O Teorema de Ax-Kochen e suas Implicaçõees na Lógica Matemática e Álgebra

Jéssica Duarte Severino *
Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil
Kaique Matias de Andrade Roberto†
Faculdade Einstein, São Paulo, Brasil
Hugo Luiz Mariano ‡
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

Palavras-chave: Teorema de Ax-Kochen, Teoria dos Modelos, Teoria dos Corpos Valorados.

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais relativos à compreensãoo do Teorema de Ax-Kochen –também conhecido como Teorema de Ax-Kochen-Ershov– e suas principais aplicações na Lógica Matemática e na Álgebra.

Nesse sentido, analisamos como o Teorema de Ax-Kochen [3], o qual define, para cada grau d, um número limite n_d. Se um primo p é maior ou igual a n_d, então corpo $\mathbb{Q}_p$ satisfaz a condição de ser $C_2(d)$. Basicamente, isso significa que qualquer polinômio homogêneo de grau d, quando tem mais variáveis do que d^2, tem pelo menos uma solução não trivial em $\mathbb{Q}_p$.

No contexto da lógica matemática, a demonstração do Teorema de Ax-Kochen faz uso de técnicas importantes da Teoria dos Modelos como eliminação de quantificadores, decidibilidade e modelo completude no contexto da análise de sentenças que envolvem expressões polinomiais: [4]. Ademais, a noção de corpos $\mathbb{Q}_p$ é central em diversos ramos da lógica aplicada à teoria dos números, já que permite analisar estruturas p-ádicas e comparar fenômenos locais e globais em equações diofantinas.

Do ponto de vista algébrico, a condição $C_2(d)$ exibida por $\mathbb{Q}_p$ (para p suficientemente grande) está em conexão com o estudo de formas quadráticas, conectando-se ao estudo de cohomologia de Galois e propriedades de corpos: [1], [7], [9], [5]. Esses resultados mostram como certas equações podem ou não ter soluções em corpos locais, trazendo implicações profundas para anéis de Witt, formas quadráticas e outras construções na teoria de corpos: [10], [8].

Em síntese, o Teorema de Ax-Kochen se localiza na interseção de vários tópicos e aplicações entre áreas como teoria dos números, teoria dos modelos, geometria algébrica e teoria algébrica de formas quadráticas, servindo de inspiração para potenciais pesquisas em temas emergentes, como a cohomologia de Galois para teorias abstratas de formas quadráticas: [6], [2], [11], [12].

Referências

[1] Arason, J.; Elman R., Jacob B., On quadratic forms and Galois cohomology. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 19(3):575–588, 1989.

[2] Astier, V., Some model-theoretic results in the algebraic theory of quadratic forms. *Annals of Pure and Applied Logic*, 112(2-3):189–223, 2001.

*jessicaduarte4@usp.br
†kaique.roberto@alumni.usp.br
‡hugomar@ime.usp.br

[3] Ax, J.; Kochen S., Diophantine problems over local fields I., *American Journal of Mathematics*, 87:605-630, 1965.

[4] Chang, C. C.; Keisler, H. J., Model theory, volume 73. Elsevier, 1990.

[5] Chebolu, S. K.; Efrat, I; Minác, J., Quotients of absolute Galois groups which determine the entire Galois cohomology. *Mathematische Annalen*, 352(1):205–221, 2012.

[6] Dickmann, M.; Miraglia, F., Special groups: Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms. Number 689 in Memoirs AMS. American Mathematical Society, 2000.

[7] Efrat, I.; Minác, J., Galois groups and cohomological functors. *Transactions of AMS*, 369(4):2697–2720, 2017.

[8] Lam, T. Y., Orderings, valuations and quadratic forms, volume 52. American Mathematical Soc., 1983.

[9] Minác, J.; Spira, M., Witt rings and Galois groups. *Annals of Mathematics*, 144(1):35–60, 1996.

[10] Pfister, A., Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology. London Mathematical Society, LNS 217, 1995.

[11] Ribeiro, H. R. O.,. Anel de Witt para semigrupos reais, envoltória von Neumann e B-pares. PhD thesis, Universidade de São Paulo, Brazil, 2021.

[12] Roberto, K. M. A.; Mariano, H. L., The Galois group of a Special Group. *arxiv preprint* 2404.03785, 2024.