Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional
CMAC Nordeste 2012

ISSN 2317-3297

Propriedades topológicas da região de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos

Fabíolo M. Amaral, **Elaine dos Santos Dias**,
Departamento de Ensino, IFBA, Campus Eunápolis,
45820-000, Eunápolis, BA
E-mail: fabiolo@ifba.edu.br, elaine.santosd@hotmail.com,

Luis F. C. Alberto
Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo
13566-590, São Carlos, SP
E-mail: lfcalberto@usp.br.

Palavras-chave: *Sistemas discretos, Região de estabilidade, Fronteira da região de estabilidade*

Resumo: *Neste artigo, uma caracterização topológica da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade para uma classe de sistemas dinâmicos discretos é explorada. Para esta classe, demonstra-se que a fronteira da região de estabilidade é um conjunto invariante, aberto e conexo por caminho e a fronteira da região de estabilidade é um conjunto fechado e invariante.*

1 Introdução

Geralmente, os pontos fixos atrativos de sistemas dinâmicos discretos não-lineares não são globalmente atrativos. Logo, o problema de determinar a sua região de estabilidade(domínio de atração) é de fundamental importância na engenharia e em outras áreas da ciência (ver [2], [3] e [4]). Na verdade, este problema é antigo e ainda permanece sem solução para sistemas dinâmicos não-lineares gerais.

O estudo da caracterização topológica da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos não-lineares é o ponto de partida para compreendermos a região de estabilidade e consequentemente oferecermos um algoritmo conceitual que permita estimar de maneira ótima a região de estabilidade de sistemas discretos . Nesse sentido, o objetivo principal deste trabalho é explorar um resultado que envolve a caracterização topológica da região de estabilidade e de sua fronteira de sistemas dinâmicos discretos não-lineares.

2 Preliminares

Nesa seção, uma breve revisão dos conceitos envolvendo a teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos é apresentada.

Considere o sistema dinâmico discreto não-linear

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{1}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ e $f : M \to M$ é uma função definida em um espaço métrico (M, d).

Um ponto $x^* \in M$ é um ponto fixo de (1) se $f(x^*) = x^*$. Um ponto fixo x^* é um ponto fixo atrativo de (1) se existe $r > 0$ tal que

$$x \in B(x^*, r) = \{x \in M \ : \ d(x, x^*) < r\} \Rightarrow f^k(x) \to x^* \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

ISSN 2317-3297

Relativo a (1), ou a f, o conjunto $H \subset M$ é dito ser *positivamente* (*negativamente*) *invariante* se $f(H) \subset H (H \subset f(H))$. H é dito ser *invariante* se $f(H) = H$.

A região de estabilidade de um ponto fixo atrativo x^* de (1) é o conjunto

$$A(x^*) := \{x \in M \ : \ f^k(x) \to x^* \text{ quando } k \to +\infty\}$$

de todas as condições iniciais $x \in M$ cujas trajetórias se aproximam de x^* quando k tende para o infinito.

3 Resultados

Apresentaremos a seguir um teorema, cuja demonstração pode ser encontrado em [1], que é o objeto de estudo principal deste trabalho. Admitindo que f é um homeomorfismo em (1), o teorema fornece uma caracterização topológica completa da região de estabilidade e de sua fronteira, em outras palavras, ele garante que a região de estabilidade $A(x^*)$ de um ponto fixo atrativo x^* é um conjunto invariante, aberto e conexo por caminho. Além disso, conclui-se também que a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^*)$ é um conjunto invariante.

Teorema 1 *Seja x^* um ponto fixo atrativo de (1) e suponha que a função f é um homeomorfismo, então a região de estabilidade $A(x^*)$ é um conjunto:*

(i) *invariante*

(ii) *aberto*

(iii) *conexo por caminho*

e a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^*)$ é um conjunto:

(i) *fechado*

(ii) *invariante*

Referências

[1] J. P. LaSalle, "The Stability of Dynamical Systems", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1976.

[2] Y. Tongkui and Y. Jiefei and L. Honggang and L. Hongxi, Complex dynamics of industrial transferring in a credit-constrained economy, *Physics Procedia*, 3, 1677-1685, 2010.

[3] C. D. Vournas and N. G. Sakellaridis, Region of Attraction in a Power System with Discrete LTCs, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 53, 1610-1618, 2006.

[4] W. Wan-Xiong and Z. Yan-Bo and L. Chang-Zhong, Analysis of a discrete-time predator-prey system with Allee effect, *Ecological Complexity*, 8, 81-85, 2011.