

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP

**Departamento de Engenharia de Energia e
Automação Elétricas**

BT/PEA/9513

**Processos Auto-Adaptativos para
Cálculo de Campos Eletromagnéticos
pelo Método dos Elementos Finitos**

**Luiz Lebensztajn
José Roberto Cardoso**

São Paulo - 1995

O presente trabalho é um resumo da tese de doutorado apresentada por Luiz Lebensztajn, sob orientação do Prof. Dr. José Roberto Cardoso: "Processos Auto-Adaptativos para Cálculo de Campos Eletromagnéticos pelo Método dos Elementos Finitos", defendida em 18/08/95, na EPUSP.

A íntegra da tese encontra-se à disposição com o autor e na biblioteca de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica da USP.

Lebensztajn, Luiz

Processos auto-adaptativos para cálculo de campos eletromagnéticos pelo método dos elementos finitos / L. Lebensztajn, J.C. Cardoso. -- São Paulo : EPUSP, 1995.

p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas, BT/PEA/9513)

1. Campos eletromagnéticos 2. Elementos finitos - Aplicações I. Cardoso, José Roberto II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas III. Título IV. Série

CDU 537.811
519.60a

Processos Auto-Adaptativos para Cálculo de Campos Eletromagnéticos pelo Método dos Elementos Finitos

L.Lebensztajn, J.R.Cardoso
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Depto. de Eng^a. de Energia e Automação Elétricas
Av. Prof. Luciano Gualberto, Trav. 3, 158
tel.:(011)818-5309 fax:(011)818-5719
e-mail: leb@pea.usp.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar novos métodos para aumentar a precisão de cálculo em problemas de campos eletromagnéticos, utilizando o Método dos Elementos Finitos.

Assim, uma estratégia auto-adaptativa foi desenvolvida e quatro estimadores de erro foram propostos. O primeiro estimador usa o conceito de uma força magnetomotriz fictícia associada aos lados dos triângulos para avaliar o erro. Já o segundo é baseado no conceito do gradiente do campo no interior de cada elemento. O terceiro estimador associa o valor do erro à divergência do vetor densidade de fluxo. O quarto estimador faz uso do elemento bilinear para o cálculo do erro. O desempenho destes estimadores foi avaliado através do estudo de três casos testes. Comparações de natureza quantitativa e qualitativa mostraram que os métodos têm bom desempenho, associados a uma precisão e confiabilidade elevada. Sua aplicação é efetiva na solução de problemas de engenharia.

ABSTRACT

The aim of this work is to present new methods to improve accuracy in finite element electromagnetic field calculations.

A self-adaptive scheme was then developed and four error estimators were proposed. The first one deals with a fictitious magnetomotive force on the element sides, the second one is based on the gradient of the field, the third one estimates the flux density divergence and the fourth one determines the error estimator using bilinear elements. The performance of these estimators was evaluated by six case studies. Qualitative and quantitative comparisons have shown that all methods resulted in good performance, accuracy and reliability and their application to help solving engineering problems is promising.

1.Introdução

Assim como em todas as áreas da engenharia moderna, os processos computacionais vêm obtendo um espaço cada vez maior e relevante na área de resolução de campos eletromagnéticos, quer em sistemas de simulação, quer em sistemas do tipo CAD-CAE, que participam de forma determinante em processos modernos de projeto, como os de engenharia simultânea. Dentro destes processos, o fator confiabilidade do projeto é de extrema importância, na medida em que este vai significar um produto de maior qualidade, requisito cada vez mais importante nos tempos modernos.

No caso particular dos problemas de campos eletromagnéticos, a grande dificuldade que se encontra para a obtenção de uma solução numérica do problema de alta confiabilidade reside na não homogeneidade do domínio em estudo e por vezes nas não linearidades dos meios ferromagnéticos.

Historicamente, tentou-se diversos métodos que fossem capazes de contornar essas restrições, mas, certamente, poucos se adaptaram com tamanha eficácia como o Método dos Elementos Finitos.

No entanto, no Método dos Elementos Finitos, existe uma forte correlação entre a qualidade da malha de elementos finitos, usualmente fornecida pelo usuário e a confiabilidade dos resultados obtidos. Este problema foi diminuído inicialmente pela automação da geração de malhas, através de algoritmos como o de Delaunay. Desta forma, criar uma malha de elementos finitos deixou de ser uma tarefa árdua, mas a qualidade da resolução do problema ficou ainda fortemente ligada a capacidade do usuário do software, pois a geração automática de elementos utiliza apenas de critérios de natureza geométrica para a obtenção da malha de triângulos, ficando a cargo do usuário o conhecimento do fenômeno físico. A melhoria de um resultado poderia ser realizada através de um processo iterativo entre usuário e máquina, até que se obtivesse uma malha de elementos finitos adequada ao problema em estudo.

A intervenção do usuário para tornar a malha de elementos finitos mais conveniente para o problema dificilmente será realizada de uma forma sistematizada e quase que certamente uma boa malha de elementos finitos será obtida através do uso excessivo de elementos.

Exatamente para tornar a geração de malhas de elementos finitos um processo mais sistematizado e menos heurístico, começou-se a desenvolver as assim chamadas técnicas auto-adaptativas de geração de malhas [1]. O ponto de partida destas técnicas é a avaliação do valor do erro da solução por elementos finitos, para um posterior refinamento. Com isto aumenta-se de forma considerável a confiabilidade do Método dos Elementos Finitos, mesmo quando o usuário não possui forte experiência em métodos numéricos para solução de campos eletromagnéticos, uma vez que através das técnicas adaptativas pode-se sistematizar a divisão do domínio em elementos finitos de tal

forma que a malha torne-se mais densa nas regiões mais críticas como por exemplo aquelas onde se tem grandes gradientes de potencial ou grandes densidades de energia.

2. Os estimadores

Todos os três estimadores aqui propostos são associados a um problema magnetostático ligado a um modelo de elementos finitos, onde a variável de estado é o vetor potencial magnético. A extensão de qualquer um dos três estimadores para outros problemas de natureza estática é imediata.

O primeiro estimador de erro é baseado na divergência nula do vetor densidade de fluxo em cada ponto do domínio. A partir das funções de forma de primeira ordem, sendo o problema bidimensional, a divergência é automaticamente nula. No entanto, para fins de cálculo de erro, pode-se estimar o valor do vetor densidade de fluxo em cada vértice como sendo a média, ponderada ou não, dos vetores densidade de fluxo nos triângulos que contenham o nó em questão. Adotando-se para o vetor densidade de fluxo as mesmas funções de forma que para o potencial, é possível então determinar, para qualquer ponto do domínio o divergente deste vetor, que pode ser tomado como um estimador do erro da solução.

Já o segundo estimador de erro é baseado na teoria de interpolação polinomial. Segundo Dhatt e Touzot [2], o erro, em cada elemento, em uma aproximação por elementos finitos triangulares, de primeira ordem é proporcional à maior derivada segunda, em relação às coordenadas espaciais e ao quadrado do maior lado. Para o cálculo da derivada segunda, foi utilizado procedimento semelhante ao proposto por Fernandes[3]. Ao invés de calcular apenas a derivada segunda do potencial, esta também foi ponderada pelo maior lado ao quadrado.

Para problemas que apresentam mais de um meio, admitiu-se que o vetor densidade de fluxo apresente nas interfaces ao menos dois valores. Desta forma, para o cálculo do erro cometido na solução por elementos finitos em um triângulo, os valores da densidade de fluxo nos pontos nodais serão tomados como a média dos valores das densidades de fluxo nos triângulos que contém este ponto nodal e estão situados no mesmo meio ferromagnético.

Um terceiro método aqui proposto associa o erro cometido na solução por elementos finitos à força magnetomotriz ligada à descontinuidade do componente tangencial do vetor intensidade de campo magnético.

Ao se adotar o Método dos Elementos Finitos para a solução de problemas magnetostáticos, utilizando-se do vetor potencial magnético e de elementos de primeira ordem, observa-se que, entre elementos adjacentes, o componente normal do vetor

densidade de fluxo se mantém ao passo que o componente tangencial do vetor intensidade de campo magnético não se mantém.

Dessa forma, a lei circuital de Ampère não é repetida pela solução numérica do problema. Uma forma de se avaliar o erro desta solução é determinar uma corrente fictícia que passa a fluir no lado comum aos dois elementos. O valor desta corrente é igual ao produto do comprimento do lado comum pela diferença dos componentes tangenciais e também pode ser entendida como sendo uma força magnetomotriz fictícia associada à solução, que neste trabalho será denominada corrente amperiana.

Assim a cada lado de um triângulo pode ser associado um erro - a força magnetomotriz fictícia. Ao se realizar uma análise estatística destes erros, é possível realizar o refinamento da malha de elementos finitos

O estimador de erros baseado no elemento bilinear é baseado no seguinte conceito: dois elementos triangulares formam um quadrilátero e neste quadrilátero pode-se utilizar as funções de forma de um elemento bilinear para a avaliação do erro cometido na solução. Este erro pode ser posto na forma:

$$e = \int_{\Omega} (\vec{B}_{\text{calc}} - \vec{B}_{\text{est}}) d\Omega \quad (2.1)$$

onde:

- B_{calc} - densidade de fluxo calculada no elemento triangular;
- B_{est} - densidade de fluxo estimada pelo elemento bilinear;
- Ω - é o elemento bilinear.

A grande vantagem do uso do elemento bilinear está ligada ao fato de que em problemas eletromagnéticos, não há variações bruscas de campo. Este estimador está fortemente ligado a este conceito e assim propicia a criação de malhas de elementos finitos adequadas à análise de problemas eletromagnéticos.

3. Os casos testes

A eficácia de um processo auto-adaptativo de solução de um problema eletromagnético somente pode ser medida em casos onde a solução analítica do problema é conhecida ou em problemas onde a solução numérica já foi testada de forma exhaustiva por vários softwares de resolução de campos eletromagnéticos, ou em problemas de análise qualitativa imediata.

A partir deste ponto de vista, três casos testes foram analisados. O primeiro deles possui solução analítica através de transformações conformes. Trata-se de uma região

em forma de L , com potenciais magnéticos conhecidos nos segmentos que contém os ângulos retos A e B, conforme mostra a figura 1.. Nos outros dois segmentos a condição de contorno é de Neumann homogênea.

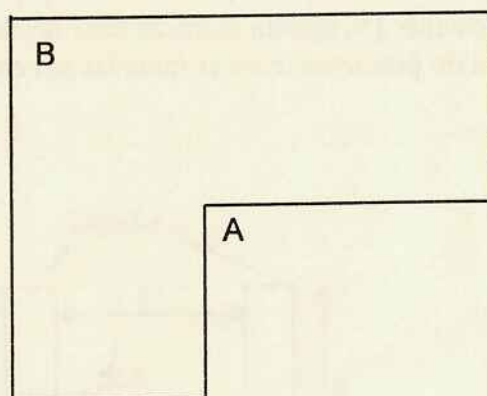


Figura 1 Região em forma de L

O segundo caso teste pode ser descrito como um domínio quadrado, onde uma placa quadrada de ferro é submetida a um campo magnético externo, onde se conhece o fluxo imposto por este campo.. Este problema é de particular interesse, pois apresenta duas peculiaridades: a descontinuidade vácuo-ferro e um ponto singular, que é denominado na figura 2 como ponto Z.

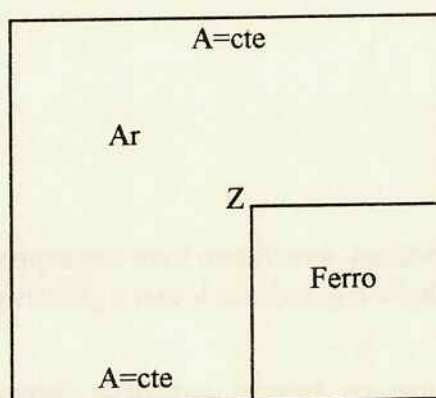


Figura 2 Segundo Caso Teste: Placa Imersa em Campo Magnético

Embora não possua uma solução analítica como o primeiro caso teste, este problema é adequado para a análise de desempenho de um estimador de erro e portanto do resultado final do processo auto-adaptativo, pois o domínio apresenta quatro regiões de comportamento bem distinto, quais sejam: a região próxima ao ponto singular, a

região a esquerda da placa de ferro, o bloco ferromagnético e finalmente a região superior do domínio que, embora apresente valores de densidade de fluxo reduzidos em módulo, mostra uma considerável variação de direção do vetor densidade de fluxo.

O terceiro caso foi proposto por Simkin [4], para o cálculo de forças de origem eletromagnética. Lowther [5] aponta técnicas para resolução deste problema. Na figura 3 tem-se a geometria do problema, com as medidas em centímetros.

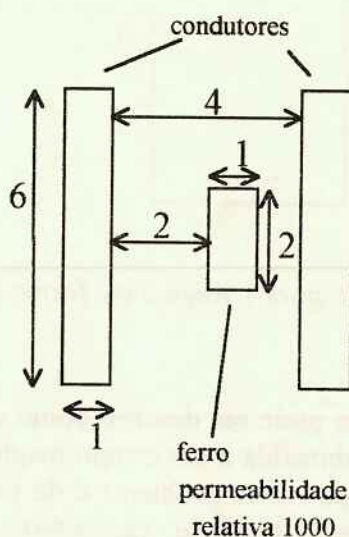


Figura 3 Geometria do Caso Teste 3

4. Resultados

Os quatro indicadores mostraram bom desempenho em relação à precisão e taxa de convergência em relação a grandezas locais e globais para os três casos analisados.

No primeiro caso os valores analíticos foram comparados com os obtidos numericamente e pode-se notar que em um número reduzido de iterações alcançou-se um resultado de boa precisão.

A figura 4 mostra o erro relativo do potencial ao longo do segmento AB, conforme mostra a figura 1 para o estimador baseado na descontinuidade do componente tangencial do vetor intensidade de campo magnético.

Os outros três estimadores de erro apresentaram um comportamento similar ao mostrado na figura 4, sendo que o estimador baseado no gradiente de campo apresenta erros maiores nas proximidades do ponto A da figura 1 e o estimador baseado no divergente da densidade de fluxo e o baseado no elemento bilinear apresentaram os menores erros nesta mesma região.

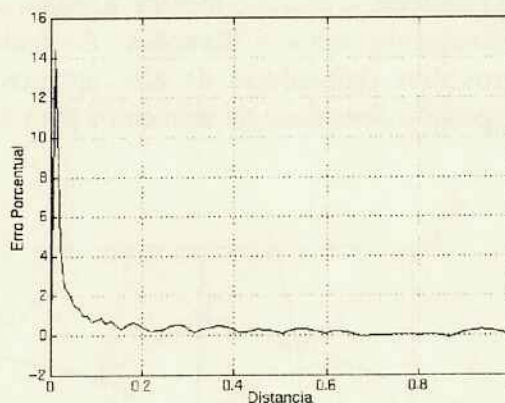


Figura 4 Erro Relativo Porcentual para o Caso Teste 1

A figura 5 mostra a distribuição de linhas de campo para o primeiro caso teste, utilizando o estimador de erro baseado no gradiente do campo.

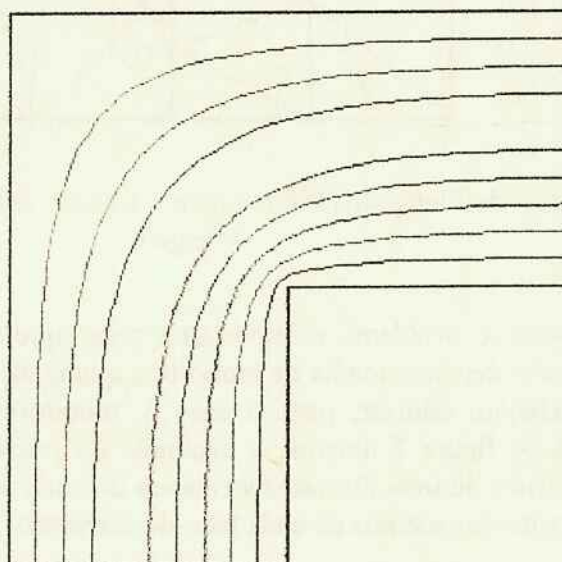


Figura 5 Distribuição de Linhas de Campo

O segundo caso aponta que os quatro indicadores têm uma boa capacidade de observação de pontos singulares e de tratamento de interfaces ferro-ar, pois os quatro dividiram o domínio em elementos de tal forma que o maior refinamento ocorresse na região próxima ao ponto singular do domínio. Tanto a região onde o campo é quase

uniforme, como a parte superior do domínio foram divididos de uma forma adequada, pois não houve uma grande divisão em elementos na porção esquerda do domínio e na parte superior gerou-se uma densidade de malha mais intensa próximo às porções onde o campo magnético apresenta variação de direção mais acentuada.

Para este problema, a figura 6 mostra a malha de elementos finitos obtida através do critério do divergente, após 5 iterações. As malhas de elementos finitos obtidas através dos outros dois estimadores de erro apresentaram as mesmas características, modificando-se apenas a densidade de elementos para cada caso particular.

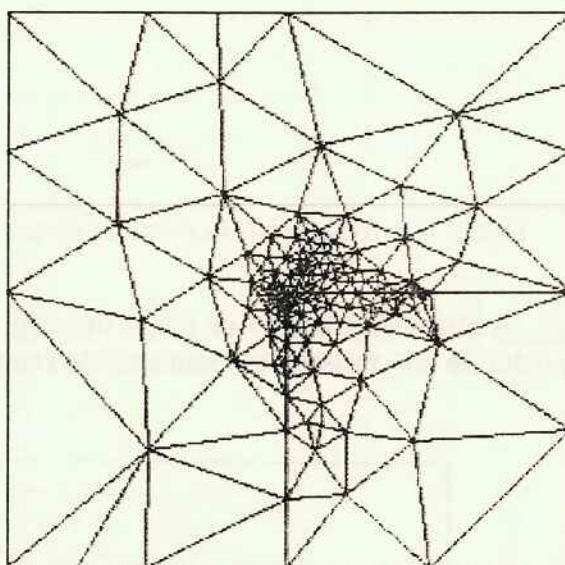


Figura 6 Malha de Elementos Finitos para o Caso 2, usando o esimador baseado no divergente

Neste mesmo problema é importante notar que a partir de uma malha pouco refinada pode-se obter uma malha de muito boa qualidade. Usando o estimador de erros baseado no elemento bilinear, para o caso 2, monitorou-se a energia em função do número de nós. A figura 7 mostra a evolução do processo, comparando-o com uma malha regular, fruto de uma divisão sistemática de cada elemento em quatro, através da interligação dos pontos médios de cada lado do elemento.

A partir da análise da figura 7, nota-se que a energia magnética armazenada calculada por um processo auto-adaptativo alcança um valor menor, com uma malha com um número reduzido de elementos e portanto de triângulos.

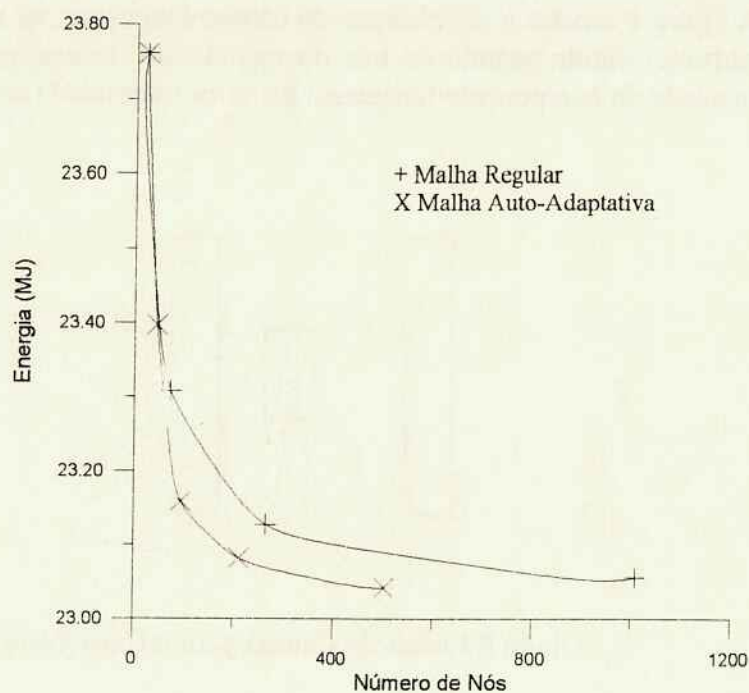


Figura 7 Evolução da Energia em função do Número de Nós

Malha Auto-Adaptativa e Malha Regular

No terceiro, o certamente o mais delicado dos três casos, obteve-se bons resultados para a força calculada, através do princípio do trabalho virtual. A tabela 1 mostra os valores obtidos e o desvio em relação ao valor obtido por Lowther em [5].

Tabela 1 Quadro comparativo entre os estimadores de erro

Método	$F_x(N)$	Pontos	Iterações	Desvio (%)
Divergente	6280	2892	6	2.1
Gradiente	6170	3010	8	0.3
Amperianas	6130	1445	7	0.3
Bilinear	6158	2215	6	0.2

Os valores obtidos para a força nos três estimadores analisados apresentaram desvios compatíveis, pois as regiões próximas aos cantos da peça ferromagnética foram fortemente discretizadas uma vez que nessas regiões a variação da direção do vetor densidade de fluxo é intensa [6]. O pior desempenho é o do método do divergente, que embora refine fortemente a interface ferro-ar, não faz uma boa discretização do que se pode denominar segunda camada de elementos, resultando em um valor para a força com um desvio maior.

A figura 8 mostra a distribuição de campo magnético na região próxima à peça ferromagnética, obtida quando do uso do método do estimador de erros baseado na descontinuidade do componente tangencial do vetor intensidade de campo magnético.

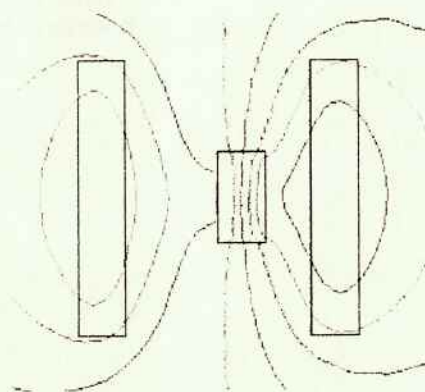


Figura 8 Linhas de Campo para o Caso Teste 3

Para o mesmo problema, a malha obtida para o estimador baseado em um elemento bilinear pode ser vista na figura 9, onde se observa que há um adensamento de elementos nos quatro cantos da peça ferromagnética, seguido de um gradual aumento nas áreas dos elementos, a medida que se afasta da peça. Além disto, nota-se que os condutores também foram bem divididos em elementos.

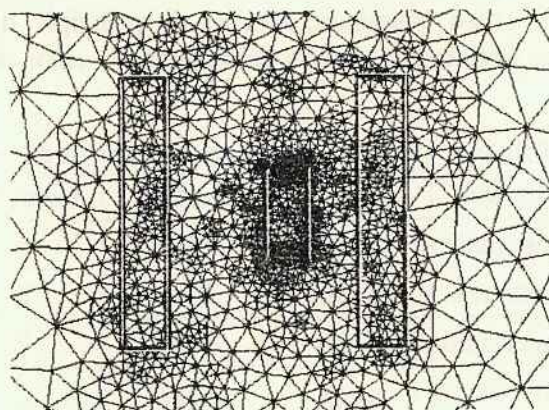


Figura 9 Malha de Elementos Finitos para o Caso 3, usando o estimador baseado no elemento bilinear

Estas características da malha, resultante da ação do processo auto-adaptativo baseado no elemento bilinear, também são observadas nas malhas resultantes dos

processos auto-adaptativos baseados nos estimadores baseados no gradiente de campo e nas correntes amperianas.

Os três casos teste aqui analisados são lineares, mas os três estimadores se mostraram efetivos também na análise de casos onde a não linearidade dos materiais ferromagnéticos estivessem presentes[7].

5.Conclusões

Os quatro estimadores aqui apresentados se mostraram eficazes para os três casos testes aqui apresentados. A taxa de convergência, o número de pontos da malha e o erro na solução foram diferentes para cada estimador, mas fica patente que os processos adaptativos baseados nestes estimadores são eficientes, pois conseguem produzir uma solução numérica de alta confiabilidade, uma vez que a malha de elementos finitos é adequada ao fenômeno físico em estudo.

REFERÊNCIAS

- [1]Raizer, A. **Maillage Auto-Adaptatif dans les Logiciels de Calcul du Champ Electromagnetique Bidimensionnel et Tridimensionnel**. Grenoble ,1991.
These (Doctorat) - Institut National Polytechnique de Grenoble .
- [2] Dhatt, G.;Touzot, G. **Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis** 2.ed
Paris. Pasteur, 1984.
- [3] Fernandes, P. et alli Local Error Estimates for Adaptive Mesh refinement **IEEE Transactions on Magnetics**, v.24,n.1, p.209 -302, Jan. 1988 .
- [4] Simkin, J. Recent Developments in Field and Force Computation **Journal de Physique**. v.45, n.1, p851-860, jan.1984.
- [5] Lowther, D.A., Rong, R.,Forghani,B. Field Smoothing and Adaptative Mesh Generation **IEEE Transactions on Magnetics** ,v.29,n.2, p. 1890-1893,
mar 1993

- [6] Lebensztajn, L. **Processos auto-adaptativos de solução de campos eletromagnéticos pelo método dos elementos finitos**. São Paulo, 1995. 146p.
Tese (Doutorado) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo
- [7] Lebensztajn, L. , Cardoso, J.R. Linear and Nonlinear Self Adaptive Finite Element Field Calculation In : Midwest Symposium on Circuits and Systems, 38.- Rio de Janeiro, 1995 / No prelo/.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PEA/9301 - Alguns Aspectos do Problema de Planejamento de Sistemas de Transmissão sob Incertezas - CARLOS MARCIO VIEIRA TAHAN, ERNESTO JOÃO ROBBA
- BT/PEA/9302 - Vibrações em Motores Elétricos Provocadas por Forças Magnéticas - ORLANDO SILVIO LOBOSCO , HENRIQUE PRADO ALVAREZ
- BT/PEA/9303 - Corrente Contínua em Alta Tensão: Aplicação de Equipamentos Elétricos e Modelos para Análises de Confiabilidade - LINEU BELICO DOS REIS
- BT/PEA/9504 - Automação e Informatização Aplicadas a Controle e Supervisão de Processos de Pesagem - EVALDO ARAGÃO FARQUI, EDUARDO MÁRIO DIAS
- BT/PEA/9505 - Modernização e Reabilitação de Usinas Hidrelétricas - DJALMA CASELATO, ADERBAL DE ARRUDA PENTEADO JR.
- BT/PEA/9506 - Estudo do Campo Elétrico Provocado por Linhas de Transmissão em Corrente Alternada - CELSO PEREIRA BRAZ, JOSÉ ANTONIO JARDINI
- BT/PEA/9507 - Aspectos Sobre Processos Automatizados de Pesagem Rodoferroviária: Uma Proposta de Modernização de Postos em Operação - SERGIO LUIZ PEREIRA, CÍCERO COUTO DE MORAES
- BT/PEA/9508 - Usinas Hidrelétricas em Rotação Ajustável: Novas Premissas para o Planejamento Energético - MARCO ANTONIO SAIDEL, LINEU BELICO DOS REIS
- BT/PEA/9509 - Desenvolvimento de um Sistema de Automação de Subestações pela integração de Módulos de Software e Hardware Existentes no Mercado Brasileiro - L. C. MAGRINI, J. A. JARDINI, S. COPELIOVITCH, N. KABA FILHO
- BT/PEA/9510 - Proposta de um Modelo para Estudos de Aplicação de Compensadores Estáticos em Sistemas de Potência - JOSÉ TOSHIYUKI HONDA, LUIS CERA ZANETTA JÚNIOR
- BT/PEA/9511 - Metodologia e Testes para Redução das Distâncias Elétricas entre Fases de Barramentos de Subestações de 138kV Abridadas, ANDRÉ NUNES SOUZA, ORLANDO SILVIO LOBOSCO
- BT/PEA/9512 - Avaliação da Severidade da Poluição para o Dimensionamento da Isolação das Redes Elétricas - ARNALDO G. KANASHIRO, GERALDO F. BURANI