



Escola Politécnica - EPBC



31200053427

BT/PEF-9010

CORPOS HIPERELÁSTICOS HOMOGÊNEOS TRANSVERSALMENTE
ISOTRÓPICOS NÃO ORTOTRÓPICOS

Nelson Achcar
Professor Doutor
(recebido em 26/11/90)

EDITOR CHEFE

L.A.C.Diogo

COMISSÃO EDITORIAL

- | | |
|---|----------------|
| - Dinâmica e Estabilidade das Estruturas | C.E.N.Mazzilli |
| - Engenharia de Solos | W.Hachich |
| - Estruturas de Concreto, Metálicas, de Madeira | P.B.Fusco |
| - Interação Solo-Estrutura | C.E.M.Maffei |
| - Mecânica Aplicada | P.M.Pimenta |
| - Métodos Numéricos | J.C.André |
| - Pontes e Grandes Estruturas | D.Zagottis |
| - Teoria das Estruturas | V.M.Souza Lima |

810439

CORPOS HIPERELÁSTICOS HOMOGÊNEOS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS NÃO ORTOTRÓPICOS

NELSON ACHCAR - EPUSP, 1990

Para se descrever matematicamente o comportamento de um corpo elástico homogêneo é preciso conhecer sua função resposta, isto é, a função $\hat{T}$ tal que

$$T = \hat{T}(F) \quad (1)$$

onde T é a tensão de Cauchy e F é o gradiente da deformação imposta ao corpo.

Se o corpo for hiperelástico então existe $\Sigma : P_{sym} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$T = \frac{2}{\det F} F(\nabla \Sigma)_C F^T \quad (2)$$

onde $C = F^T F$ e $(\nabla \Sigma)_C$ é o gradiente de Σ em C . Σ é chamada **forma reduzida da densidade de energia de deformação**.

Um problema central é determinar as restrições impostas a Σ pela simetria material do corpo. Esta simetria é dada por seu **grupo de isotropia** $\mathcal{G}$ que, no caso dos corpos sólidos, é constituído pelas $Q \in Orth$ tais que

$$\Sigma(Q^T C Q) = \Sigma(C) \quad \forall C \in P_{sym}. \quad (3)$$

Rivlin e Ericksen, em [2], demonstram um teorema de representação para a função Σ de corpos **transversalmente isotrópicos**. Segundo a definição destes autores, "um corpo tem isotropia transversal" se seu grupo de isotropia contiver todas as rotações em torno de um eixo fixo e , além delas, as reflexões em relação a planos que contêm este eixo. Demonstra-se que estes corpos são **ortotrópicos**, isto é, seus grupos de isotropia contêm reflexões em relação a três planos mutuamente ortogonais. Devido a isso chamaremos de **corpos transversalmente isotrópicos ortotrópicos (t.i.o.)** aqueles corpos para os quais

$$\mathcal{G} \supset \{R_k^\varphi \mid \varphi \in \mathbf{R}\} \cup \{-R_e^\pi \mid e \perp k\} \quad (4)$$

onde k é um versor fixo, R_k^φ é a rotação vetorial de "eixo" k e ângulo φ orientada pela regra da mão direita e $-R_\epsilon^\pi$ é a reflexão em relação ao plano normal a ϵ .

Como $\mathcal{G} = \{-1, 1\}\mathcal{G}_+$, onde $\mathcal{G}_+ = \mathcal{G} \cap Orth^+$, então é fácil ver que as rotações R_ϵ^π , com $\epsilon \perp k$, também estão em $\mathcal{G}_+$. Entretanto, isto contraria a definição de Truesdel e Noll [3], p.82, segundo a qual corpo transversalmente isotrópico é aquele para o qual $\mathcal{G}_+$ é constituído exclusivamente das rotações R_k^φ . Estes corpos não são ortotrópicos e serão aqui chamados de **transversalmente isotrópicos não ortotrópicos (t.i.n.o.)**.

Em [1] demonstramos um teorema de representação para a função Σ de um corpo t.i.n.o. Precisamente, foi demonstrado o seguinte

Teorema 1. Sejam k unitário e $\Sigma : P_{sym} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que

$$\Sigma(R_k^{-\varphi} C R_k^\varphi) = \Sigma(C) \quad \forall C \in P_{sym} \quad (5)$$

então existe $\tilde{\Sigma} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Sigma(C) = \tilde{\Sigma}(I_C II_C III_C IV_C V_C VI_C) \quad (6)$$

onde

$$I_C = \text{tr} C, \quad II_C = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 C - \text{tr} C^2), \quad III_C = \det C,$$

$$IV_C = \|\pi C(k)\|^2, \quad \text{onde } \pi : V^3 \rightarrow V^3 \text{ é a projeção ortogonal sobre o plano normal a } k,$$

$$V_C = C(k).k, \quad VI_C = C^2(k).k \wedge C(k)$$

$$\text{e } \mathcal{D} = \{(I_C II_C III_C IV_C V_C VI_C) \mid C \in P_{sym}\}.$$

A demonstração é uma generalização da que foi feita por Ericksen e Rivlin em teorema análogo para corpos t.i.o. em [2]. Uma qualidade presente no teorema 1, inédita no teorema análogo de Rivlin e Ericksen, é a expressão intrínseca dos invariantes I a VI . Isto, além de esclarecer a natureza geométrica dos invariantes, facilita a derivação e, em consequência, a obtenção das equações constitutivas. Temos assim os corolários:

Corolário 1. Seja $\hat{T}$ a função resposta de um corpo hiperelástico homogêneo compressível t.i.n.o. de eixo k . Então

$$\begin{aligned} \hat{T}(F) = \frac{2}{\det F} \{ & (\frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial III} III + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial II} II) \mathbf{1} + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial I} B \\ & - III \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial II} B^{-1} + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial IV} L + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial V} M + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial VI} N \} \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\tilde{\Sigma}$ é a função do teorema 1,

$$B = F^T F,$$

$$L = F(k) \otimes F \pi C(k) + F \pi C(k) \otimes F(k),$$

$$M = F(k) \otimes F(k),$$

$$N = \frac{1}{2} F(A + A^T) F^T,$$

onde

$$A = C(k) \otimes k \wedge C(k) + k \otimes C(k \wedge C(k) + k \otimes C^2(k) \wedge k.$$

([1], p.58).

Corolário 2. Seja T a tensão de Cauchy num corpo hiperelástico homogêneo incompressível t.i.n.o. Então

$$T = -p \mathbf{1} + 2 \{ \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial I} B - \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial II} B^{-1} + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial IV} L + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial V} M + \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial VI} N \} \quad (8)$$

([1], p.59).

Aplicações

Enquanto nos corpos hiperelásticos homogêneos t.i.o. a função Σ é da forma

$$\Sigma(C) = \tilde{\Sigma}(I \ II \ III \ IV \ V) \quad (9)$$

[2], nos não ortotrópicos, é da forma (6). Portanto, é o invariante VI que distingue os dois casos. A diferença nas equações constitutivas é a presença, para os corpos t.i.n.o, da

parcela $\frac{2}{\det F} F(A+A^T)F^T$ no caso compressível e $2F(A+A^T)F^T$ no caso incompressível. Portanto, olhando as expressões de VI e A podemos verificar se há diferença entre os comportamentos mecânicos dos corpos t.i.o. e t.i.n.o. quando submetidos a uma dada deformação. Fazendo isso concluímos que:

- 1) Corpos t.i.o. e t.i.n.o. de eixo k não se distinguem quando submetidos a uma extensão na direção de k , ou a um cisalhamento num plano perpendicular a k ou ainda a uma flexão cujo vetor momento fletor é paralelo a k ;
- 2) quando submetidos a um cisalhamento num plano paralelo a k , os corpos t.i.n.o. de eixo k apresentam uma tensão de cisalhamento no plano normal ao plano do cisalhamento, inexistente nos corpos t.i.o.;
- 3) a torção num cilindro de eixo paralelo a k não é controlável quando o material for incompressível t.i.n.o. de eixo k enquanto que para materiais t.i.o. de eixo k esta deformação é controlável.

([1] p.61 e seguintes.)

Notações.

$$P_{sym} = \{T : V^3 \rightarrow V^3 \mid T \text{ é linear e } Tv \cdot v > 0 \quad \forall v \neq 0\}$$

$$Orth = \{Q : V^3 \rightarrow V^3 \mid Q^T = Q^{-1}\}$$

$$Orth^+ = \{Q \in Orth \mid \det Q > 0\}$$

Bibliografia

- [1] Achcar, N. *Corpos transversalmente isotrópicos não ortotrópicos*. Tese de doutoramento. EPUSP, 1990.
- [2] Ericksen, J.L. e Rivlin, R.S. *Large Elastic Deformation of Homogeneous Anisotropic Materials*. J. Rat. Mech. Anal., 1954.
- [3] Truesdell, C. e Noll, W. *The Non Linear Field Theories of Mechanics*. Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

