EXEMPLOS DE MEDIDAS FORTEMENTE ADITIVAS E NÃO σ-ADITIVAS

Carmen Silvia Cardassi
IME - USP

I. Preliminares

Quem vê pela primeira vez a definição de medida fortemente aditiva (Definição 1(b)), imediatamente se pergunta sobre a necessidade de tal conceito: afinal, existem medidas fortemente aditivas e não σ-aditivas, seja em álgebras ou em σ-álgebras? A resposta é afirmativa, e o objetivo desta nota é apresentar exemplos simples de tais medidas. Usamos definições para medidas a valores num espaço de Banach X, mas os exemplos serão dados para $X = \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1. Sejam Ω um conjunto, A uma álgebra de subconjuntos de Ω, e X um espaço de Banach.

1(a) Uma função $F: A \to X$ é uma medida (finitamente aditiva) se para $A,B \in A$, com $A \cap B = \emptyset$, tem-se $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$.

1(b) Uma medida $F: A \to X$ é fortemente aditiva se para toda seqüência $\{E_n\}$ em A, de elementos dois a dois disjuntos, tem-se $\sum_n F(E_n)$ convergente.

1(c) Uma medida $F: A \to X$ é σ-aditiva se para toda seqüência $\{E_n\}$ em A, de elementos dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup_n E_n \in A$, tem-se $\sum_n F(E_n)$ convergente para $F(\bigcup_n E_n)$.

OBSERVAÇÕES 2.

2(a) Em 1(b) e 1(c), na verdade, a série $\sum_n F(E_n)$ é incondicionalmente convergente, isto é, para toda permutação $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum_n F(E_{\pi(n)})$ é convergente, como é fácil ver. Lembra mos que para $X = \mathbb{R}$ a convergência incondicional é equivalente à convergência absoluta.

2(b) Quando $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, uma medida σ-aditiva definida em $\mathcal{A}$ é também fortemente aditiva. Nas seções II e III mostraremos que a recíproca não vale, tanto em uma álgebra como em uma σ-álgebra.

2(c) Medidas fortemente aditivas aparecem naturalmente em teoremas de representação de operadores fracamente compactos, definidos em espaços $C(K)$ ou $L_\infty(\mu)$, a valores em X. Para o leitor interessado neste assunto recomendamos a monografia "Vector Measures", de J. Diestel e J.J. Uhl Jr, AMS - Surveys nº 15, Providence, RI, 1977.

2(d) Existem diversas formulações equivalentes a 1(b) e a 1(c). Usaremos, em particular, que uma medida (finitamente aditiva) $F: \mathcal{A} \to X$ é σ-aditiva se e somente se para toda seqüência decrescente $\{E_n\}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap_n E_n \in \mathcal{A}$, tem-se $F(\bigcap_n E_n) = \lim_n F(E_n)$, cuja demonstração é análoga ao caso escalar.

<u>DEFINIÇÃO 3</u>. Seja Ω um conjunto não vazio.

3(a) Uma família não vazia $\mathcal{F}$ de elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ é um <u>filtro em Ω</u> se

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(ii) $A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \subset B \to B \in \mathcal{F}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \to A \cap B \in \mathcal{F}$.

3(b) Uma família $\mathcal{U}$ de elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ é um <u>ultrafiltro em Ω</u> se $\mathcal{U}$ é um filtro que satisfaz

(iv) $A \in \mathcal{P}(\Omega) \to A \in \mathcal{U}$ ou $A^c \in \mathcal{U}$.

OBSERVAÇÕES 4.

4(a) Se $\mathcal{F}$ é um filtro em Ω e $A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$, com $A \cap B = \emptyset$, então, dentre A e B, no máximo um pertence a $\mathcal{F}$. De fato, se $A,B \in \mathcal{F}$, então $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{F}$, por (iii), o que contradiz (i).

4(b) O "ou" de (iv) é exclusivo. Basta aplicar 4(a) para $B = A^c$.

4(c) Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em Ω, $A \in \mathcal{U}$ e $C \subset A^c$, então $C \notin \mathcal{U}$. Pois, se $C \in \mathcal{U}$, por (ii) teríamos $A^c \in \mathcal{U}$, o que contradiz (iv) e 4(b), já que $A \in \mathcal{U}$.

4(d) Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em Ω e $A,B \notin \mathcal{U}$, então $A \cup B \notin \mathcal{U}$. De fato, por (iv), $A^c, B^c \in \mathcal{U}$; por (iii), $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$ e por (iv) e 4(b), $A \cup B \notin \mathcal{U}$.

II. Uma Medida Fortemente Aditiva e Não σ-Aditiva numa álgebra

O conjunto

$$Y = \{f:]0,1] \to \mathbb{R}: f \text{ é limitada e existe } f(0^+)\}$$

é um espaço vetorial e $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in]0,1]\}$ é uma norma em Y.

Definindo $y^*: Y \to \mathbb{R}$ por $y^*(f) = f(0^+)$, para toda $f \in Y$, temos que y^* é linear e contínua, pois

$|y^*(f)| = |f(0^+)| \le \|f\|$, para toda $f \in Y$.

PROPOSIÇÃO 5. Sejam $\Omega =]0,1]$ e $\mathcal{A}$ a álgebra em $\mathcal{P}(\Omega)$ gerada pelos intervalos da forma $]a,b]$.

(a) Se $E \in \mathcal{A}$, então $\chi_E \in Y$.

(b) Definindo $F: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por $F(E) = y^*(\chi_E)$, para todo $E \in \mathcal{A}$, temos que F é uma medida fortemente aditiva.

(c) A medida F, definida como no ítem (b), não é σ-aditiva.

Prova.

(a) Claro que χ_E é limitada, para todo $E \in A$.

Se $E \in A$, então $E = \emptyset$ ou $E = \bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k]$, onde os intervalos $]a_k,b_k]$ são dois a dois disjuntos.

Se $E = \emptyset$, então $\chi_E = 0$ e $\chi_E \in Y$.

Se $E = \bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k]$, podemos supor $b_k < a_{k+1}$, para $1 \leq k \leq n-1$, reordenando os intervalos $]a_k,b_k]$, se necessário. Se $a_1 = 0$, $\chi_E(0^+) = 1$ e se $a_1 > 0, \chi_E(0^+) = 0$. Em qualquer caso, $\chi_E \in Y$.

(b) Por (a), a função F está bem definida. Também, F é uma medida (finitamente aditiva), pela linearidade de y^*.

Seja $\{E_n\}$ uma seqüência em A, com elementos dois a dois disjuntos.

Se existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\inf E_{n_o} = 0$, então $E_{n_o} \supset]0,b]$, para algum $b > 0$ e temos $F(E_{n_o}) = 1$. Se $n \neq n_o$, $\inf E_n \geq b > 0$, pois $E_n \cap E_{n_o} = \emptyset$, e assim $F(E_n) = 0$. Portanto $\sum_n F(E_n) = 1$.

Se não existir tal n_o, então $\inf E_n > 0$ e $F(E_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\sum_n F(E_n) = 0$.

Em qualquer caso, $\sum_n F(E_n)$ é convergente e F é fortemente aditiva.

(c) Consideremos $E_n =]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]$, para $n \in \mathbb{N}$.

Então $E_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e

$\bigcup_n E_n =]0,1] \in \mathcal{A}$. Mas, como visto na prova de (b), $\sum_n F(E_n)=0$, já que $\inf E_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, enquanto que $F(\bigcup_n E_n) = F(]0,1]) = 1$. Portanto $F(\bigcup_n E_n) \neq \sum_n F(E_n)$ e F não é σ-aditiva. □

III. Medidas Fortemente Aditivas e Não σ-aditivas σ-aditivas em σ-álgebras

Nesta seção, vamos mostrar que, se Ω é um conjunto infinito, sempre existe uma medida fortemente aditiva F_o definida em $\mathcal{P}(\Omega)$ que não é σ-aditiva. Essa medida F_o será definida através de um ultrafiltro em Ω que tem uma certa propriedade.

Começaremos mostrando que qualquer ultrafiltro em Ω define uma medida fortemente aditiva.

<u>PROPOSIÇÃO 6</u>. Sejam Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em Ω. A função $F: \mathcal{P}(\Omega) \to \{0,1\}$, dada por

$$F(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } E \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma medida fortemente aditiva.

<u>Prova</u>. Observemos inicialmente que F está bem definida, pois $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro.

Dados $A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$, com $A \cap B = \emptyset$, temos dois casos a considerar, $A \in \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$ e $A,B \notin \mathcal{U}$, já que o caso $A,B \in \mathcal{U}$ está excluído, pela Observação 4(a).

Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$, então $A \cup B \in \mathcal{U}$, por (iii), e

$$F(A \cup B) = 1 = 1 + 0 = F(A) + F(B).$$

Se $A, B \notin \mathcal{U}$, então $A \cup B \notin \mathcal{U}$, pela Observação 4(d), e

$$F(A \cup B) = 0 = 0 + 0 = F(A) + F(B).$$

Logo, F é uma medida (finitamente aditiva).

Seja dada uma seqüência $\{E_n\}$ em $\mathcal{P}(\Omega)$ com elementos dois a dois disjuntos.

Se existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $E_{n_o} \in \mathcal{U}$, então, para $n \neq n_o$, $E_n \subset E_{n_o}^c$, pois $E_n \cap E_{n_o} = \emptyset$, e pela Observação 4(c), $E_n \notin \mathcal{U}$. Neste caso, $F(E_{n_o}) = 1$ e $F(E_n) = 0$ se $n \neq n_o$, de modo que $\sum_n F(E_n) = 1$.

Se não existir tal n_o, então $E_n \notin \mathcal{U}$ e $F(E_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\sum_n F(E_n) = 0$.

Em qualquer caso, $\sum_n F(E_n)$ é convergente e portanto F é fortemente aditiva. □

A seguir, vamos mostrar que para todo conjunto infinito Ω existe um ultrafiltro $\mathcal{U}_o$ em Ω que possui uma propriedade especial, e que esse ultrafiltro define uma medida que não é σ-aditiva.

<u>PROPOSIÇÃO 7</u>. Seja Ω um conjunto infinito.

(a) Existe um ultrafiltro $\mathcal{U}_o$ em Ω tal que existe uma seqüência decrescente $\{E_n\}$ em $\mathcal{U}_o$, com $\bigcap_n E_n = \emptyset$.

(b) A medida fortemente aditiva F_o, definida, como na Proposição 6, através de $\mathcal{U}_o$, não é σ-aditiva.

Prova.

(a) Seja $\Omega_o = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \subset \Omega$, com $\omega_i \neq \omega_j$ se $i \neq j$, e consideremos o filtro $F_o = \{A \in P(\Omega): A^c \cap \Omega_o$ é finito$\}$. Por um procedimento-padrão, usando o Lema de Zorn, existe um ultrafiltro U_o, com $F_o \subset U_o$.

Definimos $E_n = \Omega_o \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $\{E_n\}$ é decrescente, com $\bigcap_n E_n = \emptyset$. Além disso, $E_n^c \cap \Omega_o = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, de modo que $E_n \in F_o \subset U_o$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Para a seqüência $\{E_n\}$ do item (a), temos $F_o(E_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\lim_n F_o(E_n) = 1$. Mas $F_o(\bigcap_n E_n) = F_o(\emptyset) = 0$, pois $\emptyset \notin U_o$.

Assim, $F_o(\bigcap_n E_n) = 0 \neq 1 = \lim_n F_o(E_n)$, e portanto F_o não é σ-aditiva, pela Observação 2(d). $\square$

EXEMPLO 8. Seja $\Omega = \mathbb{N}$. Tomando $\Omega_o = \Omega$, a construção da Proposição 7 nos dá um ultrafiltro U_o em $P(\mathbb{N})$, que define uma medida F_o em $P(\mathbb{N})$ que é fortemente aditiva mas não é σ-aditiva. A seqüência $\{E_n\}$ neste caso é dada por $E_n = \{m \in \mathbb{N}: m > n\}$, $n \in \mathbb{N}$.