CONCEPÇÕES SOBRE O SIGNIFICADO DE FLEXIBILIDADE NUMÉRICA

Jean Carlo Paes Rocatelli[1]

Profª Drª Barbara Corominas Valerio[2]

Resumo

Este trabalho é um recorte de uma dissertação de mestrado e tem como objetivo discutir o significado do termo Flexibilidade Numérica, por meio de uma revisão bibliográfica e a análise qualitativa de dados coletados em uma oficina realizada em 2019 no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática envolvendo 17 participantes, sendo eles professores do Ensino Básico e licenciandos em matemática da Universidade de São Paulo. Discutiremos os conceitos utilizados para definir a Flexibilidade Numérica e a estrutura da oficina citando os debates, as atividades e os dados coletados, que foram os propulsores das reflexões que sustentamos aqui. Ao final, pretendemos discorrer sobre os avanços que fizemos ao definir esse Flexibilidade Numérica, destacando potencialidades do tema para o processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Flexibilidade Numérica; Senso Numérico; Conversas Numéricas.

1. Introdução

Nos últimos anos, a professora e pesquisadora da Escola de Pós-Graduação em Educação de Stanford, Jo Boaler, apresentou uma série de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Em especial, ao falar sobre números e operações, comumente se refere ao termo "Flexibilidade Numérica". Apesar da ampla utilização dessa expressão nos seus diversos trabalhos, não encontramos uma definição precisa deste termo em seus livros ou em suas referências. Essa constatação é um dos motivadores desta pesquisa – se a ideia de Flexibilidade Numérica parece tão relevante para suas ideias e metodologias, entender o que isso significa de maneira concreta é essencial para uma compreensão ampla acerca do tema.

[1] Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo – jeancpr@ime.usp.br
[2] Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo – barbarav@ime.usp.br

As ideias que Boaler e outros autores apresentam sobre o tema Flexibilidade Numérica são, ao nosso ver, extremamente relevantes e atuais. Alguns textos já discutem a necessidade de apresentar a matemática, desde os primeiros anos, de uma maneira conceitual – e com citação à palavra "flexibilidade". Por exemplo, Boaler (2016) discorre sobre um experimento desenvolvido por Eddie Gray e David Tall com alunos de 13 anos:

> Todos os alunos receberam problemas numéricos, tais como somar ou subtrair dois números. Os pesquisadores encontraram uma diferença importante entre os alunos com baixo e alto rendimento. Os alunos com alto rendimento resolviam as perguntas usando o que é conhecido como senso numérico – eles interagiam com os números de maneira flexível e conceitual. Os alunos com baixo rendimento não empregavam o senso numérico e pareciam acreditar que seu papel era recordar e usar um método-padrão mesmo quando isso era difícil de fazer. (BOALER, 2018, p. 33).

O desenvolvimento de práticas voltadas para a flexibilidade numérica se mostra importante justamente por se pautar na atribuição de significados, o que se conecta à noção de proceitos e no estudo conceitual dos números, o que é relacionado aos alunos de alto rendimento na citação de Boaler. Estes objetivos estão em consonância, inclusive, com documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (2018):

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268)

Dentro deste cenário, esse texto expõe reflexões e resultados que respondem a uma de nossas questões de pesquisa: *O que é Flexibilidade Numérica?* Nossa definição, apresentada de maneira breve ao longo do texto, foi construída a partir de uma revisão bibliográfica e de análises qualitativas de uma intervenção feita com professores do

Ensino Básico. Estes resultados fazem parte de uma pesquisa de mestrado desenvolvida no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo - USP, e que nos últimos meses, devido a pandemia teve sua pesquisa de campo paralisada.

2. Alguns Apontamentos Teóricos

Para Boaler (2016), um aluno que resolve 21 - 6 reconhecendo que o resultado deste cálculo é equivalente a 20 - 5, demonstra encarar os números com flexibilidade e senso numérico. Em contrapartida, um aluno que resolve 21 - 6 contando regressivamente a partir do 21 pode mostrar uma necessidade de se ater aos procedimentos formais já aprendidos anteriormente, mesmo quando eles não são necessários. Podemos encontrar mais justificativas para a escolha do 21 – 6 ao invés do 20 – 5, como por exemplo, 20 - 5 não ser, de alguma forma, mais intuitivo para os alunos que contam regressivamente – o que não impede que eles ainda possam interagir com os números com flexibilidade em outros cálculos. No entanto, sem entrar no mérito das motivações destes alunos hipotéticos, essa introdução nos oferece uma primeira orientação sobre ao que a autora se refere quando fala sobre Flexibilidade Numérica.

Baseado nesse fragmento, apresentamos então uma primeira característica que fará parte da nossa definição primária de Flexibilidade Numérica: o Senso numérico. Para este construto, escolhemos usar uma definição proposta por Dehaene (1997), que apresenta o Senso Numérico como "uma intuição especial que nos ajuda a dar sentido aos números e a matemática" (DEHAENE, 1997, p. IX, tradução nossa). Intencionalmente, essa escolha foi feita para evitar uma concepção completamente formal da Flexibilidade Numérica - a ideia de intuição traz consigo uma subjetividade que julgamos necessária. Uma criança que ainda não compreenda completamente o Sistema de Numeração Decimal, ou ainda que não reconheça todos os algarismos ou outros símbolos recorrentemente utilizados na matemática da educação infantil já pode demonstrar Flexibilidade Numérica em algum grau, seja organizando objetos, identificando alguma ordenação por meio de quantidades etc.

Não é interessante, no entanto, pensar apenas no senso numérico como referencial para a Flexibilidade Numérica, pois isto ainda não é suficiente para justificar o exemplo de Boaler (2016) que citamos anteriormente. Possuir e desenvolver uma intuição que auxilia a compreensão dos números e da matemática não implica necessariamente no reconhecimento de propriedades numéricas, tais como 21 - 6 = 20 - 5, ou quaisquer outras que possam ser úteis para realizar cálculos ou reconhecer quantidades.

Por conta disto, um outro conceito que será apresentado como parte necessária para esta definição primária de Flexibilidade Numérica é o proceito. Esse construto, apresentado por David Tall e Eddie Gray (1994), faz referência a união de processos e conceitos de um mesmo símbolo. Um exemplo pode ser dado com o “6 + 3”, que pode significar um processo (contar mais 3 unidades a partir do 6), ao mesmo tempo que pode significar simplesmente o conceito de soma (e, portanto, relacionada ao símbolo 9). Mais do que isso, o símbolo “9” possui uma série de outras representações, como o “25 - 16”, o “3x3” e até mesmo o logaritmo de 512 na base 2. Isso implica em uma infinidade de opções, que permitem uma transição entre diferentes áreas da matemática, o que é extremamente interessante para esta discussão.

Os exemplos 21 - 6 e 20 - 5 são duas representações relacionadas ao 15, o que coloca a concepção de proceito mais próxima do nosso objetivo ao definir Flexibilidade Numérica. Reconhecemos a importância desse acréscimo para que i) possamos incluir na definição as representações simbólicas e os cálculos que se apoiam nessa estrutura e para que ii) consigamos incluir também formalizações e registros, permitindo assim um viés mais rigoroso acerca do tema.

Em resumo, definimos de início a Flexibilidade Numérica como a união entre o Senso Numérico e uma capacidade de transição entre representações conceituais e processuais de um mesmo símbolo. Estas duas características se fazem necessárias, mas ao nosso ver, sem uma determinação de grau em que cada uma deva se manifestar. Assim, uma pessoa pode dominar uma quantidade ampla de ferramentas que auxiliem no reconhecimento de proceitos distintos, ao mesmo tempo que não possui um senso numérico robusto. De maneira análoga, alguém pode ter um senso numérico bastante desenvolvido, sem conseguir relacionar muitos proceitos elementares de um mesmo símbolo. Essas duas características se complementam e cada uma pode ser útil no fortalecimento da outra, ampliando assim a Flexibilidade Numérica.

Com isso, entendemos que essa definição pressupõe que a Flexibilidade Numérica é uma qualidade humana, tal como a destreza, a atenção ou a própria flexibilidade. Desse modo, mesmo que não estejamos discutindo uma maneira de mensurar essa qualidade, é possível entendê-la como uma característica de cada indivíduo e que aparece para cada um em alguma escala. É evidente que, tal como os exemplos de qualidades supracitados, a Flexibilidade Numérica também é algo que pode ser desenvolvido e não é dado em uma escala binária (possui ou não possui), sendo possível então dizer que alguém demonstra ter mais ou menos Flexibilidade Numérica.

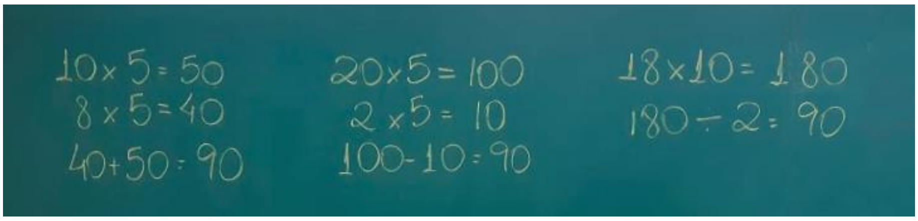
3. Desenvolvimento da Oficina

Com o intuito de debater as ideias apresentadas até aqui, foi realizado no segundo semestre de 2019 uma oficina que possuía a Flexibilidade Numérica como tema. Com duração de 4 horas e realizada no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - CAEM, o objetivo da oficina foi apresentar ideias relacionadas à Flexibilidade Numérica, bem como algumas atividades que propiciam o desenvolvimento dessa habilidade. Participaram da oficina professores da rede pública e privada e alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP, totalizando 17 participantes. Destes, 10 eram professores, sendo que 1 trabalha no Ensino Fundamental I, 4 no Ensino Fundamental II, 4 no Ensino Médio e 1 professor que não se enquadrou em nenhuma destas três opções. Dos 9 professores do Ensino Básico, 3 eram da rede pública e 6 da rede privada. A oficina foi organizada em quatro partes, a primeira destinada para uma discussão sobre as aulas de matemática e a Flexibilidade Numérica, a segunda envolvendo Conversas Numéricas, na terceira trabalhamos com Quebra-cabeças numéricos e o último momento foi destinado a uma avaliação das atividades e discussões que ocorreram durante a oficina.

A escolha do material utilizado na oficina foi pautada na leitura que tivemos do que significa Flexibilidade Numérica, seja a partir da nossa definição inicial, seja na investigação de atividades propostas por Boaler que destacam o tema. No que segue, discorreremos, com mais detalhes, sobre as partes 2, 3 e 4 da oficina. A primeira parte da oficina contemplou uma apresentação sobre quais ideias surgem quando falamos em Flexibilidade Numérica além de uma discussão sobre as expectativas e percepções dos professores, envolvidos na oficina, sobre o ensino da matemática na Educação Básica.

Na segunda parte da oficina, fizemos algumas Conversas Numéricas, isto é, "uma prática na qual os estudantes resolvem mentalmente problemas de cálculo e falam sobre suas estratégias" (HUMPHREYS E PARKER, 2015, p. 6). De maneira geral, durante as Conversar Numéricas, os alunos são convidados a resolver mentalmente alguma conta e, em um segundo momento, compartilhar a própria solução verbalmente enquanto o professor faz os registros das ideias apresentadas. Seguindo os procedimentos adotados por Humphreys e Parker (2015) fizemos uma conversa numérica propondo a multiplicação 18 x 5 para que os participantes da oficina pensassem em alguma solução e, depois de um tempo, compartilhassem. Registramos na lousa as respostas de acordo com o que cada participante descreveu. Foram 7 soluções distintas que nos ajudaram a discutir algumas propriedades matemáticas. Como exemplo, apresentamos a seguir, 3 destas soluções.

Figura 1 – 3 soluções apresentadas para a operação 18x5



Fonte: Registro da lousa feito pelos autores, 2019.

As soluções apresentadas fazem referência constante às propriedades associativas e comutativas da adição e da multiplicação, explorando ainda em alguns momentos a propriedade distributiva. Características do sistema decimal também estão presentes a partir de algumas transformações que foram feitas para simplificar alguns cálculos – como por exemplo a terceira solução da Figura 1, que exibe uma multiplicação pelo número 10 e em seguida uma divisão por 2, operações que foram mais intuitivas para o participante em comparação à multiplicação por 5.

Nesta atividade, vemos um uso recorrente da noção de proceitos a partir dessas manipulações: 10 = 2 x 5, 18 = 20 – 2, 18 x 5 = 18 + 18 + 18 + 18 + 18 etc. Compreender o processo 18 x 5 e/ou proceitos relacionados a este foi fundamental para que surgissem uma série de respostas distintas. Inclusive, uma solução factível seria 18 x 5 = 90, se alguém reconhecesse facilmente que 18 x 5 é um proceito elementar de 90. A escolha dos processos adotados também indica a presença do senso numérico, na medida que procedimentos foram adotados mesmo sem uma justificativa formal ou algorítmica das propriedades – inclusive, durante as explicações, nenhuma justificativa sobre as propriedades foi utilizada.

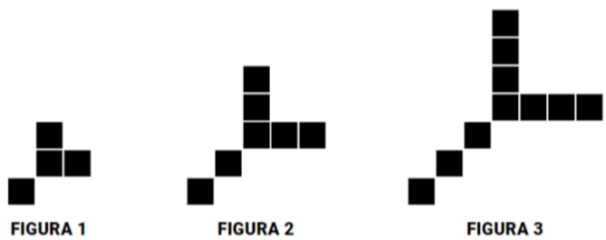
Na terceira parte da oficina, apresentamos três quebra-cabeça numéricos. Em um deles, o grupo deveria encontrar a maior soma, a menor soma, a maior diferença e a menor diferença utilizando os algarismos de 1 a 6 para compor dois números de três algarismos

– por exemplo, 642 + 531 é uma solução para a maior soma, enquanto 654 – 123 é uma solução para a maior diferença. Em especial, descobrir a menor diferença foi bastante desafiador para o grupo e gerou uma série de debates interessantes, principalmente porque vários participantes escolheram intuitivamente 642 – 531, que não é a resposta correta por não levar em consideração alguns aspectos da subtração.

Este exemplo foi bastante significativo para validarmos a concepção de que o senso numérico e a flexibilidade numérica estão em constante desenvolvimento, mesmo para conceitos mais elementares. A intuição matemática, mesmo tendo um papel facilitador na compreensão de processos e formulação de procedimentos, pode levar muito comumente a contradições, como aponta Fischbein (1994). Os participantes foram percebendo aos poucos que existiam diferenças ainda menores ao manipular os algarismos livremente e conseguiram, aos poucos, construir justificativas para aproximá-los de uma resposta correta.

Em outro quebra-cabeça, os participantes deveriam encontrar uma fórmula de crescimento para o padrão geométrico representado na Figura 2, além de descobrir quantos quadradinhos algumas figuras possuem (a figura 0 e a figura 100). Este foi um desafio interessante do ponto de vista da Flexibilidade Numérica, já que identificar os padrões de crescimento e levantar hipóteses sobre as próximas figuras exige diretamente o que adotamos como senso numérico.

Figura 2 – Padrões de crescimento



Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Mais ainda, a multiplicidade de resoluções fez com que diferentes fórmulas de crescimento para o número de quadradinhos fossem encontradas, permitindo assim que fossem apresentadas algumas equivalências. Por exemplo, um participante reconheceu o padrão 1 + 2 + 1, 2 + 3 + 2, 3 + 4 + 3, e conjecturou que uma fórmula de crescimento para o número de quadradinhos seria N + (N + 1) + N para a figura N. Outro percebeu 1 + (2 x 2 – 1 x 1), 2 + (3 x 3 – 2 x 2), e conjecturou N + ((N + 1) x (N + 1) – N X N). Todas essas fórmulas são representações diferentes de um mesmo objeto matemático, podendo todas serem relacionadas ao símbolo “3N + 1”. Escrevendo de outra maneira, todas são proceitos elementares do proceito 3N + 1.

Um último quebra-cabeça foi o desafio “Os Quatro 4s”, que pode ser encontrado no livro de literatura “O Homem que calculava”, do autor Júlio César de Melo e Sousa sob pseudônimo de Malba Tahan. Neste desafio, os participantes deveriam representar os números de 1 a 20 utilizando exatamente e somente quatro vezes o algarismo 4 e operações matemáticas variadas – por exemplo, o número 8 pode ser representado por 4 + 4 + 4 – 4 ou por (4 x 4) – 4 – 4, dentre outras maneiras. Percebemos que o grande número de possibilidades de operações e manipulações distintas fez com o que a discussão tenha sido bastante produtiva do ponto de vista da Flexibilidade Numérica – além de uma série de representações diferentes de um mesmo número, algumas justificativas indicavam aspectos intuitivos utilizados nos cálculos, como a utilização de potências e da operação fatorial para encontrar números altos, por exemplo.

Na avaliação final proposta aos participantes, apresentamos também uma série de habilidades retiradas da BNCC, pedindo para que os participantes avaliassem quais delas eram desenvolvidas com as atividades apresentadas. Nosso objetivo era avaliar se as habilidades que acreditamos estarem relacionadas à Flexibilidade Numérica fizeram parte da oficina, seja no debate ou nas atividades. Os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Quadro 1 – Avaliação dos professores sobre habilidades presentes na Oficina

Habilidade	**Número de participantes que reconheceram a habilidade**	**%**
Reconhecimento dos números	12	70,6
Quantificação de objetos	5	29,4
Reconhecimento do Sistema Decimal	13	76,5
Compreensão de diferentes significados das operações	13	76,5
Reconhecimento de regularidades em sequências	13	76,5
Composição e decomposição de números	17	100
Fatos básicos das operações	14	82,4
Procedimentos de cálculo	8	47,0
Relação de igualdade	13	76,5
Comparação entre números	7	41,2
Relações entre as operações	9	52,9
Investigação de padrões	14	82,4

Fonte: Elaborada pelos autores, 2019.

Percebemos que a composição e decomposição de números ficou bastante evidente dentre as habilidades reconhecidas pelos professores, e que outras habilidades bastante citadas também correspondem às nossas expectativas do que pode ser alcançado com a Flexibilidade Numérica, como a investigação de padrões e os fatos básicos das operações. Estes dados são importantes para que entendamos qual é o papel da Flexibilidade Numérica no desenvolvimento do conhecimento matemático, bem como suas possibilidades e limitações.

4. Conclusões

Ao observar o desenvolvimento das atividades propostas na oficina, tínhamos dois desafios: o primeiro, de reconhecer se aquilo que estávamos apresentando como Flexibilidade Numérica por meio das atividades correspondia às nossas ideias iniciais e entender como os professores interpretaram as intervenções propostas.

Não estamos propondo um novo tipo de conhecimento, mas sim argumentando que a reunião dessas duas habilidades (a noção de proceitos e o senso numérico) pode ser poderosa, principalmente se colocada em primeiro plano nas aulas de matemática. No questionário final da oficina os participantes revelaram um interesse genuíno em valorizar a diversidade de soluções, o compartilhamento entre os participantes e a liberdade de manipulação dos números.

Acreditamos que é exatamente isto que a Flexibilidade Numérica oferece: um desenvolvimento numérico a partir da sofisticação da intuição matemática, ao mesmo tempo que proporciona uma série de relações entre números, conceitos e processos. Investir na Flexibilidade Numérica é investir nessas duas características, que já existem na sala de aula e em uma série de atividades, mas que, ao nosso ver, precisam ser trabalhadas conjuntamente e como prioridade em alguns momentos.

Uma inquietação que surgiu com a oficina foi o reconhecimento das habilidades por parte dos professores. Ao mesmo tempo que as habilidades mais identificadas pelos participantes possuem uma relação profunda com a Flexibilidade Numérica, outras que foram pouco referenciadas também poderiam ter essa forte relação, como a "relação entre as operações" e a "comparação entre números". Ao reconhecer que essas habilidades têm potencial de serem desenvolvidas dentro do leque de possibilidades que a Flexibilidade Numérica oferece, entendemos que o formato da oficina não privilegiou essas características, por não as explicitar em nenhum momento e apenas tê-las como partes menos relevantes da construção de cada desafio.

De todo modo, tivemos indicativos que a definição inicial apresentada corresponde às nossas expectativas, acreditando que ela contempla às ideias que julgamos relevantes e que esteja de acordo com os textos dos autores que embasaram nosso referencial teórico. As respostas positivas dos professores e a amplitude de habilidades destacadas mostram ainda como a Flexibilidade Numérica é relevante e pode, se encarada como algo que faz parte das aulas de matemática, incentivar bons resultados no processo de ensino e aprendizagem.

5. Referências Bibliográficas

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 de agosto de 2020.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas: Estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018.

DEHAENE, Stanislas. **The number sense: How the mind creates mathematics**. 1. ed. Nova York: Oxford University Press, 1997.

FISCHBEIN, Efraim. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: Biehler, R; et al. (Eds). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. v. 1, cap. 5, p. 231-238.

GRAY, Eddie M.; TALL, David O. Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 25, n.2, p. 116-140, mar. 1994.

HUMPREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas numéricas: Estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática**. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2019.