EQUAÇÕES INTEGRAIS LINEARES DO TIPO (K) E SOLUÇÕES QUE RETORNAM

L. BARBANTI
barbanti@ime.usp.br

1. Introdução

1.1. Dada uma equação integral do tipo (K), linear,

$$(K) \qquad x(t) - x_0 + \int_a^t \cdot d_s K(t,s)x(s) = f(t) \quad (f(a) = 0), \quad a \le t \le b$$

(v. [1]), com x, $f \in G([a,b],X)$, sendo o espaço das funções regradas de $[a,b]$ a valores no espaço de Banach X, temos associado a ela, sob certas condições, um operador-solução

$$R(t,s) \in L(X) \qquad (t \ge s)$$

onde vale

$$x(t) = f(t) - R(t,a)[f(a) - x_0] - \int_a^t \cdot d_s R(t,s) f(s).$$

Para deixar claras algumas condições, às vezes notamos o valor da solução x gerada por f, em t, com condição inicial x_0 no instante t_0 por $x_f(t;t_0,x_0)$.

No que segue, usaremos livremente as notações e resultados de [1] e [2].

1.2. **O problema.** Sejam os números reais

$$(*) \qquad a < t_0 < t_0 + w \le t_1 < t_1 + w \le b \quad \text{e} \quad \lambda \in [0,w].$$

O problema que nos propomos é o seguinte:

(P) **É possível em (K) repetir um pedaço de solução de comprimento w? Isto é: é possível ter solução x em (K) tal que $x(t_0+\lambda) = x(t_1+\lambda)$, para todo $\lambda \in [0,w]$?**

No que segue, encaminhamos o problema

2. Repetição de pedaços de soluções em (K)

Consideremos o sistema (K) e a restrição linear em suas soluções, $F_\lambda[x]$, ($\lambda \in [0, w]$),

$$(F_\lambda) \qquad F_\lambda[x] = x(t_0 + \lambda) - x(t_1 + \lambda) = 0$$

onde t_0, t_1 e w satisfazem (*). Dizemos que a solução x_f satisfaz $(K) + (F_\lambda)$ se x_f é solução de (K) e vale $F_\lambda[x_f] = 0$.

A classe das x_f que satisfazem $(K) + (F_\lambda)$ pode ser caracterizada pelo teorema:

Teorema 2.1 Seja $f \in G([a, b], X)$. Defina para cada λ, c_f^λ, como

$$c_f^\lambda = -\int_a^b \cdot d_\sigma \mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(\sigma) f(\sigma)$$

onde $\mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(\sigma) = R(t_0 + \lambda+, \sigma) - R(t_1 + \lambda+, \sigma)$, $\sigma \in (a, b)$ e $\lambda \in [0, w]$ com t_0, t_1 e w satisfazendo (*).

A função f que gera a solução x_f em (K) satisfaz $(K) + (F_\lambda)$ se e só se

$$-c_f^\lambda \in \mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(a) \cdot X.$$

Ainda mais, se $-c_f^\lambda = \mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(a) \cdot x_a$, então

$$x_f(t) = x_f(t; a, x_a)$$

Demonstração: Segundo [1; Th. 2.5] temos

$$x(t_0 + \lambda) - x(t_1 + \lambda) = \int_a^b \cdot d_\sigma \alpha(\sigma) x(\sigma)$$

onde

$$(2.1) \qquad \alpha(\sigma) = \begin{cases} I & \text{se } t_0 + \lambda < \sigma \leq t_1 + \lambda \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, [2; Lemma 4.3 e 4.2] dá o resto do teorema fazendo no Lemma 4.2, $t_0 = a$.

3. Sobre o problema (P)

Pela aplicação do Teorema 2.1 podemos concluir de imediato:

Teorema 3.1. Existe solução para o problema (P) da secção 1, se existe $f \in G([a, b], X)$ com

$$\int_a^{t_1+\lambda} \cdot d_\sigma \mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(\sigma) f(\sigma) \in \mathcal{R}_{t_0,t_1}^\lambda(a) \cdot X,$$

para todo $\lambda \in [0, w]$.

Teorema 3.2. Sejam $a < \bar{t} < t_0$ e $X_{(\bar{t})} \subset X$, com

$$X_{(\bar{t})} = \{f(\bar{t}) + R(\bar{t}, a) \cdot x - \int_a^{\bar{t}} \cdot d_s R(\bar{t}, a) f(s);\ f \in G([a, b], X) \text{ e } x \in X\}$$

Então existe solução para o problema (P) se existe f com

$$[R(t_0 + \lambda+, \bar{t}) - R(t_1 + \lambda+, \bar{t})] f(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t_1+\lambda} \cdot d_\sigma \mathcal{R}^\lambda_{t_0,t_1}(\sigma) f(\sigma) \in \mathcal{R}^\lambda_{t_0,t_1}(\bar{t}) \cdot X_{(\bar{t})},$$

para todo $\lambda \in [0, w]$

Escolhendo novos instantes iniciais em (K) podemos obter uma condição necessária para f realizar (P): f tem que ser idêntica nos intervalos $[t_0,\ t_0 + w]$ e $[t_1,\ t_1 + w]$.

De fato:seja em (K) o instante inicial $a = t_0 + \lambda$ e definamos agora em $F_\lambda[x]$, $\lambda \in [0, w]$,

$$\alpha_\lambda(s) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad s = t_0 + \lambda \\ I & \text{se} \quad t_0 + \lambda < s \leq t_1 + \lambda \\ 0 & \text{se} \quad s > t_1 + \lambda \end{cases}$$

Podemos demonstrar:

Teorema 3.3. Dada a equação (K), se para todo $\lambda \in [0, w]$, $R(t_0 + \lambda+,\ t_0 + \lambda) = R(t_0 + \lambda,\ t_0 + \lambda)$ e $R(t_1 + \lambda+,\ t_0 + \lambda) = R(t_1 + \lambda,\ t_0 + \lambda)$, então dada f forçando em (K) uma solução com $x_f(t_1 + \lambda;\ t_0 + \lambda,\ x_0) = x_0$, vale

$$f(t_0 + \lambda) = f(t_1 + \lambda)$$

Demonstração: De acordo com os Lemas 4.2 e 4.3 de [2], (agora com t_0 lá, sendo o $t_0 + \lambda$), temos

(3.2)

$$\begin{aligned} -c_f^\lambda &= f(t_0 + \lambda) - R(t_1 + \lambda+,\ t_0 + \lambda) f(t_0 + \lambda) - \int_{t_0+\lambda}^{t_1+\lambda} \cdot d_\sigma R(t_1 + \lambda, \sigma) f(\sigma) \\ &= x_0 - R(t_1 + \lambda+,\ t_0 + \lambda) x_0 \end{aligned}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_1 + \lambda;\ t_0 + \lambda,\ x_0) = f(t_1 + \lambda) - R(t_1 + \lambda,\ t_0 + \lambda) f(t_0 + \lambda) + \\ &+ R(t_1 + \lambda,\ t_0 + \lambda) x_0 - \int_{t_0+\lambda}^{t_1+\lambda} \cdot d_\sigma R(t_1 + \lambda, \sigma) f(\sigma) \end{aligned} \tag{3.3}.$$

Finalmente substituindo (3.3) em (3.2), vemos que

$$f(t_0 + \lambda) = f(t_1 + \lambda)$$

Aplicaremos estes resultados futuramente em sistemas EDF e EDP.

Bibliografia

1. **C.S. Hönig**, Volterra - Stieltjes Integral Equations, Math. Studies 16, N-Holland Pub. Comp, 1975.

2. **C.S. Hönig**, The adjoint equation of a linear V-S integral equation with a linear constraint, LNM 957, Springer, 1982.

Departamento de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
C.P. 66281 - CEP 05389-970
São Paulo, Brasil