EXTENSÕES LOCAIS DE ÁLGEBRAS

Maria Izabel Ramalho Martins
José Antonio de la Peña

1. Introdução

Sejam B e R álgebras de Artin, onde R é uma álgebra local, ${}_BM_R$ um bimódulo, que é finitamente gerado como B-modulo à esquerda e R-módulo à direita.

O anel triangular $A = \begin{pmatrix} B & {}_BM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$ é chamado uma *extensão local de* B.

Exemplos importantes de extensões locais de anéis artinianos são os seguintes: A é uma extensão por um ponto de uma álgebra B de dimensão finita sobre um corpo k, onde $R = k$ (ver [10]); se A é uma álgebra cujos ideais idempotentes são módulos projetivos, então A é uma extensão local de uma álgebra B, satisfazendo também que todos os seus ideais idempotentes são projetivos (ver [3, 9]).

Para as extensões locais A, estudamos a categoria mod_A, dos A-módulos à esquerda, finitamente gerados, e certas subcategorias de mod_A, bem como suas relações com mod_B. Entre os principais resultados estão os relacionados com o tipo de representação de A, no caso em que A é uma extensão de uma álgebra B, básica, indecomponível, de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. São eles.

Proposição 1. *Se A é de tipo manso e ${}_BM_R \neq 0$, então $R = k[t]/(t^r)$, para algum $r \geq 1$.*
Neste caso, dizemos que A é *uma extensão por um laço* de B.

As formas quadráticas, como é bem conhecido, foram uma ferramenta útil, em teoria de representações de álgebras, para o estudo e classificação das álgebras hereditárias, segundo seu tipo de representação (ver [1, 10]). Elas também têm sido utilizadas na determinação do tipo de representação das álgebras que são quociente de uma álgebra hereditária (ver [8, 10]).

Para as extensões por um laço (que não são quociente de álgebras hereditárias) definimos uma forma quadrática q_A e obtivemos o seguinte

Teorema 1. *Seja A uma extensão por um laço de uma k-álgebra básica B.*
(a) Se A é de tipo finito, então q_A é fracamente positiva;
(b) Se A é de tipo manso, então q_A é fracamente não negativa.

2. A categoria mod_A de uma extensão local

Seja A uma extensão local da álgebra B da forma $A = \begin{pmatrix} B & {}_BM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$, onde R é uma álgebra local e ${}_BM_R$ é um $B-R$-bimódulo finitamente gerado. Sejam $e_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $e_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ idempotentes de A. Cada A-módulo X é identificado com uma terna $({}_BX', {}_RX'', \varphi_X)$, onde $X' = e_BX$ é um B-módulo à esquerda, ${}_RX'' = e_RX$ é um R-módulo

Nesta exposição apresentaremos parte dos resultados obtidos pelos autores acima (em [6]) à esquerda e $\varphi_X: M \otimes_R X'' \to X'$ é um B-morfismo dado pela multiplicação. Com esta identificação um A-morfismo entre $X = ({}_BX', {}_RX'', \varphi_X)$ e $Y = ({}_BY', {}_RY'', \varphi_Y)$ é um par de morfismos (f', f''), com $f': X' \longrightarrow Y'$ e $f'': X'' \longrightarrow Y''$, tal que $f' \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ 1_M \otimes_R f''$.

Às vezes, é conveniente identificar mod_A com a categoria cujos objetos são $({}_BX', {}_RX'', \bar{\varphi_X})$, onde $\bar{\varphi_X}: X'' \longrightarrow Hom_B(M, X')$ é a aplicação correspondente a φ_X por adjunção.

Observamos que $mod_B \hookrightarrow mod_A$, pela identificação de cada X em mod_B pela terna $(X, 0, 0_X)$ em mod_A.

As identificações acima permite-nos explicitar os A-módulos projetivos (injetivos) indecomponíveis, os morfismos poço (fonte) em mod_A, chegando (resp. saindo) nos (dos) projetivos (resp. injetivos) indecomponíveis. Além disso, permitem também descrever as seqüências de Auslander-Reiten em mod_A, que têm início ou término em mod_B (ver [7, 6]).

Assumindo que B e R são álgebras básicas e fixando um conjunto completo $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de idempotentes ortogonais primitivos de B, então $e_B = \sum_{i=1}^{n} e_i$, como elemento de A.

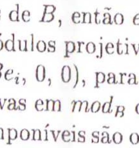
Assim é fácil verificar que os A-módulos projetivos indecomponíveis são da forma $P_w = ({}_BM, R, id: M \otimes_R R \longrightarrow M)$ e $P_i = (Be_i, 0, 0)$, para $i = 1, 2, ..., n$. Se $I_i^0 = E(top\, Be_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$, são as envolventes injetivas em mod_B dos módulos simples, então os representantes dos A-módulos injetivos indecomponíveis são os da forma: $I_i = (I_i^0, Hom_B(M, I_i^0), \eta_i)$, onde $\eta_i: M \otimes_R Hom_B(M, I_i^0) \longrightarrow I_i^0$ é a função avaliação e $I_w = (0, E, 0)$, onde E é a envolvente injetiva em mod_R do único R-módulo simples.

3. Tipo de representação e formas quadráticas

Seja k um corpo algebricamente fechado e assumamos que $B = kQ/I$, para um quiver finito Q e um ideal admissível I da álgebra kQ (ver [4]).

Assumamos também que R é uma k-álgebra local de dimensão finita. Então R é um quociente de $k\Delta_s$, para algum $s \geq 0$, onde Δ_s é um "bouquet" de s laços. Assim, a extensão local $A = \begin{pmatrix} B & {}_BM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$ é uma álgebra de quiver com relações (ver [4]), dada por um quiver Q_A da forma

Q_A :

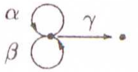


e um ideal admissível I_A de kQ_A.

Recordemos que uma k-álgebra de dimensão finita é de *representação finita* (ou de forma abreviada, de tipo finito) se existe somente um número finito de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis. A é de *tipo manso* (ou simplesmente mansa) se, para cada $d \in \boldsymbol{N}$, existe uma família $N_1, N_2, ..., N_s$ de $A - k[t]$-bimódulos, livres como $k[t]$-módulos à direita, tal que todo A-módulo indecomponível X, com $dim_k X = d$, é isomorfo a $N_i \otimes_{k[t]} S_\lambda$, para algum $i = 1, 2, ... s$ e $\lambda \in k$, onde $S_\lambda = k[t]/(t - \lambda)$.

Proposição 1 *Se A é uma extensão local de tipo manso e $M \neq 0$, então $R = k[t]/(t^r)$, para algum $r \geq 1$.*

Prova. Suponhamos que $R = k\Delta_s/L$, para algum $s \geq 0$ e algum ideal admissível L de $k\Delta_s$. Se $s \geq 2$, então existe um quociente $\overline{A}$ de A, que é a k-álgebra dada pelo quiver e as relações dadas abaixo.

 com $\alpha^2 = 0 = \beta^2$, $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ e $\gamma\alpha = 0 = \gamma\beta$.

É bem conhecido que a k-álgebra $\overline{A}$ é de tipo selvagem e , portanto, A não é de tipo manso. Esta contradição mostra que $s \leq 1$. ∎

Definição 1 *No caso em que* $R = k[t]/(t^r)$, $r \geq 1$, *dizemos que* A *é uma extensão por um laço de* B.

Uma vez que nosso objetivo é relacionar tipo de representação de extensões locais com formas quadráticas, estaremos assumindo, no que segue, que A é uma extensão local como acima e tal que $R = k[t]/(t^r)$, para $r \geq 1$, ou seja, que A é uma extensão por um laço de B.

Vamos assumir agora que Q, o quiver de B, tem o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ como conjunto de vértices e vamos denotar por a o outro vértice de Q_A, que não é vértice de Q. Sejam $J_1, J_2, \ldots, J_r$ os representantes dos R-módulos indecomponíveis e ordenados de forma que $dim_k J_i$ seja igual a i.

Dado $X = ({}_BX', RX'', \varphi_X) \in mod_A$, o R-módulo ${}_RX''$ se decompõe como $X'' = \oplus_{i=1}^r J_i^{v(i)}$. Definimos então o *vetor coordenada de* X como $\underline{cdn}\, X = (v(1), \ldots, v(r); dim_k X'(1), \ldots, dim_k X'(n)) \in \mathbb{Z}^{r+n}$.

Seja $L = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ um conjunto minimal de geradores de I_A e denotamos por $r(x, y)$ a cardinalidade de $L \cap I_A(x, y)$. Então definimos uma forma quadrática $q_A: \mathbb{Z}^{r+n} \to \mathbb{Q}$ por

$$q_A(y; x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq r} c_{ij} y_i y_j + \sum_{b \neq a} x_b^2 - \sum_{a \xrightarrow{\beta} b} \Big(\sum_{i=1}^{r} y_i\Big) x_b +$$

$$+ \sum_{b \neq a} r(a, b) \Big(\sum_{i=1}^{r} y_i\Big) x_b - \sum_{a \neq b \to c} x_b x_c + \sum_{b, c \neq a} r(b, c) x_b x_c,$$

onde os coeficientes são dados por: $c_{ii} = \frac{1}{i}$ e $c_{ij} = \frac{i+j}{ij}$, se $i < j$. Observamos que a forma quadrática acima definida coincide com a forma de Tits (ver [1]) no caso em que $R = k$.

Definição 2 *Dada uma forma quadrática* $q: \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Q}$, *dizemos que* q *é fracamente positiva se* $q(z) > 0$, *para todo* $z \in \mathbb{N}^m$, $z \neq 0$. *E dizemos que* q *é fracamente não negativa se* $q(z) \geq 0$, *para todo* $z \in \mathbb{N}^m$.

Através da forma quadrática obtida acima, obtemos o

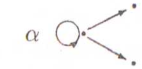
Teorema 1 *Seja* A *uma extensão por um laço de* B.

a) Se A *é de tipo finito, então* q_A *é fracamente positiva;*

b) Se A *é de tipo manso, então* q_A *é fracamente não negativa.*

Antes de provar o teorema 1, daremos alguns exemplos como ilustração.

Exemplo 1. Consideremos as extensões por um laço A_r da álgebra semi-simples com 2 vértices dadas pelo quiver

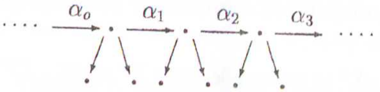


e a relação $\alpha^r = 0$.

(i) Primeiramente, suponhamos que $\alpha^2 = 0$. Então q_{A_2} é fracamente não negativa, pois

$$q_{A_2}(y_1, y_2; x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2 + (x_2 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_1 y_2.$$

Mas ela não é fracamente positiva, uma vez que $q_{A_2}(0, 2; 1, 1) = 0$. Assim A_2 é de tipo manso que não é de tipo finito. Este último fato pode ser visto através da construção do recobrimento universal (ver [2]) $F\colon \tilde{A}_2 \to A_2$, onde $\tilde{A}_2$ é dado pelo quiver:



e as relações $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0,\ i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Suponhamos que $\alpha^3 = 0$. Então q_{A_3} é não fracamente não negativa (pois, $q_{A_3}(0, 0, 2; 1, 1) = -\frac{2}{3} < 0$). Então A_3 é de tipo selvagem.

Exemplo 2. Consideremos a extensão por um laço A da álgebra simples $B = k$ (portanto, com um único vértice), dada pelo quiver

e a relação $\alpha^4 = 0$.

Temos que $q_A(y_1, y_2, y_3, y_4; x) = (x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4))^2 + \frac{3}{4}y_1 y_4 + \frac{1}{4}y_2 y_4 + \frac{1}{12}y_3 y_4 + \frac{3}{4}y_1^2 + y_1 y_2 + \frac{5}{6}y_1 y_3 + \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{12}y_3^2 + \frac{1}{3}y_2 y_3$ é fracamente não negativa, mas A é de tipo selvagem. Este exemplo mostra que a condição (b) do teorema é condição apenas necessária para A ser de tipo manso.

4. A prova do Teorema 1

Seja $(v; w) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^n$. Então um A-módulo $X = (X', X'', \varphi_X) \in mod_A$, com $\underline{cdn}\, X = (v; w)$, pode ser novamente identificado com um conjunto de matrizes no espaço afim $\prod_{i=1}^r \prod_{a \xrightarrow{\beta} b} J_i^{v(i)w(b)} \times mod_B(w)$, onde $mod_B(w)$ é a variedade dos B-módulos de dimensão w, que é uma variedade fechada do espaço afim $\prod_{b \to c} k^{w(b)w(c)}$, (ver [8]). Com efeito, o B-módulo $X' \in mod_B(w)$, o morfismo $\varphi_X \in Hom_B(M \otimes_R X'', X') = \oplus_{i=1}^r Hom_B(M \otimes_R J_i, X')^{v(i)}$ fica determinado por uma matriz no espaço $\prod_{i=1}^r \prod_{a \xrightarrow{\beta} b} J_i^{v(i)w(b)}$. Com estas identificações os A-módulos de vetor coordenada $(v; w)$ formam uma subvariedade fechada $\widetilde{mod}_A(v; w)$ do espaço afim mencionado acima.

Além disso, o grupo afim $\widetilde{G}(v;w) = Aut_R(\oplus_{i=1}^{r} J_i^{v(i)}) \times \prod_{b=1}^{n} GL_{w(b)}(k)$ opera por conjugação sobre $\widetilde{mod}_A(v;w)$ de tal forma que as órbitas desta ação formam as classes de isomorfismo dos A-módulos de vetor coordenada $(v;w)$.

Proposição 2 *Se a álgebra A é de tipo finito (resp. de tipo manso), então a diferença $dim\,\widetilde{G}(v;w) - dim\,\widetilde{mod}_A(v;w)$ é positiva (resp. é não negativa), para cada $(v;w) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^n$.*

Prova. Se A é de tipo finito, a demonstração resulta da utilização do clássico argumento de Tits (ver [4, 1]). Para o caso manso, o resultado decorre também dos argumentos usados em [8]. ∎

Para a demonstração do teorema 1, vamos considerar alguns passos.

Passo 1. Calculamos a $dim\,\widetilde{G}(v;w)$.

Primeiramente, temos que $g = (g_{ij}) \in Aut_R(\oplus_{i=1}^{r} J_i^{v(i)})$ se e somente se $g_{ii} \in Aut_R(J_i^{v(i)})$ e $g_{ij} \in Hom_R(J_i^{v(i)}, J_j^{v(j)})$. Além disso, $dim\,Aut_R(J_i^{v(i)}) = dim_k End_R(J_i^{v(i)}) = v(i)^2$. $\dim_k End_R(J_i)$ e $dim\,Hom_R(J_i^{v(i)}, J_j^{v(j)}) = = v(i)v(j)dim_k\,Hom_k(J_i, J_j)$. Um simples cálculo mostra que um k-morfismo de J_i to J_j com $i \leq j$ é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-2} & a_{i-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $dim\,Aut(\oplus_{i=1}^{r} J_i^{v(i)}) = \sum_{i=1}^{r} i\,v(i)^2 + \sum_{i<j}(i+j)v(i)v(j)$.

Passo 2. Determinamos um limitante inferior para $dim\,\widetilde{mod}_A(v;w)$.

Claramente temos que $\widetilde{mod}_A(v;w) \subset \prod_{a \xrightarrow{\beta} b} k^{w_o w(b)} \times mod_B(w)$, onde $w_o = \sum_{i=1}^{r} i\,v(i)$ e as matrizes envolvidas satisfazem todas as relações no conjunto minimal $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$. Além disso, podemos excluir a relação $\rho_1 = \alpha^r$, uma vez que esta já está automaticamente satisfeita pela forma com que tomamos a decomposição de $X'' \in mod_R$.

Então,

$$dim\,\widetilde{mod}_A(v;w) \geq \sum_{a \xrightarrow{\beta} b} (\sum_{i=1}^{r} i\,v(i))w(b) + \sum_{a \neq b \to c} w(b)w(c) -$$

$$- \sum_{b \neq a} r(a,b)(\sum_{i=1}^{r} i\,v(i))w(b) - \sum_{a \neq b,c} r(b,c)w(b)w(c).$$

Passo 3. Seja $(y;x) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^n$. Para $1 \leq i \leq r$, seja $y_i = i\,v(i)$ e para $1 \leq j \leq n$, $x_j = w(j)$. A menos de um múltiplo escalar, podemos assumir que $(v;w) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^n$. Assim ,

$$q_A(y;x) = \sum_{i=1}^{r} iv(i)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r} (i+j)v(i)v(j) + \sum_{b \neq a} w(b)^2 - \sum_{a \neq b \to c} w(b)w(c) -$$

$$- \sum_{a \xrightarrow{\beta} b} \sum_{i=1}^{r} iv(i)w(b) + \sum_{b \neq a} \sum_{i=1}^{r} r(a,b) iv(i) w(b) + \sum_{a \neq b,c} r(b,c) w(b) w(c)$$

$$\geq dim\, \widetilde{G}(v;w) - dim\, \widetilde{mod}_A(v;w),$$

logo o resultado resultado segue utilizando a proposição 2. ∎

Referências

[1] K. Bongartz, *Algebras and quadratic forms*, J. London Math. Soc. 28(2), (1983), 461–469.

[2] K. Bongartz, P. Gabriel, *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math., 65 (1982), 331–378.

[3] F. Coelho, E. Marcos, H. Merklen, M. I. Platzeck, *Modules of infinite projective dimension over algebras whose idempotent ideals are projective*, Tsukuba Journal Maths., to appear.

[4] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscr. Math. 6 (1972) 71–103.

[5] G. Gabriel, A. Roiter, *Representation of finite dimensional Algebra*, Algebra VIII, Encyclopaedia of Math. Sc. 73, Springer, 1992.

[6] Ma. I. R. Martins, J. A. de la Peña, *On local extensions of algebras*, preprint, 1996.

[7] H. Merklen, *On Auslander-Reiten sequences of triangular matrix algebras*, Canad. Math. Soc., Conf. Proc. 11 (1991), 231–247.

[8] J. A. de la Peña, *On the dimension of module varieties for tame and wild algebras*, Commun. Algebra 19(6), (1991), 1795–1807.

[9] M. I. Platzeck, *Artin rings with all idempotent ideals projective*, Commun. Algebra 24(8) (1996), 2515–2523.

[10] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lect. Notes Math. 1099, Springer, 1984.

Maria Izabel Ramalho Martins
Departamento de Matemática, IME
Universidade de São Paulo
CEP 05317-970, São Paulo, SP, Brasil
E-mail bel@ime.usp.br

José Antonio de la Peña
Instituto de Matematicas
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Ciudad Universitaria, C.P. 04510
Mexico, DF, Mexico
E-mail jap@penelope.matem.unam.mx