

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/325746409>

A construção de malhas de elementos finitos para um domínio georreferenciado do problema do fluxo em águas subterrâneas

Conference Paper · June 2018

CITATIONS

0

READS

120

3 authors:



Alessandro Firmiano de Jesus
Força Aérea Brasileira

48 PUBLICATIONS 65 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Edson Wendland
University of São Paulo

506 PUBLICATIONS 2,095 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



João Paulo Martins dos Santos
Força Aérea Brasileira

42 PUBLICATIONS 78 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Water availability and quality threats in a Guarani Aquifer System outcrop zone - FAPESP grant 2015/03806-1 [View project](#)



Edge effect in the Brazilian Cerrado [View project](#)



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
De 6 a 8 de Junho de 2018
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

A construção de malhas de elementos finitos para um domínio georreferenciado do problema do fluxo em águas subterrâneas

João Paulo Martins dos Santos
Academia da Força Aérea-AFA
jpmdossantos@yahoo.com.br

Alessandro Firmiano de Jesus
Academia da Força Aérea-AFA
lezandro42@outlook.com

Edson Wendland
Universidade de São Paulo, SHS-EESC
ew@sc.usp.br

Resumo: A determinação do domínio computacional de um problema de interesse da engenharia representa uma fase relevante na simulação numérica das equações envolvidas. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é descrever um procedimento computacional integrado para a construção de malhas de elementos finitos, sobre um domínio georreferenciado, visando a representação das águas subterrâneas sob uma bacia hidrográfica. Além da descrição precisa da fronteira irregular e da conectividade hidráulica com rios e represa, o domínio computacional deverá representar a localização geográfica de todos os poços internos como sendo vértices de alguns dos elementos da correspondente malha não estruturada.

Palavras-chave: Geocomputação. Bacia Hidrográfica. Método de Elementos Finitos. FEniCS-QGIS.

Introdução

A solução aproximada de equações diferenciais parciais (EDP), por meio do método de elementos finitos requer a descrição da correspondente formulação variacional, uma malha de elementos finitos, a definição de espaços de funções, a definição adequada das condições iniciais e de fronteira e de um apropriado método para solução de sistemas lineares de tamanho considerável. Alguns destes requisitos são facilitados na utilização do FEniCS, uma plataforma computacional que engloba uma série de bibliotecas matemáticas e complementos para obtenção da solução automatizada de uma EDP de interesse da Engenharia (FENICS, 2018).

Uma questão relevante nos problemas de fluxo de águas subterrâneas, muitas vezes acoplados ao problema do transporte de contaminantes em aquíferos, é a robustez na representação das respectivas equações cujo domínio computacional segue em escala regional e georreferenciado. Estes problemas, muitas vezes são ainda submetidos à simulação numérica do fluxo subterrâneo no entorno de vários poços de bombeamento que atuam no interior de uma bacia hidrográfica e sujeito às condições iniciais e de fronteiras conhecidas em um conjunto discreto de pontos.

A geração de malhas simples de elementos finitos **2D** e **3D**, estruturadas ou não estruturadas, pode ser feita diretamente com as classes disponíveis em <https://fenicsproject.org/olddocs/dolfin/1.6.0/python/demo/Documented/built-in-meshes/python/documentation.html> (FENICS, 2018), mas um domínio mais representativo de uma situação real requer um conhecimento mais elaborado, a utilização integrada com outras ferramentas e a manipulação adequada entre as diversas bibliotecas utilizadas. Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo gerar uma malha não estruturada de elementos finitos para representação, em escala regional, de uma bacia hidrográfica de interesse. Informações georreferenciadas dos arquivos *shapefile* (.shp) da bacia serão importados para descrição do correspondente domínio



computacional. Neste domínio, será viabilizado a imposição de condições iniciais do problema do fluxo, através da representação dos poços de bombeamento nos vértices de alguns elementos do interior da bacia. As condições de fronteiras serão estabelecidas num conjunto discreto de pontos representando toda a extensão da borda do domínio discretizado e os corpos d'água do interior (rios e represa).

Integração QGIS e FEniCS

O Sistema de Informação Geográfica (SIG) adotado por possuir características *open-source* foi a multiplataforma QGIS. A integração entre os recursos do QGIS (QGIS, 2009) e os componentes do Projeto FEniCS (LOGG *et al.*, 2012), para simulação numérica das equações do fluxo e do transporte de contaminantes, foi realizada em ambiente de desenvolvimento Python da Plataforma Eclipse (ECLIPSE, 2015). O suporte para o domínio de algumas características dos softwares indicados podem ser encontrado nas referências (CHESNAUX *et al.*, 2011), (DIXON e UDAMERI, 2015) e (STRASSBERG, *et al.*, 2011). Uma discussão mais detalhada dos procedimentos para a delimitação QGIS da referida bacia hidrográfica e referências adicionais são encontradas em (FIRMIANO *et al.*, 2018).

A geração de uma malha de elementos finitos a partir de dados provenientes do QGIS consiste num processo cadenciado por:

- i.) exportar informações do SIG e transformá-las em um arquivo compatível para uso de bibliotecas específicas do FEniCS no ambiente Eclipse;
- ii.) exportar Coordenadas Projetadas UTM com valores de cargas hidráulicas conhecidas em pontos específicos da fronteira de Dirichlet para um arquivo .csv;
- iii.) exportar Coordenadas dos poços de observação ou bombeamento, seus valores de nível estático (N_e) e nível dinâmico (N_d) com taxas de vazões para um arquivo .csv;
- iv.) gerar a malha no formato .xml, baseado em informações da geometria discretizada do correspondente arquivo *shapefile* da bacia.

Geração de malha proveniente de domínio QGIS

Nesta fase, bibliotecas adicionais do FEniCS, foram usadas na geração de malhas não estruturadas forçando as coordenadas dos poços coincidirem com os vértices de alguns elementos finitos do interior do domínio. O *script* meshGis, apresentado a seguir, utiliza os pontos no *shapefile* PointsDominio50mEleva para construir a malha de elementos finitos por meio de MeshPy (MESHPY, 2018). Este *shapefile* define a fronteira do domínio e, em seguida, uma malha é gerada por uma função pré definida, o Gen2d. A malha, salva pela classe Mesh(**) no formato .xml, não retém toda a precisão da construção, pois, os imensos números característicos das coordenadas projetadas UTM, não são salvos corretamente. Uma alternativa foi salvar essas coordenadas usando o formato binário do NumPy (VAN DER WALT *et al.*, 2011). Para a utilização da malha gerada usando um módulo específico foi necessário ajustar as coordenadas devido aos problemas de precisão, ao salvar a malha em .xml, com a função Mesh(**) do FEniCS. Isto é feito trocando-se as coordenadas da malha em .xml pelas coordenadas do formato binário. Esta troca pode ser feita imediatamente após a leitura da malha .xml e resolve o problema de precisão. O trecho de código abaixo ilustra a discussão:

```
1 print 'Loading mesh'
mesh = Mesh("./MyFolder/MyMesh.xml") #matriz de coordenadas Numpy em formato binario
3 Coor=np.load("Coor.npy")
mesh.coordinates ()[:]=Coor
```



Algoritmo para a criação da malha Dolfin

O Algoritmo 1 abaixo descreve os principais passos para um correspondente código Python gerar uma malha não estruturada de elementos finitos em formato .xml do Dolfin. A entrada deste algoritmo é um conjunto de *shapefiles* formado por pontos equidistantes orientados no entorno da fronteira do domínio computacional que representa uma bacia hidrográfica.

Algoritmo1: GerarMalhaShapefile

```
2      Início
4
6      DEFINA LerPontosFacetasShape(shapefile,Xajuste,Yajuste,ctr)
        Pontos, Facetas: Vetor
        Leia( shapefile )
        Pontos := [(Px-Xajuste)/crt,(Py-Yajuste)/crt]
        Facetas := facets
10     Retorna Pontos, Facetas
12
14     DEFINA ConverteMalha(MalhaAntiga)
        MalhaDolfin := MalhaDolfinVazia
        VerticesMalhaDolfin := VerticesMalhaAntiga
        ElementosMalhaDolfin := ElementosMalhaAntiga
16     Retorna MalhaDolfin
18
20     DEFINA Gen2d(shapefile,X0,Y0,ctr,maxArea)
        DEFINA Refinamento(vertices,area)
            Retorna Booleano ("area MAIOR maxArea")
22
24     DEFINA GeraMalhaInicial(Pontos,Facetos)
        setInfoPontosMalha
        setInfoFacetasMalha
        Malha := Construa(InfoMalha,Refinamento)
26     Retorna Malha
28
30     Pontos, Facetas := LerPontosFacetasShape( shapefile ,X0,Y0,ctr)
        Malha := GeraMalhaInicial(Pontos,Facetos)
        MalhaBaciaHidrografica := ConverteMalha(Malha)
32     Salvar MalhaBaciaHidrografica.xml
34
36     Retorna MalhaBaciaHidrografica
38
39     ShapeFileGis = 'MyFolder/PointsDominio50mEleva'
    Gen2d(ShapeFileGis,0,0,1,1000)
40
41     Fim
```

Nesse processo inicial da geração de malhas, é improvável que os vértices passem por todos os pontos específicos de uma lista de poços georreferenciados. Se os poços não estão localizados em vértices dos elementos da malha, então podem não representar o processo físico adequadamente e, conseqüentemente, a solução numérica obtida não será adequada. Nesse caso, é interessante construir um procedimento computacional posterior para forçar que os poços sejam vértices da malha de elementos finitos.

Forçando a malha em pontos específicos

Considere $L = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \cdots, (X_n, Y_n)\}$ uma lista de coordenadas de interesse. As sublistas $ListaCoordX = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$ e $ListaCoordY = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]$ contém as coordenadas em cada eixo coordenado XY . O procedimento consiste em construir a malha de elementos finitos e em seguida trocar as coordenadas do vértice mais próximo pelas coordenadas do correspondente poço da lista L . Dessa forma, todos os poços do domínio serão vértices de algum elemento da malha. Note que o vértice será



alterado para a coordenada do poço e, portanto, a malha sofrerá uma deformação. O procedimento funciona adequadamente exceto nos casos em que um poço localizado no interior do elemento, é mais próximo à um dos vértices situados na fronteira, ou quando dois poços estão equidistantes de um mesmo vértice mais próximo. Nestes casos, o problema pode ser resolvido por refinamento local ou global.

A movimentação dos vértices para as coordenadas dos poços no interior da bacia é feita por meio da função Python *MeshPassingToWellAsVertex(**)* disponível no Anexo. Este código recebe a malha inicial, as listas de coordenadas *ListaCoordX* e *ListaCoordY* e retorna uma malha com as coordenadas de novos vértices dos elementos que passam pelos pontos determinados pela lista *L*, conforme descrito no Algoritmo 2 abaixo:

Algoritmo2: MoverVerticeMaisProximoPoco

```
2      Início
4
6      DEFINA MalhaPassandoPocos(MalhaBaciaHidrografica,ListaCoord)
7      MalhaAtual := MalhaBaciaHidrografica
8      VerticesMalhaAtual := VerticesMalhaBaciaHidrografica
9      Para Pontos na ListaCoord faca
10         Computa VerticePontoMaisProximo
11         Vertice := VerticePontoMaisProximo
12         AtualizaVerticesMalhaAtual
13     Salvar MalhaAtual
14     Retorna MalhaAtual
15
16 Fim
```

Translação de malha e poços

Em geral, a malha proveniente do QGIS possui coordenadas de magnitude elevada, o que pode influenciar negativamente o processo de simulação. A translação de coordenadas é uma alternativa para minimizar as magnitudes dos valores UTM envolvidos, caso a distância à origem seja considerável. Para obter uma translação da malha, o vértice com coordenada (x_{min}, y_{min}) passa a ser sobreposto na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas. As informações fornecidas por meio de listas ou matrizes, tais como coordenadas dos poços e cargas hidráulicas em poços de monitoramento ou na fronteiras de Dirichlet devem ser transladas de modo que esses parâmetros também sejam adequadamente representadas na nova malha. A representação digital para a delimitação da bacia hidrográfica de interesse foi obtida a partir de arquivos *.shp* disponíveis no endereço eletrônico *ftp://geoftp.ibge.gov.br*, seguidas das grades Topodata de modelos de elevação digital disponíveis em *www.webmapit.com.br/inpe/topodata/*, para compor um mosaico de *rasters* fixados num sistema de coordenadas UTM (EPSG 31997 - SRC SIRGAS/UTM zone 22S) e deformados por reprojeção. As figuras 1(a) e 1(b) ilustram a malha não estruturada da bacia hidrográfica e a posição dos poços no interior do domínio. A figura 2 ilustra a correspondente malha com modificação de alguns vértices para coincidir na posição geográfica dos poços.

Aplicação da malha gerada para um aquífero freático

A escolha do domínio computacional para o código numérico simular o comportamento do nível potenciométrico em aquífero freático apontou para a extensão total da Bacia Hidrográfica do Rio Itaquari, pois a mesma encontra-se inserida numa região de afloramento do Sistema Aquífero Guarani (SAG) (FIRMIANO *et al.*, 2018) e, supostamente, suas águas subterrâneas apresentam conexões hidrológicas com a Represa do Lobo (Broa) e seus rios principais e afluentes.

Segundo BEAR (2012), o modelo matemático para representar o fluxo de água subterrânea será governado pela equação diferencial não linear de Boussinesq. Após a execução dos passos *i.*), *ii.*), *iii.*) e *iv.*), descritos na seção II, a resolução numérica utilizará a malha Dolfin da figura 1(a) sob condições de fronteira tipo I e condição inicial impostas sobre os poços. O rebaixamento do nível freático da bacia hidrográfica ainda estará sujeito às taxas conhecidas de bombeamento dos seus poços interiores.

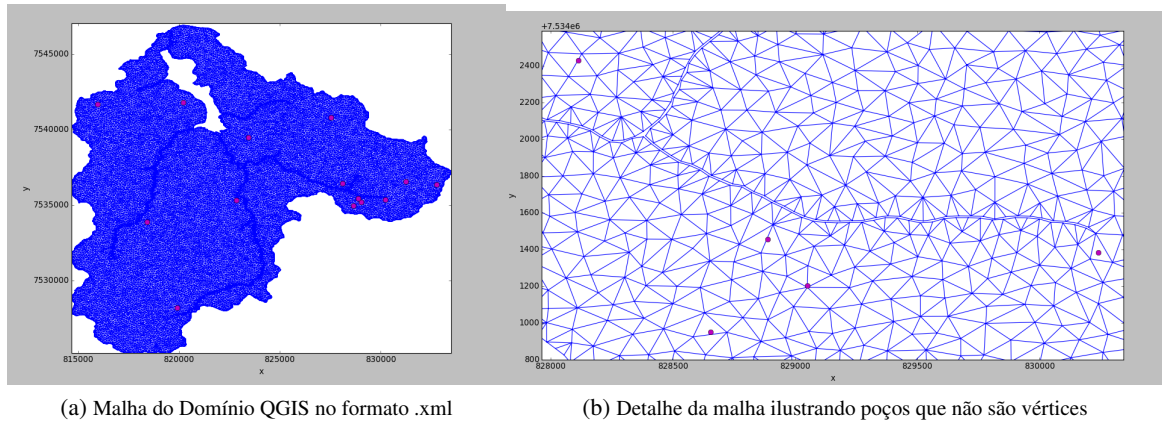


Figura 1: Domínio computacional da região de estudos proveniente do QGIS

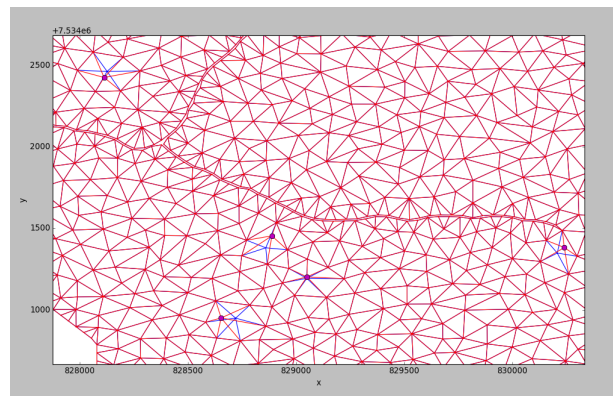


Figura 2: Sobreposição das malhas antes e após a movimentação dos vértices

Assim, na necessidade de refinamento localizado em elementos específicos, fica evidenciada a importância para que os vértices próximos sejam previamente movimentados para as coordenadas dos poços internos, conforme ilustrado na malha modificada da figura 2. As vantagens observadas na aplicação desta metodologia de geração de malha estão tanto na simplicidade de seus dados de entrada, que contém apenas um conjunto de pontos da fronteira, quanto na ausência de restrição prévia para a malha passar por certos pontos internos. Uma limitação da técnica apresentada está na dificuldade de representação dos rios da bacia através de arquivos *.shp* de linha. Isto foi contornado representando os rios pelas margens.

Após a simulação numérica, ferramentas de visualização (HUNTER, 2007) disponibilizam resultados gráficos interessantes, conforme ilustrados na figura 3 (FIRMIANO *et al.*, 2018). Verifica-se que, na extensão da bacia, foi possível estimar o comportamento do rebaixamento freático; as correspondentes linhas equipotenciais na proximidade dos poços e demais regiões; as direções preferenciais do campo de velocidades das águas subterrâneas, com aplicações imediatas no problema do transporte de contaminantes; e a estabilização da bacia hidrográfica operando em regime estacionário.

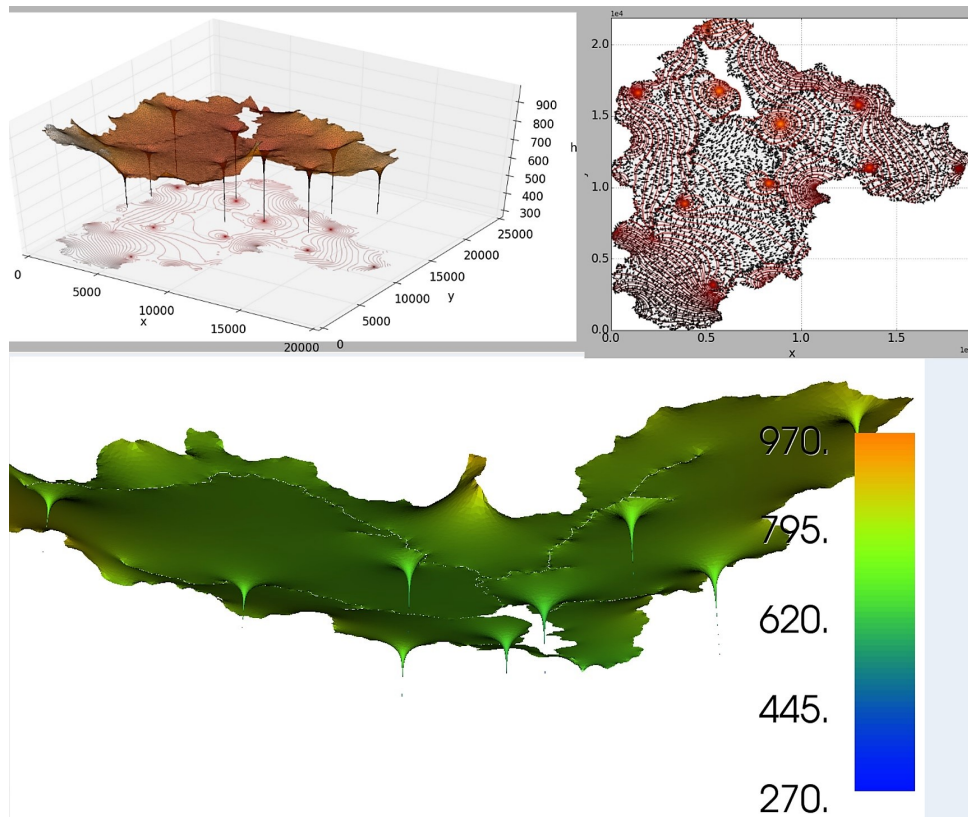


Figura 3: Solução numérica do nível potenciométrico das águas subterrâneas da Bacia do Rio Itaqueri, linhas equipotenciais, campo de velocidades e cones de rebaixamento ocasionados pela vazão dos poços. Adaptado de (FIRMIANO *et al.*, 2018).

Considerações Finais

A integração de ferramentas da computação científica, disponibilizadas pelo Projeto FEniCS, por complementos do QGIS e pela plataforma Eclipse, foram essenciais na geração de uma apropriada malha de elementos finitos visando a simulação de problemas hídricos que envolvem, por exemplo, o acoplamento entre as equações do fluxo subterrâneo e do transporte de contaminantes em aquíferos. Neste sentido, foi visto que a geocomputação possibilitou uma descrição computacional para simulação numérica de importantes sistemas hídricos naturais, tais como aquíferos freáticos, suas conectividades hidráulicas com a fronteira de bacias hidrográficas, seus rios interiores, represa e as curvas de rebaixamento observadas nos poços de monitoramento. Além disso, a possibilidade de integração da programação Python e softwares de georreferenciamento torna possível a aplicabilidade em outros problemas da engenharia.

Referências

- [1] BEAR, J., *Hydraulics of Groundwater*, New York, McGraw Hill, 2012.
- [2] CHESNAUX, R. *et al.*, Building a geodatabase for mapping hydrogeological features and 3D modeling of groundwater systems: Application to the Saguenay-Lac-St-Jean Region. Canada, *Computers & Geosciences*, 2011. DOI 10.1016/j.cageo.2011.04.013.
- [3] DIXON, B., UDDAMERI, V., *GIS and Geocomputation for Water Resource Science and Engineering*, Wiley Publishers AGU, 2015.



- [4] ECLIPSE, Python IDE for Eclipse. Disponível em <https://eclipse.org/>. Acesso em 2015.
- [5] FENICS, Fenics Project. Disponível em <https://fenicsproject.org/>. Acesso em 13/04/2018.
- [6] FIRMIANO, A., SANTOS, J.P.M., WENDLAND, E., Geoprocessamento de Bacia Hidrográfica e a Solução Automatizada do Fluxo em Aquífero Freático, In: Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, vol 6, n 1, 2018.
- [7] HUNTER, J.D., Matplotlib: A 2D graphics environment, *Computing In Science & Engineering*, v.9, n.3, pg. 90-95, 2007. DOI 10.1109/MCSE.2007.55. <https://matplotlib.org/>.
- [8] LOGG, A., *et al* Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, 2012, Springer, doi 10.1007/978-3-642-23099-8, ISBN 978-3-642-23098-1.
- [9] MESHPLY, Disponível em <https://mathematician.de/software/meshpy/>. Acesso em 13/04/2018.
- [10] QGIS, A Free and Open Source Geographic Information System, 2009. url = <http://qgis.osgeo.org>. Acesso em 13/04/2018.
- [11] STRASSBERG, G. *et al.*, *Arc Hydro Groundwater: GIS for Hydrogeology*, ESRI Incorp., 2011.
- [12] VAN DER WALT, S., COLBERT, S.C., VAROQUAUX, G. *The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation*, Computing in Science Engineering, 2011. vol 13, n 2.

A Informações Complementares

A geração de malhas para a resolução numérica da equação do fluxo linear, discutida neste trabalho, é utilizada em outro trabalho complementar intitulado **"Aplicação do Princípio da Superposição para o fluxo subterrâneo em aquífero confinado"**, que também foi submetido ao V ERMAC.

B Anexo

O código Python a seguir é utilizado para movimentar certos vértices da malha Dofin sobre as coordenadas XY de uma lista conhecida.

```
1 def MeshPassingToWellAsVertex(mesh,listaCoorX,listaCoorY):  
    coords=mesh.coordinates();  
3     tree = mesh.bounding_box_tree()  
    point_cloud = [ dolfin.Point(point) for point in mesh.coordinates() ]  
5     tree.build(point_cloud, 2)  
    p=Point(coorx[0],coory[0])  
7     p_i, distance = tree.compute_closest_point(p)  
    lengthCoor=np.shape(coords)[0]  
9     for i in range(len(coorx)):  
        p=Point(coorx[i],coory[i])  
11        p_i, distance = tree.compute_closest_point(p), print "p:", p.str()  
        print "closest coordinate point by reference to index",coords[p_i]  
13        print "closest point:", p_i, point_cloud[p_i].str()  
        coords[p_i][0]=coorx[i]; coords[p_i][1]=coory[i];  
15    return mesh
```