

UMA GENERALIZAÇÃO DE UM TEOREMA DE
NIVEN SOBRE A IRRACIONALIDADE DE π .

ARTUR HIDEYUKI TOMITA

ORIENTADORAS: IRACEMA MARTIN BUND

VERA HELENA G. DE SOUZA

Este teorema, de prova simples, é uma generalização de um teorema sobre a irracionalidade de π . Com ele podemos provar também a irracionalidade de e . Sua prova exige apenas conhecimentos básicos de um primeiro curso de cálculo.

Teorema: Sejam $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e $f: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, c[$. Suponha que existam $f_n: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ tais que $f'_1 = f$, $f'_k = f_{k-1}$, $k \geq 2$ e $f_k(0)$ e $f_k(c)$ são inteiros para $k \geq 1$. Então c é irracional.

Para tornar a demonstração do teorema mais interessante, vamos primeiro ver duas aplicações:

(a) Se $0 < |r| \leq \pi$ e se $\cos|r|$ e $\sin|r|$ são racionais, então r é irracional.

(b) Se $r > 0$, $r \neq 1$ e r é racional, então $\ln r$ é irracional.

Prova:

(a) Em primeiro lugar supomos $0 < r \leq \pi$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cos r$ e $n \sin r$ sejam inteiros. A função $f(x) = n \cdot \sin x$,

$x \in [0, r]$ satisfaz as hipóteses do teorema com $f_1(x) = -n \cdot \cos x$, $f_2(x) = -n \cdot \sin x$, $f_3(x) = n \cdot \cos x \dots$. Logo r é irracional.

Se $-\pi \leq r \leq 0$ então $0 < -r \leq \pi$ e pelo caso anterior $-r$ é irracional, logo r é irracional. Em particular, π é irracional.

(b) Suponhamos $r > 1$, $r = \frac{m}{n}$. Como $\ln r > 0$, podemos tomar $c = \ln r$. As funções $f(x) = n \cdot e^x$, $x \in [0, c]$ e $f_k(x) = n \cdot e^x$, $x \in [0, c]$, $k = 1, 2, \dots$ satisfazem as hipóteses do teorema, logo $\ln r$ é irracional.

Se $0 < r < 1$, então $\frac{1}{r} > 1$ e $\ln \frac{1}{r}$ é irracional. Logo $\ln r = -\ln \frac{1}{r}$ é irracional.

Em particular e é irracional, pois se e fosse racional, teríamos $\ln e = 1$ irracional.

Para demonstrar o teorema vamos considerar o conjunto P de todas as funções polinomiais g com coeficientes reais tais que $g(0)$, $g(c)$, $g'(0)$, $g'(c)$, $\dots$, $g^{(k)}(0)$, $g^{(k)}(c) \dots$ são todos inteiros.

Lema 1: Se $g \in P$, então $\int_0^c f(x) \cdot g(x) dx$ é um inteiro.

Prova: Seja d o grau de g . Então

$$\int_0^c f(x)g(x)dx = [f_1 \cdot g - f_2 \cdot g' + f_3 \cdot g'' - \dots + (-1)^d f_{d+1} \cdot g^{(d)}]_0^c.$$

É claro que $\int_0^c f(x) \cdot g(x) dx$ é um inteiro, pois no segundo membro da igualdade temos produtos e somas de inteiros.

Antes de enunciar o Lema 2 precisaremos das seguintes ob-

servações:

(01) Se $g, h \in P$ então $g.h \in P$.

Vamos supor c racional, $c = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos. Então verifica-se

(02) $m-2nx \in P$.

Sejam $g_k(x) = x^k \cdot (m-nx)^k / k!$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Lema 2: $g_k \in P$, para todo k .

Prova: Por indução. É claro que $g_0 \in P$. Para $k \geq 1$ temos $g'_k(x) = g_{k-1}(x)(m-2nx)$. Por hipótese de indução, $g_{k-1} \in P$. Por (02) e (01) segue-se que $g'_k \in P$. Como $g_k(0)$ e $g_k(c)$ são inteiros, $g_k \in P$.

Demonstração do Teorema:

Observamos que $g_k(x) > 0$, $0 < x < c$ e pela escolha da f , temos $f(x) \cdot g_k(x) > 0$, $0 < x < c$. Logo

$$\int_0^c f(x) \cdot g_k(x) > 0 \text{ para todo } k.$$

Segue pelos Lemas 2 e 1

$$\int_0^c f(x) \cdot g_k(x) \geq 1 \text{ para todo } k. \quad (1)$$

Sejam

$$M = \max\{x(m-nx), x \in [0, c]\}$$

e

$$L = \max\{f(x): x \in [0, c]\}$$

Então tomando k_0 suficientemente grande temos

$$\int_0^c f(x) g_{k_0}(x) dx \leq \int_0^c L \cdot \frac{M^{k_0}}{k_0!} = L \cdot c \cdot \frac{M^{k_0}}{k_0!} < 1.$$

Mas isto contradiz (1), logo c é irracional.

Bibliografia:

PARKS, A.E. π , e , and other irrational numbers. American Mathematical Monthly, November: 722-723, 1986.