

Nº18 .

Imagens inversas de algumas aplica-
ções fechadas

Maria Stella Castilla

Abril 1981

IMAGENS INVERSAS DE ALGUMAS APLICAÇÕES FECHADAS

Maria Stella Castilla

I) INTRODUÇÃO

Nosso propósito é generalizar alguns resultados devidos a K. Morita, [2], e a Y. Tanaka, [3]. Esses resultados já são generalizações do teorema Stone-Morita-Hanai. É bom explicar que por generalização estamos querendo estender alguns resultados a cardinais regulares quaisquer.

II) DEFINIÇÕES PRELIMINARES

m-cardinal infinito

DEFINIÇÃO 1 - Um espaço topológico é m-compacto se todo subconjunto de X de cardinalidade m possui um ponto de acumulação.

DEFINIÇÃO 2 - Um espaço topológico X verifica a propriedade G_m se a interseção de uma família de cardinalidade m de abertos for um aberto.

n-cardinal regular.

DEFINIÇÃO 3 - Um espaço topológico X é n-Fréchet se dado $Y \subseteq X$ e $p \in \bar{Y}$ existe uma n-sequência $(p_\beta)_{\beta < n}$ $p_\beta \in Y, \forall \beta < n$, convergindo para p.

III) TEOREMAS

TEOREMA 1 - Seja f uma função fechada, contínua e sobrejetora de um espaço paracompacto X, localmente m-compacto, Hausdorff em um espaço Y. Seja Y_0 o conjunto assim definido

$$Y_0 = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ não é m-compacto}\} \text{ sendo m um car-}$$

dinal regular.

Então se X satisfaz a propriedade G_p , com $p < m$, Y_0 é um subconjunto fechado e discreto de Y .

DEMONSTRAÇÃO - É suficiente mostrar $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y_0\}$ é uma coleção discreta de conjuntos fechados em X . Para tal, vamos mostrar que dado C , um subconjunto m -compacto, C intercepta somente uma quantidade $< m$ de conjuntos $f^{-1}(y)$, $y \in Y_0$. Isto é suficiente uma vez que X satisfaz G_p , para $p < m$. Suponhamos, por absurdo, que exista uma família $(x_\alpha)_{\alpha < m}$ tal que:

$$x_\alpha \in C \cap f^{-1}(y_\alpha), y_\alpha \in Y_0, \alpha < m$$

$$y_\beta \neq y_\alpha, \text{ para } \beta \neq \alpha$$

Como C é m -compacto, existe um ponto de acumulação x_* da família $(x_\alpha)_{\alpha < m}$. Podemos, claramente assumir $f(x_*) \neq y_\alpha$, $\forall \alpha < m$, pois se $f(x_*) = y_{\bar{\alpha}}$ para algum $\bar{\alpha} < m$ é só substituir a família $(x_\alpha)_{\alpha < m}$ por $(x_\alpha)_{\substack{\alpha < m \\ \alpha \neq \bar{\alpha}}}$.

Se $f(x_*) = y_*$, temos

(1) $y_* \in Y_0$, $y_* \neq y_\alpha$ para $\alpha < m$.

Provemos (1). Para tal suponhamos, por absurdo, que $y_* \in Y - Y_0$. Então $f^{-1}(y_*)$ é m -compacto. Como X é localmente m -compacto, existe um conjunto aberto L tal que $\bar{L}$ é m -compacto e $f^{-1}(y_*) \subset L$.

Aqui é importante a hipótese de regularidade de m para garantir a existência de um tal L . Se fizermos $M = Y - f(X - L)$ então M é conjunto aberto de Y e tomemos

$$x_* \in f^{-1}(y_*) \subset f^{-1}(M) \subset L.$$

O ponto x_* é ponto de acumulação de $(x_\alpha)_{\alpha < m}$ e portanto

$x_{\bar{\alpha}} \in f^{-1}(M)$ para algum $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} < m$. Portanto para $\bar{\alpha}$, $f^{-1}(y_{\bar{\alpha}}) \subset f^{-1}(M) = L$.

Logo $f^{-1}(y_{\bar{\alpha}})$ é m -compacto, mas isto contradiz a hipótese que $y_{\alpha} \in Y_0$, $\forall \alpha < m$, e (1) está provado.

Sendo X paracompacto e localmente m -compacto existe uma cobertura aberta, localmente finita $\{G_{\beta} \mid \beta \in \Omega\}$ de X tal que $\bar{G}_{\beta}$ é m -compacto para cada β . Pondo-se $\Gamma = \{\beta \mid G_{\beta} \cap f^{-1}(y_{\star}) \neq \emptyset\}$ tem-se $|\Gamma| \geq m$ pois $f^{-1}(y_{\star})$ não é m -compacto.

Seja $G = \bigcup_{\beta \in \Gamma} G_{\beta}$, G é aberto.

Portanto $V_0 = Y - f(X - G)$ é aberto e $f^{-1}(y_{\star}) \subset f^{-1}(V_0) \subset G$. O conjunto dos pontos $(x_{\alpha})_{\alpha < m}$ que pertencem a $f^{-1}(V_0)$, já que X é T_1 , tem cardinalidade m .

Denotemos essa família por $(x_{\alpha_{\beta}})_{\beta < m}$. Então $x_{\star}$ é ponto de acumulação de $(x_{\alpha_{\beta}})_{\beta < m}$.

Seja $D = \{y_{\alpha_{\beta}} \mid y_{\alpha_{\beta}} = f(x_{\alpha_{\beta}}), \beta < m\}$. Nós temos $y_{\star} \in \bar{D} - D$.

Como $x_{\alpha_{\beta}} \in f^{-1}(V_0) \Rightarrow y_{\alpha_{\beta}} \in V_0$, $\forall \beta < m$. Portanto $f^{-1}(y_{\alpha_{\beta}}) \subset f^{-1}(V_0) \subset G$, $\forall \beta < m$.

Podemos achar, por indução transfinita pontos:

$$\begin{aligned} x'_{\alpha_1} &\in f^{-1}(y_{\alpha_1}) \cap G_{\alpha_1} \\ &\vdots \\ x'_{\alpha_p} &\in f^{-1}(y_{\alpha_p}) \cap (X - \bigcup_{\beta < p} G_{\gamma_{\beta}}) \quad p < m. \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(y_{\alpha_p})$ não é m -compacto podemos garantir que:

$$f^{-1}(y_{\alpha_p}) \cap (X - \bigcup_{\beta < p} G_{\gamma_{\beta}}) \neq \emptyset, \quad p < m$$

para qualquer quantidade p de conjuntos G_γ , $\gamma \in \Gamma$.

Como $x'_{\alpha_p} \in G_{\gamma_p}$ e $\gamma_p \neq \gamma_q$ para $p \neq q$ e

$\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ é localmente finita. Portanto, sua imagem D , pela f , é fechada. Mas $y_0 \in \bar{D} - D$, o que é um absurdo. E o teorema 1 está demonstrado. ■

TEOREMA 2 - Com as mesmas hipóteses do teorema 1, seja

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \partial f^{-1}(y) \text{ não é m-compacto}\}$$

$$(\partial f^{-1}(y) = \overline{f^{-1}(y)} \cap \overline{f^{-1}(y)}).$$

Então $Y - Y_1$ é localmente m-compacto.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $y \in Y - Y_1$. Então $\partial f^{-1}(y)$ é m-compacto. Como X é localmente m-compacto existe um aberto L tal que:

$$\partial f^{-1}(y) \subset L \text{ e } \bar{L} \text{ é m-compacto.}$$

Seja $U = f^{-1}(y) \cup L = \overline{f^{-1}(y)} \cup L$, logo U é aberto. Sendo

$V = Y - f(X - U)$ então V é aberto em Y e $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U$, donde $y \in V \subset f(U) = f(L) \cup \{y\}$.

Portanto $\bar{V}$ é m-compacto. ■

TEOREMA 3 - Com as mesmas hipóteses do teorema 2, podemos provar que o fecho de qualquer vizinhança de y não é m-compacto, para todo $y \in Y_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $y_1 \in Y_1$ é tal que possui uma vizinhança, W , com $\bar{W}$ m-compacto. $\partial f^{-1}(y_1)$ não é m-compacto. De acordo com o teorema 1, o conjunto F , definido abaixo é fechado em X .

$$F = \bigcup \{f^{-1}(y) \mid y \in Y_0 - \{y_1\}\}$$

Como $F \cap f^{-1}(y_1) = \emptyset$, o aberto $V = Y - f(F)$ contém y_1 .

Seja V_1 a vizinhança de y_1 assim obtida:

$$V_1 = V \cap W$$

Como $\bar{V}_1 \subset \bar{W}$, $\bar{V}_1$ é m-compacto.

Uma vez que $\partial f^{-1}(y_1) \subset f^{-1}(V_1)$ e $\partial f^{-1}(y_1)$ não é m-compacto; existe uma família localmente finita $(G_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de conjuntos abertos em X tal que:

$$a) \partial f^{-1}(y_1) \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$$

b) $|\Gamma| \geq m$ (Se todos os Γ tivessem cardinalidade $< m$, $\partial f^{-1}(y_1)$ seria m-compacto, absurdo).

$$c) G_\alpha \subset f^{-1}(V_1), \forall \alpha \in \Gamma$$

$$d) G_\alpha \cap \partial f^{-1}(y_1) \neq \emptyset, \forall \alpha \in \Gamma.$$

Em vista de d) podemos escolher para qualquer $\alpha \in \Gamma$,

$$x_\alpha \in (X - f^{-1}(y_1)) \cap G_\alpha.$$

Sendo a família $(G_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ localmente finita, cada ponto de

$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ parte apenas a um número finito de G'_α s.

Podemos portanto, se necessário, escolher uma subfamília de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, a saber $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma'}$, tal que:

$|\Gamma'| = m$, e se $\beta \neq \beta'$ isto implica em $x_\beta \neq x_{\beta'}$, com β e β' em Γ' .

Logo $A = \bigcup_{\alpha \in \Gamma'} \{x_\alpha\}$ é fechado, discreto e tem cardinalidade m .

Por outro lado vamos mostrar que $|A| < m$. Como $\bar{V}_1$ é m-compacto, $f(A)$ é discreto e $f(A) \subset \bar{V}_1$, $f(A)$ precisa ter uma quantidade

$p < m$ de pontos. Portanto $|A| < m$, absurdo. ■

TEOREMA 4 - Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação fechada, sobrejetora e contínua. X é paracompacto e Y é localmente m -compacto. Então para todo $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ é m -compacto.

OBSERVAÇÃO - Antes de exibir a demonstração do teorema é bom observar que X não é necessariamente localmente m -compacto. Seja X um espaço que não é localmente m -compacto. Seja $Y = \{p\}$ um conjunto unitário com a topologia caótica (única possível). Seja

$$f : X \longrightarrow Y$$

a aplicação constante. $f(x) = p, \forall x \in X$. Temos todas as condições do teorema 4.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4 - Suponhamos, por absurdo, que existe $y_0 \in Y$ t.q. $\partial f^{-1}(y_0)$ não é m -compacto. Portanto existe uma família $(x_\alpha)_{\alpha < m}$ com $x_\alpha \in \partial f^{-1}(y_0), \forall \alpha < m$, que não possui ponto de acumulação. Como X é paracompacto existe uma família discreta de abertos $(A_\alpha)_{\alpha < m}$ tal que $x_\alpha \in A_\alpha, \forall \alpha < m$.

Seja V uma vizinhança aberta de y_0 tal que $\bar{V}$ é um m -compacto. Seja $V_\alpha = A_\alpha \cap f^{-1}(V)$.

Vamos construir por indução transfinita uma família $(x'_\alpha)_{\alpha < m}$ de pontos de X tal que:

- 1) $\{f(x'_\alpha) \mid \alpha < m\}$ é fechado, discreto e está contido em $\bar{V}$.
- 2) $f(x'_\alpha) \neq f(x'_\beta)$ se $\alpha \neq \beta, \alpha$ e $\beta < m$.
- 3) $x'_\alpha \in V_\alpha \cap (X - f^{-1}(y_0)), \forall \alpha < m$.

Para $\alpha = 0$, como $x_0 \in \partial f^{-1}(y_0)$ tomemos x'_0 tal que $x'_0 \in V_0 \cap (X - f^{-1}(y_0))$.

Suponhamos agora que temos os x_α para cada $\alpha < \delta < m$. Então $F_\alpha = \{f(x'_\beta) ; \beta \leq \alpha\}$ é fechado e discreto e está definida tendo-se $x'_\beta \in V_\beta \cap (X - f^{-1}(y_0))$ e todos $f(x'_\beta)$ são distintos. Então $F = \bigcup_{\alpha < \delta} F_\alpha$ é fechado em Y , com $y_0 \notin F$. Portanto existe uma vizinhança W de y_0 disjunta de F . Portanto podemos tomar

$$x'_\delta \in V_\delta \cap (X - f^{-1}(y_0)) \cap f^{-1}(W)$$

logo $x'_\delta \in V_\delta \cap (X - f^{-1}(y_0))$ e $f(x'_\delta) \in F$.

Seja $F_\delta = F \cup \{f(x'_\delta)\}$.

Portanto F_δ satisfaz às condições e é possível construir um subconjunto fechado, discreto $\{f(x'_\alpha) \mid \alpha < m\}$ de $\bar{V}$. Logo $\bar{V}$ não é m -compacto, absurdo. ■

Sejam m, n e p cardinais tais que $m < n < p$ e n é regular.

DEFINIÇÃO 3 - Um espaço topológico X é n -Fréchet se dado $p \in \bar{Y}$ existe uma n -seqüência $(p_\beta)_{\beta < n}$, $p_\beta \in Y \ \forall \beta < n$, tal que $p_\beta \longrightarrow p$.

TEOREMA 5 - Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação fechada contínua sobrejetora. X é paracompacto e n -Fréchet e em Y existe uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos fechados tais que se $K \subset U$, K um m -compacto, $m < n$ e U aberto em X então $K \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ onde $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ é uma subcoleção de cardinalidade m e $\mathcal{B}$ é tal que $y \in Y$ só pertence a n elementos de $\mathcal{B}$. Nessas condições $\partial f^{-1}(y)$ é p -compacto para qualquer $y \in Y$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que existe y_0 tal que $\partial f^{-1}(y_0)$ não é p -compacto. Existe uma família $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, $|A| = p$, discreta, $x_\alpha \in \partial f^{-1}(y_0)$, qualquer $\alpha \in A$.

Como X é paracompacto existe uma coleção discreta de abertos $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, com $x_\alpha \in U_\alpha$ qualquer $\alpha \in A$.

Como $x_\alpha \in \partial f^{-1}(y_0)$, qualquer $\alpha \in A$ isto implica que $x_\alpha \in \overline{U_\alpha - f^{-1}(y_0)}$, qualquer $\alpha \in A$.

Sendo X n -Fréchet, para cada $\alpha \in A$ existe uma n -seqüência $(x_{\alpha\beta})_{\beta < n}$ e

$$x_{\alpha\beta} \longrightarrow x_\alpha, \alpha \in A.$$

Para cada $\alpha \in A$, seja $C_\alpha = \{x_{\alpha\beta}, \beta < n\} \cup \{x_\alpha\}$. Então C_α é n -compacto, qualquer $\alpha \in A$. Na verdade $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família discreta de fechados, portanto $X_0 = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ é um fechado em X . (X_0 é portanto paracompacto).

Seja $g = f|_{X_0}$, $g : X_0 \longrightarrow Y_0$ onde $Y_0 = f(X_0)$.

g é uma aplicação fechada, contínua, sobrejetora, de um espaço paracompacto e localmente n -compacto. Seja $Y_1 \subset Y_0$, definido abaixo:

$$Y_1 = \{y \in Y_0 \mid g^{-1}(y) \text{ não é } n\text{-compacto}\}.$$

Y_1 é fechado e discreto em Y_0 , pelo teorema 1.

C_α intercepta no máximo uma quantidade m de elementos $g^{-1}(y)$, $y \in Y_1$.

Seja C'_α a subsequência de $(x_{\alpha\beta})_{\beta < n}$, de onde foram retirados os pontos de $g^{-1}(Y_1)$. C'_α converge para x_α , $\alpha \in A$. Seja $A_\alpha = g(D_\alpha)$ onde D_α é o conjunto dos pontos de C'_α .

$\mathcal{U} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U}$ é localmente finita em $Y_0 - Y_1$ (e portanto pon-

tanto pontualmente finita em $Y_0 - Y_1$)

$|A_\alpha| \leq n$, portanto fixado $\alpha \in A$, $A(\alpha) = \{\beta \in A \mid A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset\}$

é tal que $|A(\alpha)| \leq n$. Então existe $A' \subset A$, $|A'| = p$ tal que

$\mathcal{U} = \{A_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ são dois a dois disjuntos.

$g \mid \bigsqcup_{\alpha \in A'} D_\alpha = f \mid \bigsqcup_{\alpha \in A'} C_\alpha - \{x_\alpha\}$ é biunívoca.

Seja $X_2 = \bigsqcup_{\alpha \in A'} C_\alpha$, $Y_2 = f(X_2)$ é subconjunto fechado de Y . Y_2

é homeomorfo a X_2/F_2 que é obtido de X_2 identificando os pontos de $F_2 = \{x_\alpha, \alpha \in A'\}$.

Pensemos nas seqüências C'_α convergindo para $y_0 = f(F_0)$ como "raios". Seja $\mathcal{B}_1$ o conjunto de todos os membros de $\mathcal{B}$ que não contêm y_0 e que encontram uma quantidade n de raios e têm cardinalidade n já que $\mathcal{B}$ tem cardinalidade n pontualmente.

Seja $(P_\beta)_{\beta \in B_1}$ $|B_1| = n$ uma boa ordenação de $\mathcal{B}_1$. Seja $z_0 \in P_0$ e para cada $\beta \in B_1$ escolhamos $z_\beta \in P_\beta$, $z_\beta \neq y_0$ e z_β não está nos raios que contêm z_α , $\forall \alpha < \beta$.

Então as uniões dos elementos de $\mathcal{B}_2$ encontram no máximo n raios, pela Hipótese Generalizada do Contínuo.

Existe portanto um raio que não encontra nenhum elemento de $\mathcal{B}_2$. Denotemos a reunião desse elemento com y_0 por K . K é m -compacto. Seja $G = (Y_0 - \{z_\beta\}_{\beta \in B_1}) \cup K$. G é vizinhança aberta de K em Y .

Observamos, no entanto, que nenhum elemento de $\mathcal{B}$ encontra K e está contido em G . Portanto $\mathcal{B}$ não tem as propriedades descritas. Logo $\partial f^{-1}(y)$ é p -compacto, qualquer que seja $y \in Y$.

COROLÁRIO - Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação fechada. X é para-compacto e localmente m -compacto. Então Y é localmente m -compacto se e somente se $\partial f^{-1}(y)$ é m -compacto.

DEMONSTRAÇÃO - No sentido "somente se" é consequência do teorema 4. No outro vejamos o seguinte, se $\partial f^{-1}(y)$ é m -compacto para cada $y \in Y$ definimos o conjunto aberto como se segue:

$$L(y) = \begin{cases} \overline{f^{-1}(y)} & \text{se } \partial f^{-1}(y) = \emptyset \\ f^{-1}(y) - \{p_y\} & \text{se } \partial f^{-1}(y) \neq \emptyset, \text{ onde } p_y \in f^{-1}(y) \end{cases}$$

Seja $X_0 = X - L$ onde $L = \bigcup_{y \in Y} L(y)$. X_0 é fechado em X .

Seja $\psi : X_0 \hookrightarrow X$ e seja $g = f \circ \psi$. g é fechada contínua e sobrejetora.

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \partial f^{-1}(y) & \text{se } \partial f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ p_y & \text{se } \partial f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Logo $g^{-1}(y)$ é m -compacto para todo $y \in Y$.

Podemos então trabalhar com $f^{-1}(y)$ m -compacto para todo $y \in Y$. Para cada $x \in f^{-1}(y)$ existe Ω_x aberto em X , com $\overline{\Omega_x}$ m -compacto e $x \in \Omega_x$.

Ora $\{\Omega_x \mid x \in f^{-1}(y)\}$ é recobrimento aberto de $f^{-1}(y)$. Então existe subrecobrimento $(\Omega_{x_\alpha})_{\alpha \in A'}$.

$|A| < m$ de $f^{-1}(y)$

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_{x_\alpha}$$

$$Y \in V = Y - f(X - \Omega) \subset \bigcup_{\alpha \in A} f(\overline{\Omega_{x_\alpha}}).$$

$\bar{V}$ é m-compacto pois está contido num m-compacto. ■

EXEMPLO - Um espaço nas condições do teorema 5 é um espaço que possua uma base de abertos $B = \bigcup_{i < n} B_i$, $|B_i| < n$ tal que B_i é recobrimento aberto discreto de X e se $j > i$, B_j refina B_i . Esta base B é a família em questão. Para um exemplo concreto ver [1].

REFERENCIAS

- [1] Alas, O.T. - A special type of paracompact spaces - (paper written for the Organization of the American States - 1972).
- [2] Morita, K. - On closed mappings, Proc. Japan Acad., 32, 539-543 (1956).
- [3] Tanaka, Y. - Closed maps on metric spaces, Top. and its Appl. 11(1980) 87-92.

TRABALHOS

DO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TITULOS PUBLICADOS

- 8001 - PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8002 - PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8003 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Transfinite induction on ordinal configurations. São Paulo, IME-USP, 1980. 22p.
- 8004 - JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 13p.
- 8005 - CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de. Notes on many-sorted systems. São Paulo, IME-USP, 1980. /25/p.
- 8006 - POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. São Paulo, IME-USP, 1980. /10/p.
- 8007 - CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8008 - CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1980. 21p.
- 8009 - CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8110 - JONES RODRIGUES, A.R. Units of ZCp^n . São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- 8111 - KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da. Problems of modal and discussive logics. São Paulo, IME-USP, 1981. 35p.

- 8112 - BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Algebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características. São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- 8113 - POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. São Paulo, IME-USP, 1981. 1v. (não paginado)
- 8114 - CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves. São Paulo, IME-USP, 1981. 5p.
- 8115 - COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 8p.
- 8116 - CASTILLA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 6p.
- 8117 - CHEN, C.C. & GÓES, C.C. Degenerate minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$. São Paulo, IME-USP, 1981. 21p.