valores em (B.1), teremos

$$S_{1123} = S_{1113} = S_{2223} = S_{2213} = S_{3323} = S_{3313} = S_{1223} = S_{1213} = 0$$

$$\text{Para } \alpha = \pi/2 : \\ \mathbf{Q}^{\pi/2} e_1 = e_2 \\ \mathbf{Q}^{\pi/2} e_2 = -e_1 \\ \mathbf{Q}^{\pi/2} e_3 = e_3$$

Levando novamente esses valores em (B.1),

$$S_{1111} = S_{2222}, S_{1133} = S_{2233}, S_{1112} = -S_{2212}, S_{3312} = -S_{3322} = 0, S_{2323} = S_{1313}, S_{2313} = -S_{2313} = 0$$

$$\text{Para } \alpha = \pi/4 : \\ \mathbf{Q}^{\pi/4} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \\ \mathbf{Q}^{\pi/4} e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2) \\ \mathbf{Q}^{\pi/4} e_3 = e_3$$

Mais uma vez, levando esses valores em (B.1),

$$S_{1112} = \frac{1}{4}(-S_{1111} + S_{1112} - S_{1121} + S_{1122} - S_{1211} + S_{1212} - S_{1221} + S_{1222} - S_{2111} + S_{2112} - S_{2121} + S_{2122} - S_{2211} + S_{2212} - S_{2221} + S_{2222})$$

Como \mathbf{S} é simétrico, isto é: $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij}$ e da 1ª relação calculada quando fizemos $\alpha = \pi/2$, ou seja, $S_{1111} = S_{2222}$, teremos

$$S_{1112} = \frac{1}{4}(-\overbrace{S_{1111} + S_{1112} - S_{1121} + S_{1122} - S_{1211} + S_{1212} - S_{1221} + S_{1222}}^0 - \overbrace{S_{2111} + S_{2112} - S_{2121} + S_{2122} - S_{2211} + S_{2212} - S_{2221} + S_{2222}}^0) \\ = \frac{1}{4}(-\overbrace{S_{1111} + S_{1112} - S_{1121} + S_{1122} - S_{1211} + S_{1212} - S_{1221} + S_{1222} - S_{2111} + S_{2112} - S_{2121} + S_{2122} - S_{2211} + S_{2212} - S_{2221} + S_{2222}}^0)$$

$$S_{1112} = \frac{1}{4}(-S_{1211} + S_{1222} - S_{2111} + S_{2122})$$

Observando também que, ao fazermos $\alpha = \pi/2$, encontramos $S_{2212} = -S_{1112}$, então

$$S_{1112} = \frac{1}{4}(-4S_{1112}) \text{ o que implica}$$

$$S_{1112} = S_{2212} = 0$$

Finalmente,

$$S_{1212} = \frac{1}{4}(S_{1111} - \underbrace{S_{1112}}_0 + \underbrace{S_{1121}}_0 - S_{1122} - \underbrace{S_{1211}}_0 + \underbrace{S_{1212}}_0 - \underbrace{S_{1221}}_0 + \underbrace{S_{1222}}_0 + \underbrace{S_{2111}}_0 - \underbrace{S_{2112}}_0 + \underbrace{S_{2121}}_0 - \underbrace{S_{2122}}_0 - \underbrace{S_{2211}}_0 + \underbrace{S_{2212}}_0 - \underbrace{S_{2221}}_0 + \underbrace{S_{2222}}_0)$$

$$S_{1212} = \frac{1}{4}(2S_{1111} - 2S_{1122}) = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122})$$

Substituindo em \mathbf{S} , concluímos a demonstração, ou seja,

$$\mathbf{S} = S_{1111}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1122}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_4 \otimes \mathbf{X}_4) + S_{1133}(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_2) + S_{3333}(\mathbf{X}_3 \otimes \mathbf{X}_3) + 2S_{2323}(\mathbf{X}_5 \otimes \mathbf{X}_5 + \mathbf{X}_6 \otimes \mathbf{X}_6)$$

8 BIBLIOGRAFIA

- FILONENKO-BORODICH, M., 1963, **Theory of Elasticity**. 1.ed. Moscou, Peace Publishers.
- GURTIN, M.E., 1972, The linear theory of elasticity. In: C. TRUESDELL (ed.), **Handbuch der Physik-Mechanics of Solids II**. V. VI a/2. Berlin: Springer.
- HALMOS, P.R., 1978, **Espaços Vetoriais de Dimensão Finita**. Rio de Janeiro, Editora Campus Ltda.
- KALMANOK, A.S., 1961, **Manual para Cálculo de Placas**. Editora Iter Ciência, Uruguai.
- LEKHNITSKII, S.G., 1981, **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. 1.ed. Moscou, Peace Publishers.
- MANSFIELD, E.H., 1964, **The Bending and Stretching of Plates**. Pergamon Press, Oxford.
- MARTINS, L.C.; PODIO-GUIDUGLI, P., 1978, A new proof of the representation theorem for isotropic, linear constitutive relations. **Journal of Elasticity**. V.8, n.3, p.319-322.
- NOVOZHILOV, V.V., 1953, **Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity**. Rochester, Graylock.
- PANC, V., 1975, **Theories of Elastic Plates**. Leyden, Noordhoff Internat. Publishing.
- PODIO-GUIDUGLI, P.; VIANELLO, M., 1992, The representation problem of constrained linear elasticity. **Journal of Elasticity**. n. 28, p. 271--276.
- PODIO-GUIDUGLI, P.; LEMBO, M., 1991, Plate theory as an exact consequence of three-dimensional linear elasticity. **European Journal of Mechanics of Solids**. V. 10, n. 5, p. 485--516.
- PODIO-GUIDUGLI, P., 1989, An exact derivation of the thin plate equation. **Journal of Elasticity**. n. 22, p. 121--133.
- SAPIENZA, J. M. R., 1994, **Uma Aplicação da Teoria Constitutiva dos Materiais Elásticos-Lineares Sujeitos a Vínculos Internos : Dedução Exata da Equação de Lagrange para Placas Finas**. Dissertação para mestrado. USP, São paulo
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N., 1980, **Teoria da Elasticidade**. 3.ed. Rio de Janeiro, Edit. Guanabara Dois S.A..
- TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S., 1984, **Theory of Plates and Shells**. 2.ed. New York, McGraw-Hill.
- TIMOSHENKO, S.P., 1953, **History of Strength of Materials**. New York, McGraw-Hill.
- TODHUNTER, I.; PEARSON, K., 1960, **A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials**. V. I e II. New York, Dover Publications.
- UGURAL, A.C., 1981, **Stress in Plates and Shell**. New York, MacGraw-Hill.

BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite Wu das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos - Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Trelças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite W_u das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos - Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Treliças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8612 - "Erros a Serem Evitados no Cálculo de Pórticos, em Particular no dos Edifícios" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8613 - "Mínima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elastici" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8614 - "Nova Técnica para Codificações de Procedimentos Envolvendo Matrizes - Avaliação de Desempenho" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8615 - "Casos Especiais de Flambagem de Pórticos de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8616 - "Vigas Protendidas: Alterações das Tensões, das Deformações e dos Deslocamentos ao Longo do Tempo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8701 - "Consideração sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8702 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminares Planas" - Parte I - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8703 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminares Planas" - Parte II - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8704 - "Estado Plano de Tensão (Método dos Resíduos Ponderados e Método dos Elementos Finitos)" - VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8705 - "Aplicação das Equações de diferenças a um Caso Particular de Estrutura" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8706 - "Verificação da Estabilidade dos Pilares de Pontes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8707 - "Aplicação do Método Variacional ao Cálculo do Empuxo sobre as Paredes de Arrimo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8708 - "Análise das Chapas em Regime Elasto - Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8709 - "Análise das Placas em Regime Elasto-Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8710 - "A Flambagem de Euler e a "Elástica" Revisitadas: Uma Formulação Unificada para os Cinco Casos Clássicos" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8711 - "Laje Protendida e Perdas de Protensão Resultantes da Retração, Fluência do Concreto e do Aço" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8712 - "O Método dos Elementos Finitos na Solução de Placa, Solicitadas no seu Plano ou Fletidas. Vinculação com o Método de Ritz" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8713 - "Sobre o Conceito de Corpo Material Linearmente Elástico" - PAULO BOULOS
- 8714 - "Rotações Finitas" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8715 - "Efeitos Estruturais de Segunda Ordem nas Treliças" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, YZUMI TAGUTI
- 8716 - "Estudo das Placas: Resíduos Ponderados e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8717 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Uniforme" - CARLOS ALBERTO SOARES

- 8718 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Triangular" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8719 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Trapezoidal" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8720 - "Sobre a Matriz de Rigidez Tangente das Barras de Treliças Planas Sujeitas a Rotações Grandes" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8721 - "Um Método Geral para a Redução da Matriz de Rigidez Tangente de Elementos Finitos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8722 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Plano - Teoria de Timoshenko" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8801 - "Distribuição Transversal de Carga nas Pontes de Vigas Justapostas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8802 - "O Método de Galerkin no Problema das Placas Fletidas - Teoria de Reissner" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 8803 - "Um Algoritmo para o Cálculo do Tensão Rotação e do Tensão das Deformações Logarítmicas em Problemas Incrementais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8804 - "Um Algoritmo para a Integração das Tensões na Plasticidade Perfeita" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8805 - "Análise das Cascas Cilíndricas em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8806 - "Consideração do Efeito de Membrana nas Placas pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8807 - "Alteração do Estado de Tensão nas Estruturas Hiperestáticas Devida à Fluência do Aço, do Concreto e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8808 - "O Método dos Mínimos Quadrados no Exame de alguns Casos de Instabilidade, Computada à Fluência do Material" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8809 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Espacial" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8810 - "Consideração da Fluência do Material da Determinação da Carga Crítica das Barras Mergulhadas em Meio Elástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8811 - "Um Programa para Solução do Problema Generalizado de Autovalores e Autovetores para Matrizes Reais Densas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, MARCIA CIMERMANN
- 8812 - "Pilar de Pontes: Riscos dos Cálculos Correntes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8813 - "Sugestes à Norma, em Discussão, sobre Projeto de Estrutura de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8814 - " Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8815 - "Tabelas Momento - Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8816 - "Análise Não-Linear de Arcos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8817 - "Estados Limites das Unies Pregadas de Madeira" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA

- 8818 - "O Emprego da Técnica de Aceleração da Convergência para a Resolução de Problemas Estruturais Através do Método dos Elementos Finitos por Algoritmo do Tipo Resíduo das Tensões" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., RUBENS AKEL
- 8819 - "Um Critério para o Estabelecimento dos Estimadores de Erro para os Elementos Finitos Adaptativos na Modalidade P" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR. JARBAS A. GUEDES
- 8820 - "Non-Linear Finite-Element Formulation in Dynamic" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8821 - "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Newton: 300 Anos - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8822 - "A Estabilidade das Fundações Arenosas Estratificadas, Segundo V. V. Sokolovisky" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8823 - "Flambagem de Estacas Totalmente Enterradas. Solo com Coeficiente de Reação Variável" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8824 - "As Equações de Vlasov e a Estabilidade Espacial das Barras de Seção Delgada" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8825 - "Um Programa para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte - Aplicação à Engenharia de Estruturas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL
- 8826 - "Sobre a Aceleração do Centro Instantâneo de Rotação" - NELSON ACHCAR, PAULO BOULOS
- 8827 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8828 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8901 - "A Estimativa da Coesão para o Cálculo da Estabilidade de Aterros e Fundações sobre Argilas Moles" - CARLOS DE SOUSA PINTO
- 8902 - "Treliças Espaciais de Madeira em Regime Viscoelástico sob Não-Linearidade Geométrica" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 8903 - "O Método dos Prismas Equivalentes Aplicado ao Cálculo das Variações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Seções de Concreto" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8904 - "Efeitos de Laje Concretada Posteriormente sobre Viga Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ, JOSÉ LOURENÇO BRAGA DE ALMEIDA CASTANHO
- 8905 - "O Cálculo das Grelhas de Pontes pelo Método de Courbon: Uma Hipótese por Demonstrar" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8906 - "Erosão - Erosão em Área Urbana - Erosão Associada à Construção de Estradas Vicinais" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8907 - "Solos Tropicais - Proposta de Classificação Baseada nas Características de Compactação" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8908 - "Método Variacional de Cálculo de Construções Estaiadas sob Cargas Dinâmicas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8909 - "Métodos Aproximados de Determinação de Frequência de Vibração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8910 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer I. Quasi-Static Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8911 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer II. Dynamic Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8912 - "Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements 1. Straight Bar Elements" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8913 - "A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method I. Small Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8914 - "A Stress Integration Algorithm For the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Elements Method II. Large Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8915 - "Flambagem de Estacas Parcialmente Enterradas Solo com Coeficiente de Recalque Constante" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8916 - "Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade Linear" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8917 - "Um Pacote de Subrotinas Matemáticas para o LMC" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8918 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (I)" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8919 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (II)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8920 - "Viga Contínua Mista Aço-Concreto, Conectada Elasticamente, sob a Aço da Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8921 - "Relatórios de Subrotinas Matemáticas (III)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8922 - "O Problema da Flexão Plana na Teoria da Elasticidade dos Corpos Não Homogêneos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8923 - "Alterações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Concreto Protendido, devidas à Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9001 - "Os Deslocamentos Devidos a Flexão das Vigas Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9002 - "Dinâmica das Estruturas Aperticadas Planas e Comportamento Geometricamente Não Linear" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, CARLOS E. N. MAZZILLI
- 9003 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9004 - "Influência das Tensões de Cisalhamento na Deformação da Viga sob o Regime Elasto-Plástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9005 - "Ainda a Estabilidade dos Sistemas Elásticos. Aceno Histórico. O Erro de Euler" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9006 - "A Origem das Funções de Bessel com algumas Aplicações em Problemas Estruturais" - AUGUSTO CARLOS DE VASCONCELOS
- 9007 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9008 - "Non-linear Finite-element Formulation in Dynamics II" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9009 - "Fatores de Forma e Fatores de Carga Generalizados" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9010 - "Corpos Hiperelásticos Homogêneos Transversalmente Isotrópicos No Ortotrópicos" - NELSON ACHCAR
- 9011 - "Análise das Cascas de Revolução em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - JOSÉ MARQUES FILHO, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9012 - "O Algoritmo de Mínimo Grau para Reordenação e Solução de Sistemas Lineares Esparsos" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, SÉRGIO PINHEIRO
- 9101 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte 1" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9102 - "Introdução ao Estudo dos Pórticos Esbeltos - Matr z de Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, ALFONSO PAPPALARDO JR.
- 9103 - "Cálculo de Estruturas Sujeitas a Terremotos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA H. SHIMURA
- 9104 - "Análise Não - Linear de Pórticos Espaciais - Parte I: Teoria e Método dos Elementos Finitos" - PAULO M. PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9105 - "Flambagem de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9106 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas nos Domínios do Tempo e da Frequência" - REYOLANDO M L.R. DA F. BRASIL
- 9107 - "Variação nas Peças Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9108 - "Análise das Placas Sujeitas a Grandes Rotações Mediante o Uso do Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9109 - "Consideração Tópica sobre o Código Modelo 1990 do CEB-FIP" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9110 - "Materiais Compatíveis com as Barras Cujas Secções Normais Permanecem Planas" - NELSON ACHCAR
- 9111 - "Dinâmica das Placas: Elementos Finitos via Resíduos Ponderados" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, FLAVIO JOSÉ GARZERI, REYOLANDO M. L. R. FONSECA BRASIL
- 9112 - "Estabilidade do Equilíbrio dos Sistemas no Campo Conservativo de Forças" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9113 - "Sobre a Estabilidade Elástica de Arcos Abatidos" - REYOLANDO M. L. R, FONSECA BRASIL, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9114 - "Considerações Teóricas sobre o Adensamento Secundário" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9115 - "Teoria de Vlassov sobre Barras, Placas e Cascas, de Parede Fina, Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9201 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte II" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9202 - "Sobre a Interpretação de Provas de Carga em Estacas Considerando as Cargas Residuais de Ponta e a Reversão do Atrito Lateral" - FAIÇAL MASSAD
- 9203 - "Um Programa para Análise Limite de Pórticos Planos em Regime Elasto-Plástico" - REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL
- 9204 - "Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas" - NELSON ACHCAR
- 9205 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Madeira" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO

- 9206 - "Perda de Estabilidade à Tração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9207 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Tangente" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9208 - "Vibrações Não-Lineares de Placas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL, PAULO SHIGUEME IDE
- 9209 - "Variedades Vinculadas Reduzidas" - PAULO BOULOS, NELSON ACHCAR,
- 9210 - "Estudo da Perda de Estabilidade Segundo Critérios Dinâmicos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9211 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas - Parte II - Vários Graus de Liberdade" - REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9212 - "Otimização da Deposição de Rejeitos" - LUIZ GUILHERME F. S. DE MELLO
- 9213 - "Andros - a Finite Element Program From Nonlinear Dynamics" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9214 - "Considerações sobre o Cálculo Dinâmico de Estruturas Usando Transformadas de Fourier" - ALFREDO PINTO DA CONCEIÇÃO NETO, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9215 - "Placas Delgadas" - ALFONSO PAPPALARDO JUNIOR, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9216 - "Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade" - MARIO EDUARDO SENATORE SOARES, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9301 - "PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas - Parte IV" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA, MARCIA CIMERMAN
- 9302 - "Vibrações de Pórticos com Vigas de Rigidez Infinita" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9303 - "Direct Along - Wind Dynamic Analysis of Tall Structures" - MARIO FRANCO
- 9304 - "Comportamento Pós-Crítico de Barra Delgada Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9305 - "Os Polinômios Trigonométricos na Solução de Problemas de Vibração Mecânica" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9306 - "Linhas de Influência Dinâmicas para Deslocamentos, Momentos Fletores e Forças Cortantes nas Vigas Simples" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9307 - "O Modelo Clam-Clay Revisto" - JOSÉ JORGE NADER
- 9308 - "Patologia da Concepção Estrutural: Danos por Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Altos, um Exemplo" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9309 - "Vibração de Sistemas Não Lineares: Método de Aproximações Sucessivas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9310 - "Normalização dos Símbolos Gráficos para Projetos de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9311 - "Ensaio de Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9312 - "Comentários sobre a Normalização das Ações e Segurança nas Estruturas" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO

- 9313 - "Introdução à Análise Dinâmica de Estruturas por Meio de Elementos Finitos - Parte I - Galerkin e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA HISSAE SHIMURA
- 9314 - "Vibrações Aleatórias na Dinâmica de Estruturas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9315 - "Determinação da Equação para Cálculo do Momento Crítico à Flambagem Lateral" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9316 - "Efeito dos Sismos nas Estruturas Aporticadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9317 - "As Estruturas Aporticadas com Vigas de Rigidez Infinita, Submetidas ao Sismo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9318 - "Uma Proposta de Normalização das Resistências da Madeira Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9319 - "Resistência dos Materiais Anisotrópicos" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9401 - "Soluções Analíticas para a Deformação do Material Elasto - Plástico Cam - Clay úteis na Interpretação de Ensaio Triaxiais com Diferentes Trajetórias de Tensão" - JOSÉ JORGE NADER
- 9402 - "Introdução à Fotoelasticidade por Reflexão" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, FRANCISCO ROURE FERNANDEZ, FREDERIC MARINON CARVAJAL
- 9403 - "Numerical Conditioning in Structural Solutions: a Proposal for a new Condition Number" - HENRIQUE LINDENBERG NETO
- 9404 - "A Esbeltez Estrutural e sua Influência nas Frequências de Vibrações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9405 - "Determinação do Momento Crítico à Flambagem Lateral de Viabilizadas de Aço" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9406 - "Uma Análise dos Parâmetros de Ensaio Utilizados para Cálculo de Recalques por Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9407 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas I" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9408 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas II" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9409 - "Formulação de um Elemento Finito de Cabo Incorporando o Efeito do Atrito" - RUY M. PAULETTI, PAULO M. PIMENTA
- 9410 - "A Descrição do Domínio para o Projeto por Elementos Finitos" - JOSÉ ANTONIO LEROSA SIQUEIRA, JOO CYRO ANDRÉ
- 9411 - "O Método dos Elementos Finitos Aplicado a uma Formulação Mista da Teoria das Placas" - MYRIAM RENATA DIAS FERREIRA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9412 - "Problemas Envolvendo Ponto, Reta e Plano, Tratados Vetorialmente" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9413 - "Auto - Sincronização de Motores Não - Ideais Apoiados em Estruturas Elásticas" - PETRUS GORGONIO BULHES DA NBREGA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9501 - "Global and Local Instability of Concrete Tall Buildings" - M. FRANCO
- 9502 - "Um Elemento Finito Giroscópio" - MARCELO GONZALES BERGWELER, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI

- 9503 - "Teoria da Segunda Ordem das Placas - Uma Formulação Mista" - SELMA HISSAE SHIMURA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9504 - "Modelagem de Corpos Sólidos: Topologia e Operadores de Euler" - BENEDITO ROQUE DE GUIMARÃES ARANTES JUNIOR, JOÃO CYRO ANDRÉ, JOSÉ ANTONIO LEROSA DE SIQUEIRA
- 9505 - "Investigação Experimental em Laje de Concreto Armado Apoiada em Vigas Flexíveis" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9506 - "Influência da Flexibilidade das Vigas e das Lajes nos Esforços das Estruturas de Concreto Armado" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9507 - "A Calibração da Segurança na Nova Norma de Projeto de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9508 - "Método de Ensaio de Punção Excêntrica em Placa de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9509 - "Ensaio de Placas de Concreto Armado - Punção Excêntrica" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9510 - "Armadura de Cisalhamento para Punção em Placas de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9511 - "Aspectos Normativos sobre Punção em Placas de Concreto Armado" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9512 - "Alternativas de Representação da Protensão, no Projeto de Estruturas de Concreto" - KALIL J. SKAF, FERNADO R. STUCCHI
- 9513 - "Aplicações do Lagrangeano Aumentado em Otimização Estrutural" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO BRASIL
- 9514 - "Análise Linear da Estabilidade de Treliças Utilizando o Método de Lanczos" - CÉLIA REGINA MORETTI MEIRELLES, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9515 - "Análise Dinâmica de Pórticos Planos sob Ação de Carregamentos Transientes Considerando Formação de Rótulas Plásticas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, CESAR FERNANDES JUNIOR
- 9516 - "A Engenharia da Fusão Termonuclear Controlada. Sua História e seu Futuro" - RUY MARCELO DE OLIVEIRA PAULETTI, VICTOR MANOEL DE SOUZA LIMA
- 9517 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas: - Pórticos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9518 - "Flambagem Lateral de Vigas de Madeira" - VALDIR PIGNATTA E SILVA
- 9519 - "Diagramas Tensão-Deformação dos Aços Estruturais Submetidos a Altas Temperaturas" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, PAULO DE MATTOS PIMENTA