BT/PEF-8903

O MÉTODO DOS PRISMAS EQUIVALENTES APLICADO AO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES DE TENSÃO, AO LONGO DO TEMPO, NAS SEÇÕES DE CONCRETO

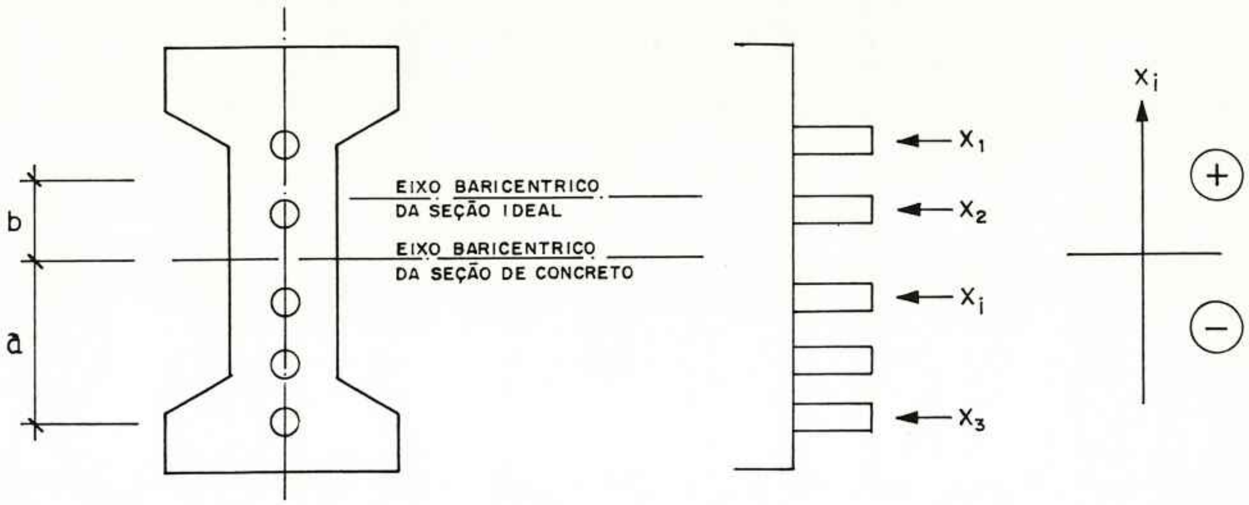
José Carlos de Figueiredo Ferraz
Professor Catedrático

(recebido em 19/01/89)

Um problema que de há muito vem preocupando os pesquisadores é o da determinação das variações de tensão n'uma seção de concreto, armada com armadura frouxa ou protendida, provocadas pela fluência do aço e concreto, bem como pela retração.

Para solução deste problema, reportamo-nos ao nosso trabalho (1), onde são introduzidas as propriedades do concreto e do aço, no que tange ao seu comportamento à fluência e à retração; e de onde estabelecemos uma fórmula fechada para a determinação do estado de tensão da seção, ao final de um tempo t, sujeita a um certo estado inicial.

Para melhor esclarecer, consideremos uma seção de concreto protendido, munida de vários cabos, dispostos ao longo da altura do seu eixo de simetria.



Como se sabe, podemos substituir a seção de concreto por dois prismas equivalentes, arbitrariamente escolhido, situados às distâncias, a e b, respectivamente do baricentro da seção, de modo que $ab = i^2 = J/S$. Carga na altura de um prisma não provoca tensão na altura do outro.

Com isto à seção total, composta de aço e concreto, será substituída por um conjunto de n prismas equivalentes; sendo dois de concreto e os demais constituídos das próprias seções dos aços de protenção.

Inicialmente, isto é no início da contagem do tempo, o prisma de ordem

i está sujeito a uma tensão σ_{oi} . Designemos por Xi a variação da força atuando no prisma decorrido um tempo t. Sua deformação específica final será por:

$$\frac{\sigma_{oi}}{E_i}\,\phi_{ti} + \frac{X_i}{E_i S_i}\,q_{2i} + \varepsilon_{ri}$$

onde:

ϕ_{ti} = é o índice de fluência do material do prisma,

$$q_{2i} = 1 + \frac{\phi_{ti}}{2}$$

E_i = o módulo de elasticidade do material do prisma,

$\phi_{ti} = \psi_{ti}$ no caso de concreto,

$\phi_{ti} = \chi_{ti}$ no caso de aço,

$\chi_{ti} = -\ln(1 - \psi_{ti})$

χ_{ti} = o índice de fluência (1)

ε_{ri} = a retração no intervalo $t - t_o$

Apelando para a hipótese da seção plana podemos escrever:

$$\frac{\sigma_{oi}}{E_i}\,\phi_{ti} + \frac{X_i}{E_i S_i}\,q_{2i} + \varepsilon_{ri} = A + Bxi \qquad (1)$$

onde: A e B duas constantes a serem determinadas, e xi a distância do prisma i a um eixo de referência, por enquanto arbitrário.

De (1) resulta:

$$X_i = \frac{1}{q_{2i}} \left[(A + Bxi)\, E_i S_i - \sigma_{oi} S_i\, \phi_{ti} - E_i S_i\, \varepsilon_{ri} \right] \tag{2}$$

Por razões de equilíbrio,

$$\Sigma X_i = 0 \tag{3}$$

$$\Sigma\, X_i xi = 0$$

Então:

$$A\, \Sigma\, \frac{E_i S_i}{q_{2i}} + B\, \Sigma\, \frac{E_i S_i x_i}{q_{2i}} - \Sigma\, \frac{\sigma_{oi} S_i \phi_{ti}}{q_{2i}} - \Sigma\, \frac{E_i S_i \varepsilon_{ri}}{q_{2i}} = 0$$

$$A\, \Sigma\, \frac{E_i S_i x_i}{q_{2i}} + B\, \Sigma\, \frac{E_i S_i x_i^2}{q_{2i}} - \Sigma\, \frac{\sigma_{oi} S_i \phi_{ti}}{q_{2i}}\, xi - \Sigma\, \frac{E_i S_i \varepsilon_{ri}}{q_{2i}}\, x_i = 0 \tag{4}$$

Se tomarmos um eixo de referência tal que:

$$\Sigma\, \frac{E_i S_i x_i}{q_{2i}} = 0 \tag{5}$$

isto é o eixo baricêntrico de seção ideal $\frac{E_i S_i}{q_{2i}}$, vem :

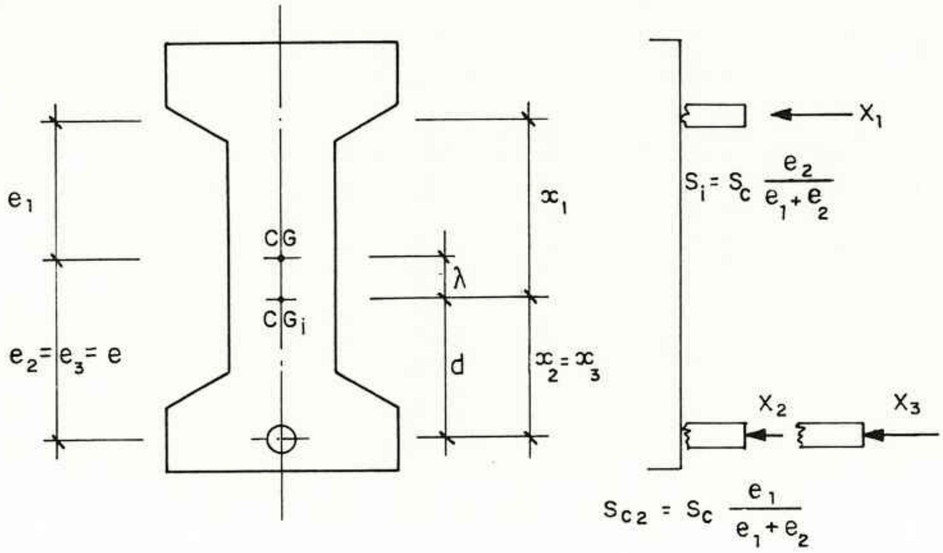
$$A = \frac{\Sigma\, \frac{\sigma_{oi} S_i \phi_{ti}}{q_{2i}} + \Sigma\, \frac{E_i S_i \varepsilon_{ri}}{q_{2i}}}{\Sigma\, \frac{E_i S_i}{q_{2i}}} \tag{6}$$

$$B = \frac{\Sigma\, \frac{\sigma_{oi} S_i\ ti}{q_{2i}}\, x_i + \Sigma\, \frac{E_i S_i \varepsilon_{ri}}{q_{2i}}\, x_i}{\Sigma\, \frac{E_i S_i x_i^2}{q_{2i}}} \tag{7}$$

Voltando à fórmula (2), podemos determinar o valor da variação da força aplicada no prisma i, depois de consumados, no tempo t, a fluência e a retração dos materiais.

Apliquemos estas fórmulas ao caso de apenas um cabo. Ademais, por simplicidade, façamos e_2 coincidir com a excentricidade e do cabo. Assim $e_2 = e_3 = e$.

Então $S_i = S_c \dfrac{e_2}{e_1+e_2}$, $S_2 = S_c \dfrac{e_1}{e_1+e_2}$



Então, na altura do cabo, as deformações específicas do aço e concreto (prisma) devem ser iguais:

$$\frac{\sigma_{co}}{E_c}\,\psi_t + \frac{X_2}{E_c\,S_2}\,q_2 + \varepsilon_r = \frac{\sigma_{ao}}{E_a}\,\chi_t + \frac{X_3}{E_a S_a}\,\overline{q_2} \qquad (8)$$

Como $X_1 + X_2 + X_3 = 0$

e $X_1\,(e_1 + e_2) = 0$ $\therefore$ $X_1 = 0$

$X_3 = -\,X_2 = X$

Desprezando a área da armadura em relação a área do concreto, de

$$\Sigma\,\frac{E_i S_i}{q_{2i}}\,x_i = 0$$

e designando por d_1 a distância do prisma 1 até o nível da armadura, vem:

$$\frac{E_c S_1}{q_2} d_1 = \frac{d \times E_c}{q_2} (S_1 + S_2) = \frac{E_c}{q_2} d \times S_c$$

Como

$$d_1 = e_1 + e_2$$

$$S_1 = S_c \frac{e_2}{e_1 + e_2}$$

$$\frac{e_2}{e_1 + e_2} (e_1 + e_2) = d$$

$$\therefore \quad d = e_2$$

Logo $\lambda = 0$

Voltando a (8) vem:

$$\frac{\sigma_{co}}{E_c} \varphi_t + \frac{\Delta \sigma_c}{E_c} q_2 + \varepsilon_r = \frac{\sigma_{ao} \chi t}{E_a} + \frac{\Delta \sigma_a}{E_a} \overline{q_2}$$

Mas

$$\Delta \sigma_c = \frac{X_2}{S_c} \left(\frac{e_1 + e_2}{e_1}\right) = - \frac{\Delta \sigma_a S_a}{S_c} \left(\frac{e_1 + e_2}{e_1}\right)$$

Já que $e_1 e_2 = i^2 = J/S_c$

Fazendo $\eta = \dfrac{e_1 + e_2}{e_1}$

$$\rho = \frac{S_a}{S_c} \qquad\qquad \alpha = \frac{E_a}{E_c}$$

$$\Delta \sigma_c = - \Delta \sigma_a \rho \eta$$

Portanto:

$$\frac{\sigma_{co}}{E_c}\ \varphi_t - \frac{\Delta\ \sigma_a \rho\mu q_2}{E_c} + \varepsilon_r = \frac{\sigma_{ao}\chi_t}{E_a} + \frac{\Delta\ \sigma_a}{E_a}\ \overline{q_2}$$

$\therefore$

$$\sigma_{co}\ \varphi_t - \Delta\ \sigma_a \mu\rho q_2 + E_c\ \varepsilon_r = \frac{\sigma_{ao}\chi_t}{\alpha} + \frac{\Delta\ \sigma_a}{\alpha}\ \overline{q_2}$$

$$\Delta\ \sigma_a\ (\mu\rho q_2 + \frac{\overline{q_2}}{\alpha}) = - \frac{\sigma_{ao}\chi_t}{\alpha} + \sigma_{co}\varphi_t + E_c\varepsilon_r$$

$$\Delta\ \sigma_a\ (\alpha\mu\rho q_2 + \overline{q_2}) = - \sigma_{ao}\ \chi_t + \alpha(\sigma_{co}\varphi_t + E_c\varepsilon_r)$$

$$\Delta\ \sigma_a = \frac{- \sigma_{ao}\ \chi_t + \alpha(\sigma_{co}\varphi_t + E_c\varepsilon_r)}{\overline{q_2} + \alpha\eta\rho q_2}$$

fórmula que coincide com a que propusemos para as Normas Brasileiras de Concreto Protendido.

NOTAS:

1) FIGUEIREDO FERRAZ, J.C. DE: Cálculo das alterações de tensão, ao longo do tempo, nas peças de concreto protendido: procedimentos diretos, simples, alternativos ao do CEB. Boletim Técnico BT/PEF-85.06-USP, agosto/85 e Caderno Técnico, nº 1, jan/88 - publicação da FIGUEIREDO FERRAZ - Consultoria e Engenharia de Projeto Ltda.