ANAIS

7º ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - 2021

Organizadores: **CHRISTINA BRECH**
DAVID PIRES DIAS

O Encontro promove as atividades e produções do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Universidade de São Paulo - USP
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Christina Brech
David Pires Dias

Organizadores

ANAIS

7º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021

São Paulo
IME-USP
2021

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Organizadores
Profa. Dra. Christina Brech
Prof. Dr. David Pires Dias

Diagramação, normalização e capa
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra

E56 Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (7. : 2021 : São Paulo, Brasil).
Anais [do] 7º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021 [recurso eletrônico]. / organizadores Christina Brech, David Pires Dias. -- São Paulo : IME-USP, 2021.

ISBN: 978-65-994252-1-9 (e-book)
Modo de acesso: <https://www.ime.usp.br/posempmat/encontros>

1. Matemática – Estudo e Ensino (Congressos). I. Brech, Christina, org. II. Dias, David Pires, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Catalogação na Fonte pelo Serviço de Informação e Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra.
Elaborada pela bibliotecária Maria Lucia Ribeiro – CRB 8/2766.

ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO: Uma abordagem com várias representações semióticas

SEQUENCES AND SERIES AT HIGH SCHOOL: An approach with different semiotic representations

Rodrigo Martins Lopes [1], Vera Helena Giusti de Souza [2]

[1] Prof. de Matématica na Educação Básica II, licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho; rodrigoml@ime.usp.br
[2] Profª Dra. em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, licenciada e Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo; vhgiusti@usp.br

RESUMO: Pesquisas mostram que o uso de vários sistemas de representação semiótica em sequências e séries, na Educação Básica, enriquece o aprendizado em Matemática, mas compreender, discriminar e saber usar esses sistemas não é espontâneo e precisa ser trabalhado pelo professor em sala de aula, de forma complementar ao livro didático. Por essa razão, tem-se por objetivo identificar dificuldades nos processos de conversão e tratamento de diferentes registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas e explorar concepções de infinito de um grupo de alunos do Ensino Médio. Espera-se responder quatro questões "Uma abordagem com vários registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de sequências e séries geométricas no Ensino Médio?", "Essa abordagem favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais?", "Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes?" e "Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de registros de representação semiótica?". Foram elaboradas quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma na dízima periódica 0,999…, e a primeira delas foi aplicada a sete estudantes de 2ª série do Ensino Médio brasileiro, cuja análise consta neste texto. Como produto final esperado de um Mestrado Profissional, dever-se-á deixar essas atividades propostas para o professor de Matemática da Educação Básica, com elementos que consideramos interessantes para o ensino de sequências e séries geométricas e também para um trabalho com concepções de infinito que aparecem no assunto.

Palavras-chave: Sequências. Séries geométricas. Infinito. Registros de representação semiótica. Ensino Médio. Matemática. Ensino. Didática.

ABSTRACT: Researches in Mathematics Education show that using various semiotic representation systems, in sequences and geometric series, enriches students´ learning and, according to Raymond Duval, understanding and knowing how to use those systems is not spontaneous and needs to be stimulated by teachers in classroom. For this reason, the principal aim is identifying difficulties in different semiotic representation systems conversion and treatment processes in sequences and geometric series and also exploring conceptions of infinite in a group of Brazilian High School students, as a research theme for a Professional Master Dissertation in Mathematics Teaching. It is expected to answer three questions, "Does an approach with various semiotic representation systems contribute to sequences and geometric series learning in High School?" "Does this approach allow the interaction of algorithmic, formal and intuitive aspects?", ¨Which infinite conceptions emerge in students answers?¨, "What difficulties are pointed out by participants in semiotic representation systems treatment and conversion processes?". It has been designed four activities about Sierpinski triangle and the first one has been applied to seven Brazilian High School students (16-17 years old), and analysis of these data are in this text. As Professional Master final product it is intended to leave these activities as a proposal for Basic Education Mathematics teacher, with interesting elements for teaching sequences and geometric series and also for a work with infinity conceptions involved in this subject.

Keywords: Sequences. Geometric series. Infinite. Semiotic representation systems. High School. Mathematics. Teaching. Didactics.

1 INTRODUÇÃO

Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, fui confrontado com alguns tópicos abordados na grade curricular do curso e que mostraram um alto grau de dificuldade para mim e para os colegas de classe, em especial sequências e séries em Cálculo III. E, mesmo que tenhamos sido aprovados em Cálculo I e II, apresentávamos dificuldade em compreender as ideias de infinito implícitas nas séries, como por exemplo a "convergência" de uma adição com "infinitas" parcelas.

Refletindo sobre essas dificuldades, surgiram perguntas "Será que na Educação Básica faltou algo que poderia ter contribuído para que pudéssemos compreender os conceitos de infinito e de convergência apresentados?" "Não estão presentes no conteúdo as adições com infinitas parcelas e a convergência?". Procurei respostas em três coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. Verifiquei que os autores tratam desses conceitos com exemplos de dízimas periódicas na 1º série do Ensino Médio em progressões geométricas com $0 < r < 1$, para calcular a soma infinita de uma PG convergente.

Se séries geométricas estão diretamente conectadas a um conteúdo presente (e trabalhado) na Educação Básica, não seria normal os estudantes sentirem tanta estranheza em questões relacionadas às ideias de infinito envolvidas no trato desses assuntos, como a "adição" de infinitas parcelas, nem o fato dessa "adição" resultar numa "soma" finita, como é o caso das séries convergentes e, em particular, das dízimas periódicas e das progressões aritméticas ou geométricas "infinitas". Uma hipótese é que isso acontece porque são propostos apenas cálculos com o simples uso de fórmulas e/ou tarefas repetitivas do gênero calcular e/ou determinar, o que contradiz Duval (2012) que menciona que muitas vezes a mera aplicação de fórmulas não faz sentido para o aluno.

Alguns assuntos que poderiam contribuir são apresentados aos estudantes na escolaridade básica. Um deles é o das dízimas periódicas, que pode ser explorado com séries - chamadas séries geométricas - e envolve duas noções de “infinito”. Uma delas está na representação decimal da dízima, que tem “infinitas” casas decimais, e a outra, na representação da dízima em série com “infinitas” parcelas. Por exemplo, quando escrevemos $0,999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ...$, podemos discutir com os estudantes o significado dos três pontinhos em cada uma das representações.

Observei que na Educação Básica - por exemplo nas provas da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), propostas pela SEESP bimestralmente - os estudantes são constantemente “convidados” a mostrar que sabem converter uma dízima periódica em sua fração geratriz, mas será que compreendem o verdadeiro significado dessa conversão? O que está implícito na mudança de representação na igualdade acima? Compreendem a diferença entre as duas representações? E as ideias de infinito, tanto na convergência como na adição de infinitas parcelas?

Foi a partir de questões como essas que meu interesse pedagógico e didático por sequências e séries geométricas trouxe como objetivo estudar e pesquisar como abordar o trato do infinito e algumas de suas diferentes representações na matemática, a fim de compreender conceitos que até então estavam implícitos para mim em fórmulas aplicadas aos limites, derivadas e integrais, o que é uma convergência, o que é uma adição com infinitas parcelas.

Há muitas propriedades matemáticas que podem ser investigadas em conteúdos da Educação Básica, mas que acabam passando desapercebidas por nós professores e que poderiam ajudar os estudantes em estudos posteriores, tanto em faculdades de ciências exatas como em estudos técnicos. Uma delas, no meu entender, está ligada a conceitos relacionados às sequências e séries. Como ensinar coisas que podem ser complexas aos estudantes, com uma matemática distante da mera exposição de fórmulas? Mas cada vez mais próxima de uma compreensão conceitual e significativa, por meio de atividades interessantes?

No período da graduação, tive contato com diversas teorias sobre o ensino da matemática. Umas dessas teorias, a dos Registros de Representação Semiótica, proposta pelo pesquisador francês Raymond Duval, possibilitou-me uma reflexão sobre a importância de utilizar diferentes registros de representação para a compreensão de um objeto matemático. No segundo semestre de 2018, ingressei no Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (MPEM) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) e juntamente com minha orientadora buscamos investigar o trato desses assuntos. No mestrado, visualizei a possibilidade de ampliar minha formação acadêmica por meio do desenvolvimento de uma pesquisa que tivesse como foco uma abordagem de Ensino de Matemática por meio da pluralidade de sistemas de representação de que a matemática dispõe para se comunicar.

Diante das experiências adquiridas na graduação e, especialmente, com as dificuldades dos estudantes, relacionadas às ideias de infinito, presente em diferentes formas, optamos por utilizar a Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009) sobre a necessidade de conhecer e coordenar pelo menos dois sistemas de representação semiótica e os argumentos de Fischbein (1994) sobre a importância da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para a aprendizagem em Matemática, no caso específico de sequências e séries geométricas no Ensino Médio, com o objetivo de pesquisar uma forma de ensino que vá além da mera utilização de fórmulas e para que o estudante possa compreender e apreender o real significado por trás de um conteúdo.

Acreditamos que a consolidação de conceitos e ideias matemáticos que estão presentes no trato de sequências e séries geométricas é caracterizada principalmente por processos de generalização que podem ocorrer quando há interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, ao realizar tratamento e conversão de vários sistemas de representação semiótica.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O estudo dos padrões em sequências e séries geométricas, como parte dos conteúdos de Álgebra e de Geometria, pode permitir o entendimento, a discriminação e o uso de diferentes sistemas de representação, pois ao tentar identificar padrões o estudante faz observações e compreende conceitos e propriedades e ainda assume um papel fundamental na sua aprendizagem. Essa ligação permite ao professor explorar, com os diferentes registros de representação, concepções de infinito e trabalhar tratamentos e conversões. Precisamos explorar, no ensino de sequências e séries geométricas, os registros de representação, os padrões, as regularidades, os números e concepções de infinito.

No caso das séries geométricas, deve-se trabalhar dízimas periódicas, fração geratriz, discutir convergência e divergência de uma série geométrica por meio de exemplos com representações numéricas, algébricas, geométricas e gráficas. Mason (1996) considera que a busca da percepção de padrões e regularidades é um caminho para expressar generalidades. Vale e Pimentel (2015) defendem a ideia dos padrões como tema transversal a todos os níveis de ensino e ressaltam que

> [...] a profundidade e variedade das conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da matemática conduz à consideração deste tema como transversal em toda matemática escolar, quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores quer no desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e comunicação (VALE; PIMENTEL, 2015, p.168).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio (PCN+), 2002, temos

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno entender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002, p. 121).

Para Duval (2009), na Educação Básica e até mesmo em cursos superiores, quando se envolvem diferentes sistemas de representação semiótica de um objeto matemático, os estudantes encontram dificuldades para compreender, espontaneamente, as mudanças de registros e tendem a confundir um objeto com suas representações; daí, a importância de o professor trabalhar, em sala de aula, diferentes sistemas de representação e suas mudanças.

Conforme González-Martin (2009), uma das principais mudanças na transição do "cálculo" praticado no Ensino Médio para o universitário é a necessidade de trabalhar com limites ou com adições com infinitas parcelas, especialmente de sequências e/ou séries infinitas. Foram identificados por González-Martin (2009) e também por González-Martín, Nardi e Biza (2011), duas dificuldades em relação ao conceito de soma infinita. O primeiro é a ideia intuitiva e natural de que a soma de infinitos termos deve ser infinita. O segundo é a concepção de que um processo infinito deve passar por cada etapa, uma após a outra, sem pular, o que leva ao conceito de infinito potencial.

De acordo com Fischbein (1994), para um estudante do Ensino Médio (ou do Ensino Superior) aceitar que vale a igualdade $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$, ele precisa considerar o conjunto infinito de elementos da sequência em sua totalidade, ou seja, o infinito real. Fischbein (1994) relata um estudo feito por Vinner (1991) que, ao aplicar essa igualdade, com o intuito de definir o conceito de limite - após o ensino deste - com 15 estudantes superdotados do Ensino Médio, chegou aos seguintes resultados: soma = 2 (5,6%), soma = infinito (51,4%) e "a soma é menor que 2" ou "a soma tende a 2" (16,8%).

Segundo Vinner (1991), os estudantes não consideram a totalidade das parcelas e consideram o infinito da sequência como potencial, isto é, "a soma <u>tende</u> a 2 ou a soma é <u>menor do que</u> 2" (grifos nossos) e assumem que pode ser realizado sem nunca parar, a mesma dificuldade apontada por González-Martín, Nardi e Biza (2011). Em concordância com Fischbein (1994), "Como se pode ver, apenas uma porcentagem muito pequena de alunos deu a resposta ($s = 2$). A explicação é que, como mencionamos acima, o infinito real é contra intuitivo." (FISCHBEIN, 1994, p. 240, tradução nossa).[30]

Quina (2015), ao aplicar quatro atividades sobre sequências e séries, utilizando registros de representação semiótica, com alunos de 1ª série do Ensino Médio, buscou mostrar que o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica enriquece o aprendizado em Matemática; no entanto, relata que notou um alto grau de dificuldade nas atividades propostas, pois muitos não conseguiram fazer a conversão entre os registros e não compreenderam as ideias de infinito envolvidas. Duval (2012) defende que compreender os registros de representação não ocorre espontaneamente e que esse tema necessita ser explorado em sala de aula por meio de atividades que trabalhem diferentes tipos de registros, dos mais simples aos mais complexos.

Segundo Bachelard (1996), o ensino das ciências exatas encontra inúmeros obstáculos epistemológicos no Ensino Médio (com funções, álgebra e o conceito de infinito) e é importante que o professor saiba que um novo conhecimento só acontece por meio de um

[30] *As one can see, only a very small percentage of students gave the correct answer (S = 2). The explanation is that, as we mentioned above, actual infinity is counterintuitive."* (FISCHBEIN, 1994, p. 240).

processo de questionamento constante, de retificação das concepções erradas trazidas pelo estudante, para a superação desses obstáculos. O não reconhecimento, pelos professores, de que pode haver obstáculos epistemológicos para a formação do pensamento científico do estudante é criticado por Bachelard e o professor precisa reconhecer que um estudante pode não compreender algo e entender o porquê dessa não compreensão.

> Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto a ponto. (BACHELARD, 1996, p.23).

Temos certeza que podemos ir além de exercícios e fórmulas e escolher, se houver, um livro ou um material didático que não restrinja o tema Sequências e Séries geométricas a isso. Assim, colocamos algumas indagações: como são introduzidos os conceitos de sequências e de séries geométricas em livros didáticos? Os professores iniciam o estudo do conteúdo com problemas e questões motivadoras? Podemos optar - e se sim, como fazer isso - pelo ensino do tema com o uso de várias representações semióticas?

2.1 Objetivos

Temos como objetivo de pesquisa desenvolver, analisar didaticamente e apresentar, ao final do Mestrado Profissional, propostas de ensino, compostas por conjuntos de atividades que envolvam generalizações, observação de padrões, concepções de infinito, justificativas e diferentes representações, no caso de sequências e séries.

Parte desse objetivo foi atingido, pois já desenvolvemos quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma na dízima periódica 0,999…., das quais damos detalhes na secção Metodologia.

E pretendemos responder quatro questões:

"Uma abordagem com vários registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de sequências e séries geométricas no Ensino Médio?"

"Essa abordagem favorece a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais?"

"Quais concepções de infinito emergem nas respostas dos participantes?"

"Quais as dificuldades explicitadas pelos participantes nos processos de tratamento e conversão de registros de representação semiótica?".

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica

Raymond Duval é filosofo francês, pesquisador e professor emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale,* na cidade de Bouloge-sur-mer, na França. Com sua teoria, propõe investigar a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.

O que seriam essas representações? "Uma escrita, uma notação, uns símbolos representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo." (DUVAL, 2012, p.268).

Segundo ele, a coordenação de vários registros de representação semiótica é fundamental para a apreensão conceitual de objetos matemáticos e para que o objeto seja reconhecido, mas não confundido com suas representações. É com estas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente, isto é, dá "acesso" ao objeto representado. Por exemplo: podemos ter acesso a uma parábola por meio da representação algébrica $y = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$, da representação gráfica ou ainda da representação em língua materna "Dados um ponto P do plano e uma reta à qual P não pertence, uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam da reta e do ponto P".

Como os objetos matemáticos não são acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, o único meio de acessá-los é por meio de suas representações semióticas, que vão permitir que uma pessoa o estude, o compreenda e o comunique a outros.

Desse modo, "Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?" (DUVAL, 2012, p. 268). A impossibilidade de acesso direto aos objetos matemáticos, por serem abstratos, e a consequente confusão objeto/representação torna mais difícil a aprendizagem matemática.

De acordo com Duval, faz-se necessário, então, que esses sistemas de representação permitam três atividades cognitivas: a formação das representações, o tratamento destas e a conversão de um sistema para outro,

A formação de uma representação semiótica consiste no uso de um ou vários signos, pertencentes a um sistema semiótico já existente e utilizado para representar um objeto, de acordo com regras específicas. Por exemplo, formar palavras na língua portuguesa, combinando as letras do alfabeto para formar as sílabas que compõem a palavra a ser representada.

O tratamento é a atividade cognitiva que permite modificar uma representação em outra, no mesmo sistema semiótico. Por exemplo, parafrasear um texto em língua materna.

> Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números (DUVAL, 2009, p.57).

A conversão é a atividade cognitiva que permite transformar uma representação feita num certo sistema de representação na representação em outro sistema de representação. Por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a gráfica.

E Duval defende que uma pessoa precisa discriminar, entender e usar pelo menos dois sistemas de representação diferentes, para não confundir um objeto matemático com suas representações.

3.2 Argumentos de Fischbein

Fischbein (1994) contrapõe a Matemática como corpo formal e dedutivo rigoroso do conhecimento conforme exposto em tratados e livros didáticos de alto nível e a Matemática como atividade humana. Segundo ele, devemos olhá-la como um processo criativo da atividade humana, que implica em momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação" e que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, não apenas formalmente, mas também intuitivamente, a validade dessas produções.

E chama atenção para a necessidade do educador matemático observar a existência, ou não, e a interação, ou não, de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais na atividade matemática de um ser humano.

O aspecto formal refere-se a axiomas, definições, teoremas e provas, que representam o núcleo da Matemática como uma ciência formal e precisam ser considerados quando analisamos a Matemática como um processo humano. Devem penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio e devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente.

O componente algorítmico diz respeito às técnicas e procedimentos de resolução, que devem ser ativamente treinados, pois apenas aspectos formais não são suficientes para adquirir habilidade em resolver problemas.

O aspecto intuitivo corresponde a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que o individuo considera verdadeiro sem a necessidade de prova ou justificação. Como consequência, as intuições podem desempenhar um papel facilitador no processo de conhecimento mas, eventualmente, podem aparecer equívocos e contradições. Por exemplo, muitos estudantes pensam que quanto maior for o perímetro de uma figura, maior será a sua área, ou que a soma de infinitas parcelas será infinito.

Essas intuições podem se tornar obstáculos epistemológicos, no sentido de Bachelard (1996) nos processos de aprendizado, resolução ou invenção. Por isso, Fischbein argumenta que é necessário que haja interação de aspectos formal, algorítmico e intuitivo para que haja aprendizagem e, se for o caso, a superação desses obstáculos.

4 METODOLOGIA

Como procedimento metodológico imediato para atingir os objetivos propostos, e na qualidade de trabalho final de uma Dissertação de Mestrado Profissional, colocamos “Propor uma abordagem para o ensino de sequências, progressões e séries geométricas, por meio de materiais concretos, com o uso de diferentes registros de representação semiótica”.

Destacamos os procedimentos metodológicos utilizados para a elaboração e a análise das propostas de ensino, bem como aplicação e análise dos dados de uma das atividades de uma das propostas.

- Propor uma abordagem para o ensino de sequências e séries no Ensino Médio, com o uso de diferentes registros de representação semiótica.
- Elaboração da Atividade: sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), investigar se o participante faz, ou não, interação entre aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994). Para isso, procuramos explorar a utilização de diferentes registros para representar um mesmo objeto matemático, a partir de manipulação concreta, em papel sulfite 90, tamanho A1,
- Aplicação da atividade a um grupo de estudantes de uma 2º série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de São Paulo.
- Análise dos dados obtidos - gravações de áudio, fotografias - para destacar dificuldades e percepções dos participantes na elaboração de registros figurais e algébricos, que envolvem processos de tratamento e conversão.
- Identificar dificuldades dos participantes nos processos de conversão e de tratamento de registros de representação semiótica em sequências e séries geométricas.
- Investigar dificuldades dos estudantes com a concepção de infinito nas representações algébrica, numérica, figural e gráfica.
- Investigar dificuldades dos estudantes quanto aos aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.

Conforme apontado nos objetivos, já elaboramos quatro propostas de ensino, três baseadas no triângulo de Sierpinski e uma em dízimas periódicas, mas não analisamos didaticamente, ainda, nenhuma delas.

As três primeiras propostas podem ser descritas da seguinte forma:

1. Construção de três etapas do triângulo de Sierpinski no GeoGebra, hachurando o triângulo que não tem vértices no original e assim por diante; preenchimento de uma tabela com diversos registros (figural, numérico, algébrico) para representar o desenho obtido, o número de triângulos hachurados, a área de cada um desses triângulos e a área total desses triângulos nas três etapas consideradas; e respostas a um questionário investigativo. 2. Similar à proposta 1, mas hachurando os triângulos que se apoiam no original e assim por diante. 3. Similar à proposta 1, porém partindo da construção do triângulo de Sierpinski com papel sulfite.

Por conta da pandemia, só conseguimos organizar a aplicação de uma parte da proposta 3, com sete alunos de uma 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular da Cidade de São Paulo. Apresentamos, neste texto, parte da análise dos dados obtidos (protocolos, gravações de áudio e fotografias feitas com celular) com essa aplicação e com a qual pretendemos destacar dificuldades dos participantes na elaboração de registros figurais e algébricos e nos processos de tratamento e conversão; se há, ou não, interação de aspectos algorítmicos, formais e intuitivos; concepções de infinito.

Para a construção das figuras, utilizamos como recursos pedagógicos materiais manipuláveis. Escolheu-se encaminhar a atividade em três fases, partindo da construção para a generalização.

Fase 1 – Construção das figuras, por meio de dobradura com materiais concretos. Foi proposto aos participantes a construção do triângulo de Sierpinski, por meio de dobradura em papel A_1 sulfite 90g.

Etapa 2 - Após o processo de construção da dobradura, propusemos um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela com cinco colunas e seis linhas.

Fase 3 - Solicita-se aos participantes que respondam um conjunto de questões sobre o que pode ser observado e generalizado nas duas fases anteriores. Para isso, disponibilizamos um questionário aos participantes, a qual foi abordada algumas questões que envolvem a ideia de infinito e convergência.

5 RELATO DA APLICAÇÃO COM SETE ESTUDANTES DE 2 SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Nosso objetivo é oferecer uma abordagem para a exploração de diferentes representações semióticas de sequências e séries geométricas, bem como enriquecer ideias associadas ao infinito, seja como resultado de uma “adição”, seja como um processo que tem “infinitos” passos. A atividade foi aplicada em junho de 2021, com duração total de 1 hora e 30 minutos, a uma turma de 7 participantes da 2ª série do Ensino Médio, do turno da manhã, em uma escola particular da cidade de São Paulo. Para não os identificar pelo nome, utilizamos as siglas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e P_7 para referenciá-los.

A análise dos dados apresentados nesta secção corresponde aos dados obtidos com a atividade individual feita com os 7 participantes e que pode ser dividida em três fases:

Fase 1: dobradura (ver figura 1);

Fase 2: preenchimento de uma tabela (ver tabela 1) com diferentes representações - figural, numérica e algébrica;

Fase 3: resposta a um questionário (ver quadro 1), formado por questões relacionadas às ideias de infinito (como processo) e de convergência (como resultado de uma “adição”). Com a identificação dos erros e das dificuldades, pudemos comparar as respostas para avaliar se houve, ou não, interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (FISCHBEIN, 1994).

Apresentamos a análise dos dados de acordo com as três fases citadas.

5.1 Fase 1 – dobradura

Cada participante recebeu um triângulo equilátero recortado com aproveitamento de um dos lados de um papel A1 sulfite 90 g, para realizar, por dobradura, as três primeiras etapas da construção do triângulo de Sierpinski. Apresentamos o passo a passo da dobradura realizada com os participantes.

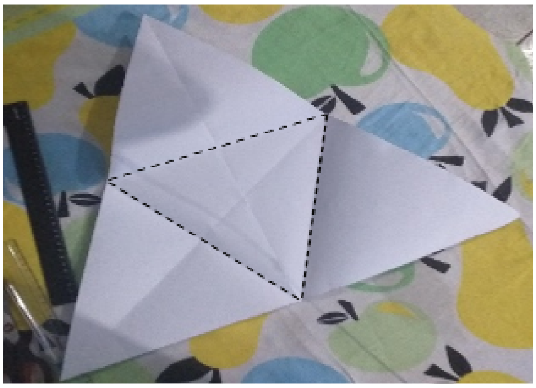
Primeiro passo: encontrar o ponto médio de um dos lados e dobrar o papel de modo que o vértice oposto coincida com esse ponto (ver figura 1).

Figura 1: Processo de construção do triângulo de Sierpinski

Fonte: Autores

Segundo passo: desdobrar o papel, dobrar nos pontilhados e desdobrar novamente, em seguida, dobrar o papel sobre si mesmo para vincar o pontilhado (ver figura 2).

Figura 2: Figura geradora



Fonte: Autores

Terceiro passo: pintar (ou hachurar) o triângulo que não tem os vértices do triângulo original – triângulo pontilhado da (figura 2), formado pelos pontos médios dos lados do triângulo original - para que, assim, conseguissem obter a figura geradora (ver figura 3). Assim chamada porque, no triângulo de Sierpinski, é ela que aparece “infinitas” vezes.

Esta é a Etapa 1, que corresponde à linha 2 da Tabela a ser preenchida.

Figura 3: figura geradora Etapa 1

Fonte: Autores

Quarto passo: em cada um dos três triângulos não hachurados da Etapa 1, repetir a dobradura feita na Etapa 1 e pintar o triângulo que não tem os vértices do triângulo original (ver figura 4).

Esta é a Etapa 2, que corresponde à linha 3 da Tabela a ser preenchida

Figura 4: Triângulo da Etapa 2

Fonte: Autores

Quinto passo: repetir esses passos nos nove triângulos não hachurados da Etapa 2. Esta é a Etapa 3, que corresponde à linha 4 da Tabela a ser preenchida (ver figura 5).

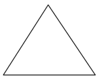
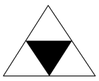
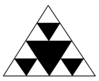
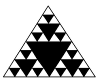
Figura 5: Triângulo da Etapa 3

Fonte: Autores

5.2 Fase 2 – preenchimento da tabela

Terminadas as três Etapas de dobradura, propusemos um trabalho investigativo de generalização, por meio do preenchimento de uma tabela (ver tabela 1) com cinco colunas e seis linhas. Estas correspondem, respectivamente, às Etapas 0, 1, 2, 3, n e ($n \to \infty$) da Fase 1. Na coluna 1, pede-se o registro figural das dobraduras obtidas na Fase 1, com destaque para os triângulos hachurados nas etapas respectivas. Na coluna 2, está discriminada a Etapa, sendo que as quatro primeiras células contêm, respectivamente, os números 0, 1, 2 e 3 e as duas últimas - relativas à Etapa genérica n e $(n\to\infty)$ - estão em branco e precisavam ser preenchidas pelos participantes. Na coluna 3, pede-se o registro numérico concernente à quantidade de triângulos hachurados (ou pintados). Na coluna 4, pede-se a área do menor triângulo hachurado (ou pintado) em cada uma das Etapas. Na coluna 5, pede-se a soma das áreas dos triângulos hachurados e que "aparecem" no registro figural correspondente - são as somas parciais para obtenção da soma das áreas de todos os triângulos hachurados (ou pintados) no chamado Triângulo de Sierpinski.

Tabela 1: Estudo da área pintada - triângulos coloridos

Desenho	***Etapa (n)***	***Números total de triângulos coloridos (todos)***	***Área de cada triângulo colorido (menor)***	***Área total de todos os triângulos coloridos (somas parciais)***
	***0***	0	0	0
	***1***	***1***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$
	***2***	***4***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right)$
	***3***	***13***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right)$
	***4***	***40***	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} + 3^1.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}\right) + 3^2.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}\right) + 3^3.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}\right)$
...	...	...	...	...
Genérico	***N*** $com n\geq 1$	$a_1 = 1$ $3a_{(n-1)} + 1$ $com\ n\geq 2$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $com\ n\geq 1$	$\sum_1^n l^2\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $com\ n\geq 1$
...	...	...	...	...
Quando o número de termos tende ao infinito $(n\to\infty)$	$\lim_{n\to\infty} n = \infty$	$\lim_{n\to\infty} 3a_{(n-1)} + 1 =$ $com\ \ n\geq 1$	$\lim_{n\to\infty}$ $\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ $com\ \ n\geq 1$	$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n l^2\frac{\sqrt{3}}{4^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $com\ \ n\geq 1$

Fonte: Autores

Reforçamos que na 5ª linha da tabela pede-se a generalização do que ocorre nas 4 primeiras linhas, em termos de etapas vencidas no processo infinito (resultados parciais de um número finito de etapas), caso em que o participante tem que preencher a coluna 2 com o símbolo genérico, por exemplo n, e na 6ª linha, a generalização sobre o que ocorre ao final do processo infinito (número infinito de etapas), que corresponde a fazer ($n \to \infty$). Em ambos os casos, o participante precisa basear-se em aspectos formais e algorítmicos.

Com a tabela, o objetivo é provocar o raciocínio indutivo e, consequentemente, a análise e a generalização de padrões e de regularidades em representações figurais, numéricas e algébricas que podem ser associadas a sequências e séries geométricas, bem como discutir processos de conversão e de tratamento desses registros. Na análise das respostas obtidas, investigar se o participante faz, ou não, interação entre aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1994).

5.3 Fase 3 – questionário investigativo

Solicita-se aos participantes que respondam um conjunto de questões (ver quadro 1) sobre o que pode ser observado e generalizado, a partir das dobraduras e do preenchimento da tabela, envolvendo as ideias de infinito e de convergência. Essas questões foram disponibilizadas em papel.

Quadro 1: questionário - triângulos coloridos

1 - Ao fazer as dobraduras, quais propriedades matemáticas podemos encontrar a cada nova etapa?
2 - Seria possível continuarmos a construção do triângulo indefinidamente? Se sim, quantos triângulos teríamos?
3 - Seria possível o número de triângulos ser infinito? Se sim, podemos dizer que a área também será infinita?
4 - O número de iterações (etapas) será infinito? Se sim, seria possível justificar?
5 - O processo de iteração (etapas) é sempre o mesmo? Se sim. Por quê?
6 - Há alguma regularidade na forma com que as áreas aumentam no decorrer das iterações (etapas)? Que regularidade é essa?
7 - O que ocorre com a “área de cada triângulo colorido (menor)” a cada novo termo (etapa). Se aproxima de algum valor específico? Essa iteração (etapas) será infinita?
8 - A cada novo termo (etapa), a sequência “área total de todos os triângulos coloridos” se aproxima de algum valor específico? Essa interação será infinita?

Fonte: Autores

Na próxima seção, apresentamos uma análise geral das respostas dos participantes **P_1, P_2, P_3, P_3, P_4, P_5, P_6 e P7**, obtidos com a Atividade.

6 RESULTADOS JÁ OBTIDOS

A primeira observação importante que fazemos é que nenhum dos participantes preencheu as linhas 5 e 6 da tabela, que correspondem, respectivamente, à generalização do número de etapas possíveis - n - e o que ocorre ao final do processo infinito de etapas - ($n \to \infty$). Assim, a análise referente às 4 primeiras linhas da tabela. A segunda, é que os participantes foram orientados a preencherem as tabelas tendo como base as dobraduras.

Apresentamos no quadro (ver quadro 2) os percentuais de respostas em branco, erradas e corretas para cada uma das colunas das tabelas preenchidas pelos participantes. Foram consideradas **corretas** as que correspondiam com a representação exigida na coluna/tabela; a coluna **Em Branco/quadro** indica que a coluna/tabela estava em branco ou parcialmente em branco e a coluna **Erradas/quadro** corresponde às respostas erradas/tabela ou sem sentido.

Quadro 2: Classificação das respostas dos participantes

Descrição das colunas na tabela das representações	**Corretas**	**Erradas**	**Em branco**
1ª. Coluna / Representação figural	85,8 %	14,2%	0%
3ª. Coluna / Números total de triângulos coloridos (todos)	100%	0%	0%
4ª. Coluna / Área de cada triângulo colorido (menor)	28,6%	57,14	16,2%
5ª. Coluna / Área total de todos os triângulos coloridos	0%	28,6%	71,5%

Fonte: Elaborado pelos autores

De fato, a representação figural não apresentou dificuldades aos participantes, pois, ao fazerem as dobraduras, perceberam o processo repetitivo a cada etapa. A terceira coluna foi preenchida corretamente por todos os participantes. A análise da quarta coluna revelou dificuldades na identificação do padrão que define a área de cada triângulo menor, a cada etapa. Apenas os participantes **P_1** e **P_3** conseguiram preencher as colunas. Isso mostra as dificuldades dos participantes em fazerem conversões para representações algébricas, em linha com o que já afirma Duval (2009) em sua teoria por serem não-congruentes apresentam maiores dificuldades de conversão. Ainda na quarta coluna, os erros dos outros participantes, mostram que, por mais que eles tenham percebido nas dobraduras, que a relação de proporção da área é de ¼ a cada nova etapa, não conseguiram representar algebricamente este padrão.

Outra dificuldade encontrada, foi que os participantes não sabiam calcular a área de um triângulo equilátero de lado ***l***. Com o intuito de fazer com que os participantes pudessem generalizar, foi proposto que chamassem a área do triângulo equilátero de A_0. Logo que, os participantes $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_3}$ tinham manifestados que o padrão entre as áreas era de ¼ a cada nova etapa. O participante $\mathbf{P_3}$ respondeu como a área sendo ¼ da área da etapa zero e o participante $\mathbf{P_1}$ respondeu como sendo 0,25 da área da etapa zero.

Além disso, cinco participantes deixaram a quinta coluna em branco. As dificuldades dos estudantes em apresentarem uma representação algébrica para as colunas 4 e 5, pode estar ligada às dificuldades relacionadas à identificação de padrões e generalização nas somas das áreas do triângulo a cada etapa, como mudança entre representações e generalização. Os resultados dos protocolos dos participantes reiteram, portanto, que o desempenho negativo dos participantes nas representações algébricas deve-se à ausência de aspectos algorítmicos (Fischbein, 1994), pois, claramente, demonstraram dificuldades em representar generalizações de padrões. Segundo Duval (2009), essa mudança de registro da representação numérica para a algébrica não é fácil para os estudantes.

O insucesso nas representações algébricas pode ser explicado, possivelmente, por uma ausência de conhecimentos matemáticos que já foram - ou deveriam já ter sido - abordados em anos anteriores e que seriam necessários para generalizarem. O fato dos participantes não conseguirem definir uma representação algébrica de uma sequência numérica, pode estar ligado, em grande medida, a uma categoria de ensino que supervaloriza técnicas de obtenção de resultados e o uso de fórmulas algébricas. Com isso, esse tipo de atividade pode parecer estranho aos participantes, ou não são cobrados quando são exigidos raciocínios matemáticos mais avançados que vão além de aplicação de fórmulas.

A análise mostra evidentes dificuldades na generalização, conversão, tratamento e identificação da lei algébrica, presentes nos estudantes do Ensino Médio. Essa perspectiva reitera dificuldades dos participantes em lidar com aspectos algoritmos e formais (Fischbein,

1994) relativos ao estudo de sequências e séries geométricas, que podem impactar negativamente o desenvolvimento do raciocínio matemático e dificuldades de conversões para diversas representações. Esses dados indicam que os aspectos de Fischbein, (1994) e as diferentes representações de Duval (2009), quanto aos processos de representação e mudança entre representações talvez não tenham sido explorados de forma ampla com estes estudantes na educação básica.

Desta forma, essa "ausência" de interação entre os aspectos algorítmicos e formais dificultaram o desenvolvimento de processos de generalização e representação. Além disso, a presença de espaços deixados em branco nas tabelas evidenciam que aspectos intuitivos e algorítmicos não foram colocados em interação com aspectos formais, ou seja, os aspectos intuitivos quanto ao processo de construção da dobradura – o qual foi observado nos questionários dos participantes- não interagiram com os aspectos algoritmos e formais na tabela. Essa não interação aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, e nas diversas formas de representar um objeto matemático, no caso de sequências e séries geométricas, tende a restringir a capacidade dos estudantes em lidar com problemas deste gênero. E, por conta disso, não tiveram autonomia para generalizar por não estarem familiarizados com generalizações.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **O novo espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estrela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, p. 17-28, 1996. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em: 10 de set. de 2021.

DÍAZ, O. R. T. A atualidade do livro didático como recurso curricular. Tradução: Maria Susley Pereira. **Linhas Críticas**, Brasília: DF, v. 17, n. 34, p. 609-626, set/dez 2011.

Disponível em: http://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/6248/5121. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de representations semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. Trad. Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://priodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 10 de set. de 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2005. p. 11-34.

DUVAL, R**. Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A**.** Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *In:* **Pro-Posições**: Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação - Unicamp, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. *In:* BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄßER, R; WINKELMANN, B. **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p. 231-245. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/GEN5711%20-%20Fischbein.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse des manuels. *In*: ACTES DU COLLOQUE EMF 2009, Dakar. **Actes** [...]. Université de Genève, 2009. Groupe de Travail 7, p. 1048-1061. Disponível em: http://emf.unige.ch/files/6414/5329/9054/EMF2009_GT7_Gonzales.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; NARDI, E.; BIZA, I. Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 42, n. 5, p. 565-589, 2011. Disponível em: https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/15824/1/2011_IJMEST_Gonzalez_Martin_Nardi_Biza_42_5_565_589_Repository.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

QUINA, C. M. **Sequências e Séries**: uma proposta duvaliana para a educação básica. 2015. 181f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-21012016-211144/publico/Dissertacao_Caio_Moura_Quina.pdf. Acesso em: 10 de set. de 2021.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões Visuais, Generalização e Raciocínio. *In*: Machado, S. D. A.; Bianchini, B. L.; Maranhão, C.S.A. (Orgs.). **Teoria elementar dos números**: da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática. São Paulo: Iglu, 2015. p.167-198.