

A ÁLGEBRA DE MULTIPLICAÇÕES DE UMA ÁLGEBRA DE BERNSTEIN

R. Costa, L. S. Ikemoto IME-USP

Apresentamos aqui alguns resultados sobre a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein, em especial o estudo do invariante $\rho(A)$ da álgebra A definido a partir dos elementos de sua álgebra de multiplicações.

Lembramos que uma álgebra bária sobre um corpo F é um par (A, ω) , onde A é uma álgebra sobre F e $\omega : A \rightarrow F$ é um homomorfismo não nulo; neste caso, dizemos que ω é a função peso de (A, ω) . Temos ainda que $N = \ker \omega$ é um ideal bilateral de codimensão 1. Uma álgebra bária (A, ω) é uma álgebra de Bernstein se A é comutativa e $(x^2)^2 = \omega(x)x^2$, para todo $x \in A$. Consideraremos aqui apenas álgebras de Bernstein de dimensão finita sobre corpos de característica diferente de 2. Os resultados sobre álgebras de Bernstein que seguem são bem conhecidos, veja [3], por exemplo. Dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) , os elementos x^2 com $\omega(x) = 1$ são todos os idempotentes não nulos de A e, dado um idempotente não nulo e , temos a decomposição de Peirce de A relativa a esse idempotente:

$$A = Fe \oplus U_e \oplus V_e \quad (14)$$

onde $U_e = \{x \in N : 2xe = x\}$ e $V_e = \{x \in N : xe = 0\}$. A menos que seja necessário, omitiremos o índice e nos subespaços U_e e V_e . Valem as seguintes relações:

$$U^2 \subseteq V, UV \subseteq U, V^2 \subseteq U, UV^2 = 0 \quad (15)$$

e as seguintes identidades para $u \in U$ e $v \in V$:

$$u^3 = 0; u(uv) = 0; uv^2 = 0; u^2(uv) = 0; u^2v^2 = 0; (uv)^2 = 0 \quad (16)$$

Os subespaços U e V em (14) têm dimensões invariantes sob mudança de idempotente. Assim, o par $(1 + \dim U, \dim V)$ está bem determinado e é denominado o *tipo* de A . O subespaço $L = \{u \in U : uU = 0\}$ é um ideal de A que independe do idempotente escolhido. Quando $U^2 = 0$ em (15), dizemos que A é *excepcional* e quando $UV = V^2 = 0$, A é *normal*. Estas condições independem do idempotente escolhido em A . Outras caracterizações destas álgebras podem ser vistas em [3], assim como toda a teoria básica das álgebras de Bernstein.

Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, sua álgebra de multiplicações $M(A)$ é bária, com função peso $\bar{\omega}$ dada por $\bar{\omega}(L_x) = \omega(x)$, para todo $x \in A$. Temos que $\ker \bar{\omega} = (N : A) = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A) \subseteq N\}$. O operador $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente de peso 1 e, portanto, temos a decomposição

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus (N : A) \quad (17)$$

Além disso, $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ é idempotente e todo $\sigma \in M(A)$ se decompõe na forma

$$\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(4L_e - 4L_e^2) + \theta$$

com $\theta \in \tilde{N}$ e $\tilde{N}$ é o ideal de $M(A)$ gerado por $\{L_x : x \in N\}$. Observe que $\tilde{N} \subseteq (N : A)$.

Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein então $M(A)$ tem a seguinte decomposição relativa ao idempotente $2L_e^2 - L_e$:

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V} \quad (18)$$

onde $\tilde{U} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = \sigma\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(N) = 0\} = \{\psi_x : x \in U \oplus U^2\}$, onde $\psi_x(e) = x$ e $\psi(N) = 0$ e $\tilde{V} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = 0\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(e) = 0\}$. Esses subespaços verificam as seguintes relações:

$$\tilde{U}^2 = 0; \tilde{U}\tilde{V} = 0; \tilde{V}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}; \tilde{V}^2 \subseteq \tilde{V} \quad (19)$$

Podemos refinar a decomposição dada em (18) usando o idempotente $4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{V}$. Teremos $\tilde{V} = \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$, onde $\tilde{V}_{ij} = \{\sigma_{ij} \in \tilde{V} : (4L_e - 4L_e^2)\sigma_{ij} = i\sigma_{ij} \text{ e } \sigma_{ij}(4L_e - 4L_e^2) = j\sigma_{ij}\}$. Se $\sigma \in \tilde{V}$ então temos:

$$\sigma \in \tilde{V}_{11} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0 \quad (20)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{10} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq U \quad (21)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{01} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq V \text{ e } \sigma(V) = 0 \quad (22)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{00} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq V \quad (23)$$

Proposição 1 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $s \geq 1$. Então $M(A)$ não tem elementos inversíveis em $\text{End}A$.*

Demonstração: Suponha que existe $\sigma \in M(A)$ inversível. Então A é nuclear, pois $A = \sigma(A) \subseteq A^2$. Assim, pelo teorema de Grishkov, $N = \ker \omega$ é nilpotente e, portanto, $\tilde{N}$ também é nilpotente (ver [1, Prop.12]). Segue daí que todo operador $\sigma \in \tilde{N}$ é nilpotente. Seja $\Phi : M(A) \rightarrow M(A)$ definida por $\Phi(\theta) = \theta\sigma$, para $\theta \in M(A)$. Esse operador linear é injetor, pois se $\theta\sigma = \theta'\sigma$, então $\theta = \theta\sigma\sigma^{-1} = \theta'\sigma\sigma^{-1} = \theta'$. Logo, é também sobrejetor, ou seja, existe $\theta \in M(A)$ tal que $\theta\sigma = \sigma$. Compondo mais uma vez com σ^{-1} , temos que $\theta = id_A$, a identidade em A . Portanto, existem $\alpha, \beta \in F$ e $\bar{\theta} \in \tilde{N}$ tais que $id_A = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(4L_e - 4L_e^2) + \bar{\theta}$. Tomando um elemento $v \in V$ não nulo, resulta $v = id_A(v) = \bar{\theta}(v)$, ou seja, $\bar{\theta}$ tem autovalor 1, o que é um absurdo, pois $\bar{\theta}$ é nilpotente. Consequentemente, $M(A)$ não tem elementos inversíveis. ■

Este resultado mostra, em particular, que em toda álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $s \geq 1$, todo elemento é um divisor de zero. Quando $s = 0$, ou seja, A tem tipo $(1 + r, 0)$, o operador L_e é inversível. A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, 0)$ já foi descrita em [1]. Assim, suporemos sempre $s \geq 1$.

Para cada álgebra de Bernstein A , podemos definir o invariante $\rho(A) = \max\{\text{posto}(\sigma) : \sigma \in M(A)\}$. Pela proposição anterior, temos que $\rho(A) < \dim A$, para A de tipo $(1 + r, s)$ com

$s \geq 1$. Se A tem tipo $(1+r, s)$ então $\rho(A) \geq 1+r$, pois o operador L_e tem posto $1+r$. Logo, $1+r \leq \rho(A) \leq s+r$.

Cálculo de $\rho(A)$ em alguns casos particulares

1. No caso em que A é excepcional de tipo $(1+r, s)$, temos $\rho(A) = 1+r$. De fato, se $\sigma \in M(A)$ então $\sigma(A) \subseteq A^2$ e A^2 tem dimensão $1+r$. Assim, $\text{posto}(\sigma) \leq r+1$ e, portanto, $\rho(A) = 1+r$.

2. Quando A é normal, também vale $\rho(A) = 1+r$. Para isso, usaremos a caracterização de um elemento de $M(A)$, A normal, obtida em [2]: todo elemento $\sigma \in M(A)$ tem a forma $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \beta(4L_e - 4L_e^2) + (L_u - 2L_e L_u)$, onde $\alpha, \beta \in F$, $u \in U$ e $x \in U \oplus U^2$. Como $\sigma(v) = 0$, para todo $v \in V$ resulta que $\sigma(Fe \oplus U)$ gera a imagem de σ e, portanto, $\dim \text{Im}(\sigma) \leq 1+r$. Assim $\rho(A) = 1+r$.

Observemos que se A é normal ou excepcional então $U(UV) = 0$. Isto sugere uma ligação forte entre o fato de ρ ser mínimo e as álgebras onde este subespaço $U(UV)$ é mínimo.

3. Mais especificamente, para uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1+r, s)$, temos:

$$\rho(A) = 1+r \text{ se e somente se } U(UV) = 0$$

De fato, suponha $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $U(UV) = 0$. Desse modo, temos que $UV \subseteq L$. Logo, se $v \in V$ e $x \in A$ então $xv \in UV + V^2 \subseteq L$, onde $L = \{u \in U : uU = 0\}$. Se J é um subespaço de U complementar a L , ou seja, $U = L \oplus J$, então para todo $\sigma \in M(A)$, tem-se $\sigma(N) \subseteq L + \sigma(J)$. Isso se prova observando que $\sigma(u), \sigma(v) \in L$ se $u \in L$ e $v \in V$ (pois L é ideal). Assim, $\text{Im} \sigma = \sigma(Fe) + \sigma(N) \subseteq \sigma(Fe) + L + \sigma(J)$ tem dimensão menor ou igual a $1+r$. Logo $\rho(A) = 1+r$. Reciprocamente, se $U(UV) \neq 0$ existem $u_1, u_2 \in U$ e $v_1 \in V$ tais que $u_1(u_2 v_1) \neq 0$. Seja $\sigma = L_e + L_{u_1} L_e L_{u_2}$. Temos $\sigma(e) = e + u_1 u_2$, $\sigma(u) = \frac{1}{2}u$, $\sigma(v) = u_1(u_2 v)$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, se $\{x_1, \dots, x_r\}$ é base de U então o conjunto $\{\sigma(e), \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r), \sigma(v_1)\}$ é linearmente independente, ou seja, $\text{posto}(\sigma) \geq r+2$. Logo, $\rho(A) \geq r+2$.

Exemplo: A seguir, um exemplo de uma álgebra de Bernstein A de tipo $(1+r, s)$ tal que $\rho(A) = r+2$.

Seja A_1 a álgebra comutativa de base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ cuja tábua de multiplicação em relação a essa base é dada por

$$e^2 = e; 2eu_i = u_i \ (1 \leq i \leq 4); u_1 u_4 = -v_2; u_2 u_3 = v_2; u_2 v_1 = u_3; u_3 v_1 = u_4$$

outros produtos nulos

Com a função ω definida por $\omega(e) = 1$ é nula nos outros elementos da base dada, A_1 é Bernstein com decomposição de Peirce $A_1 = Fe \oplus U \oplus V$, onde U é gerado por $\{u_1, \dots, u_4\}$ e V , por

$\{v_1, v_2\}$. Logo, A_1 é de tipo $(5, 2)$ e $U(UV) \neq 0$ (pois $u_1(u_2z_1) = -z_2 \neq 0$). Assim, pelo resultado anterior, temos $\rho(A_1) \geq r + 2 = 6$. Por outro lado, $\rho(A_1) \leq r + s = 6$, o que implica $\rho(A_1) = 6 = r + 2$.

Podemos obter exemplos de álgebras de Bernstein A de tipo $(1 + r, 2)$, tal que $\rho(A) = r + 2$, para $r > 4$. Basta fazer o join da álgebra A_1 com a álgebra gamética de tipo $(1 + (r - 4), 0)$. Observamos que se $r < 4$ então a álgebra sempre verifica $U(UV) = 0$, pois $u_1(u_2v) \neq 0$ implica que $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ é um conjunto linearmente independente. Assim, se A é uma álgebra de tipo $(1 + r, s)$ com $r < 4$ então $\rho(A) = r + 1$. Também quando A é uma álgebra de tipo $(1 + r, 1)$, tem-se $\rho(A) = r + 1$, pois neste caso, a álgebra é normal ou excepcional (ver [3, Corol. 3.4.24]) e, portanto, $U(UV) = 0$. Dessa maneira, o exemplo anterior exhibe uma álgebra A de menor dimensão que verifica $\rho(A) > r + 1$.

Se a álgebra A verifica $U(UV) = 0$ (e portanto $\rho(A) = r + 1$), $x = e \in A$ é um elemento que verifica a igualdade: $\text{posto}(L_x) = \rho(A)$. Uma pergunta que se coloca é saber se para uma álgebra arbitrária A , existe um elemento $x \in A$ com essa propriedade. A resposta aparece no Corolário 1 a seguir.

Proposição 2 *Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1 + r, s)$, tem-se $\text{posto}(L_x) \leq r + 1$, para todo $x \in A$.*

Demonstração: Seja $x = \alpha e + u_0 + v_0$ com $\alpha \in F$, $u_0 \in U$ e $v_0 \in V$ e seja $I = \text{ann}_U(u_0, u_0v_0) = \{u \in U : uu_0 = 0 = u(u_0v_0)\}$. Esse conjunto é um subespaço vetorial de U e dados $u \in I$, $v \in V$, temos $L_x(u), L_x(v) \in I$:

$$\begin{aligned} L_x(u)u_0 &= (\frac{\alpha}{2}u + uv_0)u_0 = u_0(uv_0) = -u(u_0v_0) = 0 \\ L_x(u)(u_0v_0) &= (uv_0)(u_0v_0) = 0 \text{ (pela linearização de } (uv)^2 = 0) \\ L_x(v)u_0 &= (u_0v + vv_0)u_0 = 0 \\ L_x(v)(u_0v_0) &= (u_0v)(u_0v_0) = 0 \text{ (novamente, linearizando } (uv)^2 = 0) \end{aligned}$$

Assim, se J é um subespaço de U complementar a I ($U = I \oplus J$), temos $L_x(A) = L_x(Fe) + L_x(I) + L_x(J) + L_x(V) \subseteq L_x(Fe) + I + L_x(J)$ tem dimensão no máximo $1 + r$. Assim, $\text{posto}(L_x) \leq 1 + r$. ■

Corolário 1 *Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, existe um elemento $x \in A$ tal que $\rho(A) = \text{posto}(L_x)$ se e somente se $U(UV) = 0$ (e, nesse caso, $x = e$ verifica essa propriedade).* ■

Nosso próximo passo é estudar as álgebras para as quais $\rho(A) = r + 2$.

Lema 1 *Em qualquer álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, o subespaço $I = (UV + L) \oplus U(UV)$ é um ideal.*

Demonstração: Sejam $x + y + z \in I$, com $x \in UV$, $y \in L$ e $z \in U(UV)$ e $\alpha e + u + v \in A$. Como $ux \in U(UV)$, $vx, uz \in UV$ e $(\alpha e + u + v)y, vz \in L$, temos que $(\alpha e + u + v)(x + y + z) \in (UV + L) \oplus U(UV)$. ■

Observação: O ideal I dado no lema anterior é a soma do ideal gerado por $UV + V^2$ e L . Assim, I é um ideal invariante por mudança de idempotentes (lembramos que o ideal gerado por $UV + V^2$ é também o ideal gerado pelos elementos $x^2y - \omega(x)xy$, onde $x, y \in A$, ou seja, é invariante). A busca de ideais expressos em função de U e V e eventualmente outros ideais de A , é uma questão central na teoria.

O próximo resultado estabelece um limitante superior para $\rho(A)$, dependendo do subespaço $U(UV)$. Lembramos que este subespaço depende do idempotente escolhido em A mas sua dimensão é invariante sob mudança de idempotentes, ver [2].

Proposição 3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$, com $\dim U(UV) = t$. Então $\rho(A) \leq 1 + r + t$.*

Demonstração: Seja $\{u_1, \dots, u_t, u_{t+1}, \dots, u_r\}$ base de U , onde $\{u_1, \dots, u_t\}$ é uma base de $L + UV$. Considere o ideal I do lema anterior. Basta mostrar que, para todo $\sigma \in M(A)$, $\sigma(A) \subseteq \langle \sigma(e), \sigma(u_{t+1}), \dots, \sigma(u_r) \rangle + I$. Se $v \in V$ então $Av \in UV + L \in I$. Como I é um ideal, temos $\sigma(v) \in I$. Do mesmo modo, $\sigma(UV + L) \subseteq I$. Portanto, $\sigma(A) \subseteq \langle \sigma(e), \sigma(u_{t+1}), \dots, \sigma(u_r) \rangle + I$. ■

Corolário 2 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ e o subespaço $U(UV)$ tem dimensão 1 então $\rho(A) = r + 2$.*

Demonstração: Já sabemos que se $U(UV) \neq 0$ então $\rho(A) \geq r + 2$. A proposição anterior nos fornece a desigualdade contrária. Portanto, $\rho(A) = r + 2$. ■

A seguir, um exemplo de uma álgebra onde $\dim U(UV) = 2$ e $\rho(A) = r + 2$, como contra exemplo para a recíproca do corolário anterior.

Exemplo: Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein de tipo $(9, 3)$, tendo $\{u_1, \dots, u_8\}$ como base de U , $\{v_1, v_2, v_3\}$ como base de V e os seguintes produtos não nulos:

$$2eu_i = u_i \quad (1 \leq i \leq 8), \quad u_2u_3 = -u_1u_4 = v_2, \quad u_6u_7 = -u_5u_8 = v_3, \\ u_1v_1 = u_3, \quad u_2v_1 = u_4, \quad u_5v_1 = u_7, \quad u_6v_1 = u_8$$

Temos $U(UV) = \langle v_2, v_3 \rangle$, portanto tem dimensão 2. Além disso, como $v_2, v_3 \in \text{ann} A$, para qualquer $\sigma \in M(A)$, $\sigma(A)$ é gerado por $\sigma(e), \sigma(U)$ e $\sigma(v_1)$, ou seja, $\text{posto}(\sigma) \leq 10 = r + 2$. Pelo fato de $U(UV)$ ser não nulo, resulta que $\rho(A) = r + 2$.

Referências

- [1] Costa, R. and Suazo, A.: *The multiplication algebra of a Bernstein algebra: basic results*, Comm. Alg. **24** (5), 1809-1821 (1996).

- [2] Costa, R.; Ikemoto, L.S. and Suazo, A.: *On the multiplication algebra of a Bernstein algebra* (preprint).
- [3] Lyubich, Yu. I.: *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics **22**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1992).