

RT-MAP-8006

MEDIDA E INTEGRAÇÃO
Cap.II - ESPAÇOS L_p

Ivan de Queiroz Barros

OUTUBRO 1980

INDICE DO CAPITULO II

- §1 - Integral de funções complexas
 μ -integráveis
- §2 - Espaços L_p
- §3 - Dual de L_p
- §4 - Exercícios.

INDICE DOS TEOREMAS

TEOREMA 9	(L_p é completo)	2.2.8
TEOREMA 10	(Dual de L_p , $1 < p < \infty$)	2.3.2
TEOREMA 11	(Dual de L_1)	2.3.4

INDICE DAS DEFINIÇÕES

Espaços	L_p	2.2.1
	L_p	2.2.11
Integral	de função complexa	2.1.6
Função	μ -integrável	2.1.4
	μ -mensurável	2.1.2
	simples complexa	2.1.10
	sinusoidal	2.1.1

Capítulo II

ESPAÇOS L_p

§ 2.1 - Integral de funções complexas μ -integráveis

2.1.1 Definição

Definimos $\operatorname{sgn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ \frac{z}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$$

Valem as propriedades:

$$z = \operatorname{sgn} z |z|, \quad |z| = \operatorname{sgn} \bar{z} \cdot z, \quad \operatorname{sgn} z \cdot \operatorname{sgn} \bar{z} = 1 \text{ se } z \neq 0$$

2.1.2 Definição

Seja μ medida em (X, β) e f função definida em X com valores em $\mathbb{C}$. Dizemos que f é μ -mensurável se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são μ -mensuráveis.

2.1.3 Propriedades

- (1) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mensurável.
Então $|f|$ e $\operatorname{sgn} f$ são μ -mensuráveis.

(2) Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mens.
Então $f+g$ e fg são μ -mens.

(3) Sejam $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mens. e $f_n \rightarrow f$ μ -q.s.
Então f é μ -mens.

Prova

$$(1) |f| = [(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2]^{1/2}$$

$$(2) f+g = (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) + i(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$$

$$fg = (\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} g - \operatorname{Im} f \cdot \operatorname{Im} g) + \\ + i(\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Im} g + \operatorname{Im} f \cdot \operatorname{Re} g).$$

$$(3) f_n \rightarrow f \iff (\operatorname{Re} f_n \rightarrow \operatorname{Re} f) \text{ e } (\operatorname{Im} f_n \rightarrow \operatorname{Im} f).$$

2.1.4 Definição

Seja f definida μ -q.s. em X com valores em $\mathbb{C}$. Dizemos que f é μ -integrável se f é μ -mensurável e

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

2.1.5 Observação

f é μ -integrável se e só se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são μ -integráveis pois $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$, $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$ e $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

2.1.6 Definição

Seja $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, μ -integrável e $E \in \beta$.
 Definimos integral de f sobre E por

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu.$$

2.1.7 Observação

A definição 2.1.5 estende a definição de integral de funções μ -integráveis a valores reais.

2.1.8 Propriedades

Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integráveis e $E \in \beta$. Então:

(1) A medida μ em $\{x: f(x) \neq 0\}$ é σ -finita.

(2) As funções complexas μ -integráveis formam um espaço vetorial sobre o corpo complexo: $\mathcal{L}_1(X, \beta, \mu)$.

(3) A aplicação $I: \mathcal{L}_1(X, \beta, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $I(h) = \int_E h d\mu$ é linear.

(4) Se $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ é μ -mensurável e $|h| \leq g$, μ -q.s., então h é μ -integrável.

$$(5) \quad \left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

(6) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Prova

(1) a (4) não oferecem dificuldade.

(5) Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\left| \int_E f \, d\mu \right| = e^{i\theta} \int_E f \, d\mu$.

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \int_E e^{i\theta} \operatorname{sgn} f |f| \, d\mu = \\ &= \int_E \operatorname{Re}(e^{i\theta} \operatorname{sgn} f) |f| \, d\mu + i \int_E \operatorname{Im}(e^{i\theta} \operatorname{sgn} f) |f| \, d\mu = \\ &= \int_E \operatorname{Re}(e^{i\theta} \operatorname{sgn} f) |f| \, d\mu \leq \int_E |e^{i\theta} \operatorname{sgn} f| |f| \, d\mu \leq \\ &\leq \int_E |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

(6) Como f μ -integrável implica $|f|$ μ -integrável o resultado segue do correspondente para o caso real.

2.1.9 TEOREMA 5A (Convergência dominada).

Seja $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrável.

Sejam f_n , $n=1, 2, \dots$, funções complexas, μ -mensuráveis tais que $|f_n| \leq g$ μ -q.s.

e $f_n \rightarrow f$ μ -q.s.

Então f_n e f são μ -integráveis e

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \beta.$$

Prova

Como $|f_n| \leq g$ μ -q.s., as f_n são μ -integráveis. Como $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., f é μ -mens. Por passagem ao limite temos $|f| \leq g$ μ -q.s., donde f é μ -integrável.

Então $|f_n - f|$ são μ -integráveis e

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \quad \mu\text{-q.s.}$$

Pela versão real do Teorema da convergência dominada temos.

$$\int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

$$\text{Como } \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu$$

$$\text{resulta } \int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu. \quad \text{c.q.d.}$$

2.1.10 Definição

Dizemos que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ é função simples se é definida por

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, E_k \in \beta \text{ disjuntos.}$$

É uma função μ -mensurável.

§ 2.2 . Espaços L_p

2.2.1 Definição

Seja μ medida em (X, β) , $\mu(X) > 0$
e $1 \leq p \leq \infty$, $p \in \mathbb{R}$.

Definimos $\mathcal{L}_p = L_p(X, \beta, \mu)$ como o conjunto
das funções f complexas, definidas em X ,
 μ -mensuráveis tais que:

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \quad \text{nos casos } 1 \leq p < \infty$$

$$\text{ess. sup}_X |f| < \infty \quad \text{no caso } p = \infty$$

Definimos $\| \cdot \|_p : \mathcal{L}_p \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess. sup}_X |f|$$

2.2.2 Lema (Desigualdade de Clarkson)

Sejam $a, b, p \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \geq 1$
Então:

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p) \quad \text{para } p \geq 1$$

$$\sqrt{a+b} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$a+b \leq (a + 2\sqrt{ab} + b)$$

Prova

Para $p=1$ é trivial. Seja $p>1$.
Então $x=a$ é ponto de máximo da
função h definida por:

$$h(x) = (a+x)^p - 2^{p-1}(a^p + x^p)$$

$$\text{Logo } (a+b)^p - 2^{p-1}(a^p + b^p) \leq (2a)^p - 2^{p-1}(2a^p) = 0$$

c.q.d.

2.2.3 Proposição

L_p , $1 \leq p \leq \infty$ é espaço vetorial sobre
o corpo complexo.

Prova

Imediata considerando-se o lema 2.2.2.

2.2.4 Lema (Desigualdade de Young)

Sejam $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$
 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{Então } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e vale a igualdade se e só se $a^p = b^q$.

Prova

Se $a=0$ é trivial.

Seja $a > 0$.

a função $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(b) = ab - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}$$

possue um único ponto de máximo em $b = a^{\frac{1}{q-1}}$ e nesse ponto $h(a^{\frac{1}{q-1}}) = 0$.
Portanto

$$h(b) = ab - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q} \leq 0$$

e $h(b) = 0$ se e só se $b = a^{\frac{1}{q-1}}$ isto é $a^p = b^q$.
c.q.d.

2.2.5 Proposição (Desigualdade de Hölder)

Seja $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
e $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$.

Então $fg \in \mathcal{L}_1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Além disso:

a) Se $p = \infty$ (e portanto $q = 1$) temos igualdade se e só se

$$|f| = \|f\|_\infty \quad \mu\text{-q.s. em } \{x: g(x) \neq 0\}$$

b) Se $1 < p < \infty$ (e portanto $1 < q < \infty$) temos igualdade se e só se

$$\|g\|_q^q |f|^p = \|f\|_p^p |g|^q \quad \mu\text{-q.s.}$$

Prova

Caso : $(p=0, q=1)$

De $|fg| \leq \|f\|_\infty |g|$ μ -q.s. vem $fg \in L_1$.

Por integração resulta:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_\infty \int_X |g| d\mu$$

isto é: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

Como $\|f\|_\infty |g| - |fg| \geq 0$ μ -q.s. temos

$$\int_X (\|f\|_\infty |g| - |fg|) d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_\infty |g| - |f||g| = 0 \quad \mu\text{-q.s.} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f| = \|f\|_\infty \quad \mu\text{-q.s. em } \{x: g(x) \neq 0\}.$$

Caso: $(1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

i) Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ a verificação é trivial.

ii) Sejam $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$.
Aplicando o lema de Young a

$$a = \frac{|f(t)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(t)|}{\|g\|_q}, \quad \text{obtemos}$$

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(t)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(t)|^q}{q \|g\|_q^q} \quad \mu\text{-q.s.}$$

e portanto $fg \in \mathcal{L}_1$.
Por integração obtemos:

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

isto é' $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ é' o mesmo que

$$\int_X \left(\frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q} - \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \right) d\mu = 0$$

Como a função integranda é' não negativa μ -q.s. podemos escrever:

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right) \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q \quad \mu\text{-q.s.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \quad \mu\text{-q.s.}$$

A última equivalência decorre da condição de igualdade no lema de Young
c.q.d.

2.2.6 Proposição (Desigualdade de Minkowski)

Seja $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L_p$.

Então:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Além disso:

a) Se $p=1$ temos igualdade se e só se

$$\operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} \bar{g}(x) \in \{0, 1\} \quad \mu\text{-q.s.}$$

(b) Se $1 < p < \infty$ temos igualdade se e só se

$$\|g\|_p f = \|f\|_p g \quad \mu\text{-q.s.}$$

Prova

Caso $p = \infty$

A verificação da desigualdade é trivial.

Caso $p = 1$

A verificação da desigualdade é trivial.

Consideremos a igualdade.

Como $|f(x)| + |g(x)| - |f(x) + g(x)| \geq 0 \quad \mu\text{-q.s.}$

temos:

$$\int_X (|f| + |g| - |f+g|) d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \quad \mu\text{-q.s.} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0 \text{ ou } g(x)=0 \text{ ou } \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x) \quad \mu\text{-q.s.} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} \bar{g}(x) \in \{0, 1\} \quad \mu\text{-q.s.}$$

Caso $1 < p < \infty$

i) Se $\|f+g\|_p = 0$ a desigualdade é trivial.

Seja $\|f+g\|_p \neq 0$.

Como $h \in \mathcal{L}_p \Rightarrow h^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ podemos escrever

$$\|f+g\|_p^p = \|(f+g)^p\|_1 = \|f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}\|_1 \leq$$

$$\stackrel{①}{\leq} \|f(f+g)^{p-1}\|_1 + \|g(f+g)^{p-1}\|_1 \leq$$

$$\stackrel{②}{\leq} \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Donde $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

ii) Provemos agora que $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ implica $\|g\|_p f = \|f\|_p g$ μ -q.s.

Seja então $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_p = 0$ então $\|g\|_p f = \|f\|_p g$ μ -q.s. e a implicação é trivial.

Seja $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_p \neq 0$ o que acarreta $\|f+g\|_p \neq 0$ pela hipótese inicial. que $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

Esta mesma hipótese faz com que em ① e ② tenhamos igualdades. De acordo com o caso ($p=1$) já demonstrado e com a proposição 2.2.5 estas igualdades implicam:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(f(f+g)^{p-1}) \operatorname{sgn}(\bar{g}(\bar{f}+\bar{g})^{p-1}) \in \{0,1\} & \mu\text{-q.s.} \\ \| (f+g)^{p-1} \|_q^q |f|^p = \|f\|_p^p |f+g|^{(p-1)q} & \mu\text{-q.s.} \\ \| (f+g)^{p-1} \|_q^q |g|^p = \|g\|_p^p |f+g|^{(p-1)q} & \mu\text{-q.s.} \end{cases}$$

Simplificando temos:

$$(1) \operatorname{sgn} f \operatorname{sgn} \bar{g} \operatorname{sgn} (f+g)^{p-1} \operatorname{sgn} (\bar{f} + \bar{g})^{p-1} \stackrel{e_{10,11}}{=} \mu\text{-q.s.}$$

$$(2) \|f+g\|_p |f| = \|f\|_p |f+g| \quad \mu\text{-q.s.}$$

$$(3) \|f+g\|_p |g| = \|g\|_p |f+g| \quad \mu\text{-q.s.}$$

Seja $A \subset X$ o conjunto onde as três condições são satisfeitas.

Seja $X_0 = \{x : f(x) + g(x) = 0\}$.

Seja $x \in A \cap X_0$. Então (2) e (3) implicam $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ donde

$$\|g\|_p f(x) = \|f\|_p g(x).$$

Seja $x \in A \sim X_0$. Então

$$\operatorname{sgn} (f(x) + g(x))^{p-1} \operatorname{sgn} (\bar{f}(x) + \bar{g}(x))^{p-1} = 1$$

e a condição (1) fica:

$$(1') \quad \operatorname{sgn} f(x) \operatorname{sgn} \bar{g}(x) \in \{0, 1\}$$

Multiplicando-se (2) e (3) em cruz obtemos:

$$(2') \quad \|g\|_p |f(x)| = \|f\|_p |g(x)|$$

Se $f(x) = 0$, temos por (2) $\|f\|_p = 0$

e portanto $\|g\|_p f(x) = \|f\|_p g(x)$.

Analogamente se $g(x) = 0$.

Se $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ então temos de (1') :

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$$

e portanto (2') fica $\|g\|_p f(x) = \|f\|_p g(x)$.

iii) Suponhamos agora $\|g\|_p f = \|f\|_p g$ m.q.s.
e verifiquemos que isso implica
 $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

Se $\|f\|_p = \|g\|_p = 0$ é trivial.

Suponhamos $\|f\|_p \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p &= \| \|f\|_p f + \|f\|_p g \|_p = \\ &= \| \|f\|_p f + \|g\|_p f \|_p = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f\|_p \end{aligned}$$

Logo $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

Se $\|g\|_p \neq 0$ procedemos analogamente.

c.q.d.

2.2.7 Corolário

$\|\cdot\|_p : L_p \rightarrow \mathbb{R}$ é uma semi-norma
e L_p um espaço semi-normado, $1 \leq p \leq \infty$.

2.2.8 TEOREMA 9

L_p é completo, $1 \leq p \leq \infty$.

Prova

Caso ($p = \infty$)

Seja (f_n) sequência de Cauchy em L_∞ .

Existe $Z \subset X$ de medida zero tal que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \quad \text{e} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

para $\forall x \in X \setminus Z$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para $\forall n, m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X \setminus Z.$$

Então $(f_n(x))$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$
para $\forall x \in X \setminus Z$. Como $\mathbb{C}$ é completo
existe $f(x) \in \mathbb{C}$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X \setminus Z$.

Por passagem ao limite temos:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in X \setminus Z.$$

Como $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq$
 $\leq \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\infty$ resulta $f \in L_\infty$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \inf_{\mu(N)=0} \sup_{X \sim N} |f_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{X \sim \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

isto é $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Logo L_∞ é completo.

Caso $(1 \leq p < \infty)$

i) Seja (f_n) sequência de Cauchy em L_p e

$$X_0 = \{x : f_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $|f_n|^p$ é μ -integrável para $\forall n \in \mathbb{N}$, existem $X_m \in \beta$, $\mu(X_m) < \infty$, disjuntos, tais que $X \sim X_0 = \bigcup_1 X_m$.

ii) Como (f_n) é sequência de Cauchy existem $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tais que

$$\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Temos: } \int_{X_m} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| d\mu = \int_X |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| \chi_{X_m} d\mu \leq$$

$$\leq \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p \|\chi_{X_m}\|_q \leq \frac{1}{2^k} \mu(X_m)^{1/q}.$$

$$\int_{X_m} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_m} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| d\mu \leq \mu(X_m)^{1/q} < \infty$$

Então $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| < \infty$ μ -q.s., donde

$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})$ converge μ -q.s.

Então $f_{m_k}(x) \rightarrow f(x)$ μ -q.s. e em consequência f é μ -mensurável.

iii) Mostremos que $f \in \mathcal{L}_p$.

$$\begin{aligned} \|f_{m_k}\|_p &\leq \|f_{m_k} - f_{m_1}\|_p + \|f_{m_1}\|_p \leq \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{m_{j+1}} - f_{m_j}\|_p + \|f_{m_1}\|_p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \|f_{m_1}\|_p = \\ &= 1 + \|f_{m_1}\|_p. \end{aligned}$$

Pelo lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p du &= \int_X \lim_k |f_{m_k}|^p du \leq \liminf \int_X |f_{m_k}|^p du \leq \\ &\leq (1 + \|f_{m_1}\|_p)^p < \infty. \quad \text{Logo } f \in \mathcal{L}_p. \end{aligned}$$

iv) Finalmente verifiquemos que $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$.

Seja $r \in \mathbb{N}$ e $k, s \in \mathbb{N}$ tais que $k > r$, $s > m_r$.

Como (f_n) é sequência de Cauchy em L_p podemos tomar s suficientemente grande para que $\|f_{m_s} - f_s\| \leq \frac{1}{2^{r-1}}$.

$$\|f_{m_k} - f_s\|_p \leq \|f_{m_k} - f_{m_r}\|_p + \|f_{m_r} - f_{m_s}\|_p + \|f_{m_s} - f_s\|_p.$$

$$\text{Mas } \|f_{m_k} - f_{m_r}\|_p \leq \sum_{j=r}^{\infty} \|f_{m_{j+1}} - f_{m_j}\|_p \leq \sum_{j=r}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{r-1}}.$$

$$\text{e da mesma forma } \|f_{m_s} - f_{m_r}\|_p \leq \frac{1}{2^{r-1}}.$$

$$\text{Então temos } \|f_{m_k} - f_s\|_p \leq \frac{3}{2^{r-1}}.$$

Pelo lema de Fatou

$$\begin{aligned} \|f - f_s\|^p &= \int_X |f - f_s|^p d\mu = \int_X \lim_k |f_{m_k} - f_s|^p d\mu \leq \\ &\leq \underline{\lim} \int_X |f_{m_k} - f_s|^p d\mu = \underline{\lim} \|f_{m_k} - f_s\|^p \leq \frac{3^p}{2^{(r-1)p}} \end{aligned}$$

$$\text{De } \|f - f_s\|_p \leq \frac{3}{2^{r-1}} \text{ vem } \overline{\lim}_s \|f - f_s\|_p \leq \frac{3}{2^{r-1}}$$

$$\text{Fazendo } r \rightarrow \infty \text{ resulta } \overline{\lim}_s \|f - f_s\|_p = 0$$

$$\text{ou } \|f - f_s\|_p \rightarrow 0 \quad (\text{c.q.d.})$$

2.2.9 Proposição

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L_p$.
Então existe sequência de funções simples
 $\varphi_n \in \mathcal{L}_p$ tais que:

$$|\varphi_n| \leq |f| \quad \mu\text{-q.s.}, \quad \varphi_n \rightarrow f \quad \mu\text{-q.s.},$$

$$\|\varphi_n - f\|_p \rightarrow 0$$

Prova

Seja $f = g + ih$ e sejam $(\psi_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$,
 $i = 1, 2, 3, 4$ sequências de funções simples
reais não negativas tais que

$$\psi_n^{(1)} \uparrow g^+, \quad \psi_n^{(2)} \uparrow g^-, \quad \psi_n^{(3)} \uparrow h^+, \quad \psi_n^{(4)} \uparrow h^- \quad \mu\text{-q.s.}$$

e definidas como no lema 1.5.3.

Definamos:

$$\varphi_n = (\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}) + i(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(4)}).$$

$$\begin{aligned} |\varphi_n|^2 &= |\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}|^2 + |\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(4)}|^2 \leq \\ &\leq (|\psi_n^{(1)}| + |\psi_n^{(2)}|)^2 + (|\psi_n^{(3)}| + |\psi_n^{(4)}|)^2 \leq \\ &\leq (g^+ + g^-)^2 + (h^+ + h^-)^2 = \\ &= |g|^2 + |h|^2 = |f|^2 \end{aligned}$$

Logo $|\varphi_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Caso ($p = \infty$)

Como $|\varphi_n(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ -q.s. temos $\varphi_n \in \mathcal{L}_\infty$.

$$|\varphi_n - f| \leq |\psi_n^{(1)} - g^+| + |\psi_n^{(2)} - g^-| + |\psi_n^{(3)} - h^+| + |\psi_n^{(4)} - h^-| \rightarrow 0$$

Como a convergência de $(\psi_n^{(i)})$ $i=1,2,3,4$ é uniforme fora de um conjunto de medida zero, resulta: $\|\varphi_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Caso ($1 \leq p < \infty$)

Como $|\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p$ μ -q.s. e

$|\varphi_n - f|^p \rightarrow 0$ μ -q.s. temos pelo teorema da convergência dominada

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p d\mu \rightarrow 0 \quad \text{c.q.d.}$$

2.2.10 Proposição

Seja $\mu(X) < \infty$ e $1 \leq p < r \leq \infty$. Então:

$$(1) \quad \mathcal{L}_r \subset \mathcal{L}_p$$

$$(2) \quad \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \mu(X)^{-\frac{1}{r}} \|f\|_r, \quad \forall f \in \mathcal{L}_r.$$

$$(3) \quad \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \uparrow \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{L}_\infty.$$

Além disso a igualdade em (2) vale se e só se $|f|$ é constante μ -q.s.

Prova

(1) e (2)

Caso $r = \infty$

Seja $f \in \mathcal{L}_\infty$. Como $f^p \in \mathcal{L}_\infty$ e $1 \in \mathcal{L}_1$ temos $f^p \cdot 1 \in \mathcal{L}_1$ e portanto $f \in \mathcal{L}_p$.

Pela desigualdade de Hölder

$$\|f\|_p^p = \|f^p \cdot 1\|_1 \leq \|f^p\|_\infty \|1\|_1 = \|f^p\|_\infty \int \mu(X)$$

$$\therefore \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|f^p\|_\infty.$$

Teremos igualdade se e só se

$$|f^p| = \|f^p\|_\infty \quad \mu\text{-q.s. em } \{x : f(x) \neq 0\} \subset X$$

$$\Leftrightarrow |f| = \|f\|_\infty \quad \mu\text{-q.s.}$$

$$\Leftrightarrow |f| = \text{cte} \quad \mu\text{-q.s.}$$

Caso $r < \infty$

Seja $f \in \mathcal{L}_r$. Então $f^p \in \mathcal{L}_{r/p}$ pois que

$$\int |f^p|^{r/p} d\mu = \int |f|^r d\mu < \infty.$$

Como $1 \in \mathcal{L}_{\frac{r}{r-p}}$ temos $f^p = f^p \cdot 1 \in \mathcal{L}_1$ isto é $f \in \mathcal{L}_p$

Pela desigualdade de Hölder

$$\|f\|_p^p = \|f^p \cdot 1\|_1 \leq \|f^p\|_{r/p} \|1\|_{\frac{r/p}{r/p-1}} = \|f\|_r^p \mu(x)^{1-\frac{p}{r}}$$

$$\therefore \mu(x)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \mu(x)^{-\frac{1}{r}} \|f\|_r.$$

Teremos igualdade se e só se

$$\|1\|_{\frac{r}{r-p}} \|f^p\|_{r/p} = \|1\|_{\frac{r}{r-p}} \|f^p\|_{r/p}^{\frac{r}{p}} \quad \mu\text{-q.s.}$$

Simplificando temos

$$|f| = \mu(x)^{-\frac{1}{r}} \|f\|_r \quad \mu\text{-q.s.}$$

ou equivalentemente $|f| = \text{cte} \quad \mu\text{-q.s.}$

(3) Seja $f \in \mathcal{L}_\infty$.

Se $\|f\|_\infty = 0$ é imediato.

Seja $\|f\|_\infty > 0$.

Por (2) existe o limite de $\mu(x)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$ quando $p \rightarrow \infty$ e

$$\lim \mu(x)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Seja $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ e $A = \{x : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$.

Pela definição de $\|\cdot\|_\infty$ resulta $\mu(A) > 0$.

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \geq \int_A |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(A)$$

$$\mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \left(\frac{\mu(A)}{\mu(X)} \right)^{1/p}$$

Fazendo $p \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\lim \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

Pela arbitrariedade de ε temos $\lim \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$
c.q.d.

2.2.11 Definição

Seja $1 \leq p \leq \infty$.

Definimos $L_p = L_p(X, \beta, \mu)$ por

$$L_p(X, \beta, \mu) = \mathcal{L}_p(X, \beta, \mu) / \mathcal{Z}_p$$

$$\text{onde } \mathcal{Z}_p = \{f \in \mathcal{L}_p : \|f\|_p = 0\}$$

Então L_p é um espaço normado completo (espaço de Banach).

2.2.12 Observação

(1) Os elementos de L_p são as classes de equivalência de $\mathcal{L}_p$ pela relação de equivalência:

$$f \approx g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{Z}_p \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

(2) As classes de equivalência, elementos de L_p , serão representadas por um elemento qualquer da classe.

§2.3 Dual de L_p

2.3.1 Lema

Seja $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 Seja $g \in L_1$ e $|\int fg d\mu| \leq M \|f\|_p$, $\forall f \in L_\infty$.
 Então $g \in L_q$.

Prova

i) Seja $1 < p < \infty$.

Definamos $f_n = \text{sgn } g_n |g_n|^{q/p}$

onde $g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \leq n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Então $f_n \in L_\infty$

$$\|f_n\|_p = \left(\int |g_n|^q d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \uparrow \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

Se $\int |g|^q d\mu = 0$ então $g \in L_q$ e está pronto.

Seja $\int |g|^q d\mu > 0$. Nesse caso para n suficientemente grande $\int |g_n|^q d\mu > 0$.

Substituindo f_n em $|\int f_n g d\mu| \leq M \|f_n\|_p$ obtemos:

$$\int |g_n|^q d\mu \leq M \left(\int |g_n|^q d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

donde
$$\int |g_n|^q d\mu \leq M^q$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos
$$\int |g|^q d\mu \leq M^q$$

isto é: $g \in L_q$.

ii) Seja $p=1$, $q=\infty$.

Suponhamos (por contradição) que $\operatorname{ess. sup}_X |g(x)| = \infty$. Seja $n \in \mathbb{N}$.

Então $A = \{x : |g(x)| \geq n\}$ tem medida $\mu(A) > 0$.

Seja $f \in L_\infty$ definido por $f = \operatorname{ess. sup}_A g \cdot \chi_A$.
Por um lado:

$$\left| \int fg d\mu \right| = \int_A |g| d\mu \geq n \mu(A).$$

e por outro

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq M \|f\|_1 = M \mu(A)$$

e temos $n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o que é falso.

Logo $\operatorname{ess. sup}_X |g(x)| < \infty$, isto é $g \in L_\infty$.
c.q.d.

2.3.2 TEOREMA 10

Seja $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Então $\theta: L_q \rightarrow L_p'$ definida por:

$$\theta(g)f = \int_X fg d\mu$$

onde $f \in L_p$, $g \in L_q$ e' um isomorfismo isométrico.

Prova

i) Pela desigualdade de Hölder $fg \in L_1$ e
 $|\theta(g)f| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

E' imediato que $\theta(g)$ e' linear.

Então $\theta(g) \in L_p'$ e θ está bem definida.

A aplicação θ é obviamente linear.

Mostremos a isometria de θ .

Como $|\theta(g)f| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $\forall f \in L_p$
 temos $\|\theta(g)\| \leq \|g\|_q$.

Seja agora $f_0 = \text{sgn } \bar{g} |g|^{q/p}$ que pertence a L_p pois que

$$\int |f_0|^p d\mu = \int |g|^q d\mu < \infty.$$

$$|\theta(g)f_0| = \left| \int \text{sgn } \bar{g} |g|^{q/p} g d\mu \right| = \int |g|^{q/p+1} d\mu =$$

$$= \int |g|^q d\mu = \|g\|_q^q$$

$$\|f_0\|_p = \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{q-1}{q}} = \|g\|_q^{q-1}$$

Então $|\Theta(g) f_0| = \|f_0\|_p \|g\|_q$, o que combinado com a desigualdade anterior diz que

$$\|\Theta(g)\| = \|g\|_q$$

isto é, Θ é uma isometria de L_q em L'_p .

ii) Resta mostrar que Θ é sobrejectora.

Dividiremos a demonstração em duas partes.

1ª parte - Caso em que μ é finita.

Seja $F \in L'_p$.

Para $\forall E \in \beta$ temos $\chi_E \in L_p$.

As aplicações $\lambda_R : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda_I : \beta \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\lambda_R(E) = \operatorname{Re} F(\chi_E) \quad , \quad \lambda_I(E) = \operatorname{Im} F(\chi_E)$$

são, como é fácil verificar, medidas com sinal.

Sejam $\lambda_R = \lambda_R^+ - \lambda_R^-$, $\lambda_I = \lambda_I^+ - \lambda_I^-$ as decomposições de Jordan de λ_R e λ_I e sejam $A_R, A_I \in \beta$ tais que

$$\begin{aligned}\lambda_R^-(A_R) &= 0, & \lambda_R^+(X \sim A_R) &= 0 \\ \lambda_I^-(A_I) &= 0, & \lambda_I^+(X \sim A_I) &= 0.\end{aligned}$$

Pela continuidade da F :

$$\begin{aligned}\lambda_R^+(E) &= \lambda_R(E \cap A_R) = \operatorname{Re} F(X_{E \cap A_R}) \leq \\ &\leq M \|X_{E \cap A_R}\|_P = M \mu(E \cap A_R)^{1/p} \leq M \mu(E)^{1/p},\end{aligned}$$

donde $\lambda_R^+ \ll \mu$.

Pelo Teorema de Radon-Nikodym existe uma função μ -mensurável $h_1 \geq 0$ tal que

$$\lambda_R^+(E) = \int_E h_1 d\mu, \quad \forall E \in \beta.$$

Como $\lambda_R^+(X) = \int_X h_1 d\mu < \infty$, h_1 é μ -integrável.

Procedendo analogamente com λ_R^-, λ_I^+ e λ_I^- obtemos h_2, h_3, h_4 .

Seja $g = (h_1 - h_2) + i(h_3 - h_4) \in L_1$.
Então:

$$\begin{aligned}F(X_E) &= \operatorname{Re} F(X_E) + i \operatorname{Im} F(X_E) = \lambda_R(E) + i \lambda_I(E) = \\ &= \lambda_R^+(E) - \lambda_R^-(E) + i(\lambda_I^+(E) - \lambda_I^-(E)) =\end{aligned}$$

$$= \int_E h_1 d\mu - \int_E h_2 d\mu + i \left(\int_E h_3 d\mu - \int_E h_4 d\mu \right) =$$

$$= \int_E g d\mu = \int_X \chi_E g d\mu, \quad \forall E \in \beta.$$

Seja φ , função simples.
 Por linearidade obtemos:

$$F(\varphi) = \int_X \varphi g d\mu$$

Mostremos que $g \in L_q$.

Seja $f \in L_\infty$ e (φ_n) sequência de funções simples tais que $\|\varphi_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (prop. 2.2.11).

$$\left| \int \varphi_n f d\mu - \int f g d\mu \right| \leq \int |\varphi_n - f| |g| d\mu =$$

$$= \|(\varphi_n - f) g\|_1 \leq \|\varphi_n - f\|_\infty \|g\|_1 \rightarrow 0$$

Como $f \in L_p$ e $\|\varphi_n - f\|_p \rightarrow 0$ (prop. 2.2.12),
 temos também: $F(\varphi_n) \rightarrow F(f)$.

Então fazendo $n \rightarrow \infty$ em $F(\varphi_n) = \int_X \varphi_n g d\mu$
 obtemos

$$F(f) = \int_X f g d\mu, \quad \forall f \in L_\infty \subset L_p$$

Pela continuidade de F resulta:

$$\left| \int_X fg \, d\mu \right| = |F(f)| \leq M \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p.$$

Pelo lema 2.3.1 $g \in L_q$.

Seja $G \in L'_p$ definida por:

$$G(f) = F(f) - \int_X fg \, d\mu, \quad \forall f \in L_p.$$

Como G se anula sobre as funções simples e o conjunto destas é denso em L_p (prop. 2.2.12) resulta $G \equiv 0$, isto é

$$F(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad \forall f \in L_p.$$

Fica então provado para μ finita que θ é sobrejetora.

2º parte - Caso em que μ é medida qualquer.
Dado $E \in \beta$ vamos indicar por $L_p(E)$ o subespaço de L_p definido por:

$$L_p(E) = \{ f \in L_p : f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-q.s. em } X \sim E \}$$

Denotaremos $\|F\|_E = \|F|_{L_p(E)}\|_{L'_p(E)}$.

Seja:

$$\mathcal{H} = \{ E \in \beta : \exists g_E \in L_q(E) \text{ tal que}$$

$$Ff = \int fg_E \, d\mu, \quad \forall f \in L_p(E) \}$$

com a relação de pre-ordem

$$E_1 < E_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \|g_{E_1}\|_q \leq \|g_{E_2}\|_q.$$

Observe-se que por i) g_E é única e que $\|g_E\|_q = \|F\|_E \leq \|F\|$, $\forall E \in \mathcal{H}$.

Estabeleçamos inicialmente algumas propriedades de $\mathcal{H}$.

$$\text{a) } B \in \mathcal{H}, A \subset B, A \in \beta \implies A \in \mathcal{H}, \\ g_A(x) = g_B(x) \text{ } \mu\text{-q.s. em } A \text{ e } A < B.$$

$$\text{b) } A, B \in \mathcal{H}, A \cap B = \emptyset \implies A + B \in \mathcal{H} \\ \text{e } g_{A+B} = g_A + g_B$$

$$\text{c) } A, B \in \mathcal{H} \implies A \cap B \in \mathcal{H} \text{ e } A \cup B \in \mathcal{H}.$$

Verificação de (a) :

Como $L_p(A) \subset L_p(B)$ temos

$$Ff = \int f g_B d\mu = \int f \chi_A g_B d\mu, \quad \forall f \in L_p(A)$$

$$\text{Logo } A \in \mathcal{H} \text{ e } g_A = \chi_A g_B.$$

$$A < B \text{ pois } \|g_A\|_q \leq \|g_B\|_q.$$

Verificação de (b) :

$$\begin{aligned}
 Ff &= F(X_A f + X_B f) = F(X_A f) + F(X_B f) = \\
 &= \int f X_A g_A d\mu + \int f X_B g_B d\mu = \\
 &= \int f g_A d\mu + \int f g_B d\mu = \int f (g_A + g_B) d\mu, \\
 &\text{para } \forall f \in L_p(A+B).
 \end{aligned}$$

Como $g_A + g_B \in L_q(A) + L_q(B) = L_q(A+B)$
 resulta $A+B \in \mathcal{H}$ e $g_{A+B} = g_A + g_B$.

Verificação de (c) :

Consequência imediata de (a) e (b).

Mostremos agora que $\mathcal{H}$ é indutivo.

Seja $Z \subset \mathcal{H}$ e

$$\alpha = \sup_{E \in Z} \|g_E\|_q \leq \|F\| < \infty.$$

Sejam $A_n \in Z$ tais que $\|g_{A_n}\|_q \uparrow \alpha$ e $E_n = \bigcup_1^n A_k$.
 Pela propriedade (c) $E_n \in \mathcal{H}$. Seja $E_0 = \bigcup_1^\infty E_n$.
 Temos $\|g_{E_n}\|_q \uparrow \beta$ e $\alpha \leq \beta \leq \|F\|$.

Seja g_0 definida por:

$$g_0(x) = \begin{cases} g_{E_n}(x) & \text{se } x \in E_n \\ 0 & \text{se } x \notin E_0 \end{cases}$$

Pela propriedade (a) $g_0(x)$ fica definida μ -q.s. e como $g_{E_n}(x) \rightarrow g_0(x)$ μ -q.s., g_0 é μ -mensurável.

Como $|g_{E_n}|^q \uparrow |g_0|^q$ μ -q.s.

$$\text{e } \int |g_{E_n}|^q d\mu = \|g_{E_n}\|_q^q \leq \|F\|^q$$

temos por passagem ao limite

$$\int |g_0|^q d\mu \leq \|F\|^q \quad \text{isto é } g_0 \in L_q(E_0).$$

Agora é fácil mostrar que $E_0 \in \mathcal{H}$ e $g_{E_0} = g_0$.
Seja $f \in L_p(E_0)$ e $f_n = \chi_{E_n} f \in L_p(E_n)$.
Então $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ e temos:

$$\begin{aligned} Ff &= \lim_n Ff_n = \lim_n \int \chi_{E_n} f g_{E_n} d\mu = \\ &= \lim_n \int f g_{E_n} d\mu \end{aligned}$$

Como a sequência (fg_n) é dominada por $|fg_0| \in L_1$ e $fg_n \rightarrow fg_0$ μ -q.s., temos pelo teorema da convergência dominada:

$$Ff = \int fg_0 d\mu, \quad \forall f \in L_p(E_0)$$

isto é $E_0 \in \mathcal{H}$ e $g_{E_0} = g_0$.

Temos ainda $E < E_0$, $\forall E \in \mathcal{Z}$.

De fato, como $E_n \subset E_0$, $\|g_{E_n}\|_q \leq \|g_{E_0}\|_q$, $\forall n$.
Passando ao limite resulta

$$\alpha \leq \beta \leq \|g_{E_0}\|_q$$

$$\text{Logo } \|g_E\|_q \leq \sup_{A \in \mathcal{Z}} \|g_A\|_q = \alpha \leq \|g_{E_0}\|_q$$

Portanto $\mathcal{H}$ é indutivo.

Seja $X_0 \in \mathcal{H}$, maximal.

Provemos agora que $Ff = 0$, $\forall f \in L_p(X \sim X_0)$.
Se $L_p(X \sim X_0) = \{0\}$ está provado.

Caso contrário existe sub-conjunto $A \subset X \sim X_0$ tal que $0 < \mu(A) < \infty$.

Pela 1ª parte temos $A \in \mathcal{H}$.

Então $X_0 + A \in \mathcal{H}$ e

$$\|g_{X_0+A}\|_q^q = \|g_{X_0} + g_A\|_q^q = \|g_{X_0}\|_q^q + \|g_A\|_q^q$$

Como X_0 é maximal resulta $\|g_A\|_q = 0$

$$\text{Logo } F(X_A) = \int X_A g_A d\mu = \int_A g_A d\mu = 0$$

pois que $g_A(x) = 0$ μ -q.s.

Se $\varphi \in L_p(X \sim X_0)$ é função simples temos por linearidade $F\varphi = 0$

Como as funções simples são densas em $L_p(X \sim X_0)$ e F é contínua temos:

$$Ff = 0 \quad \forall f \in L_p(X \sim X_0).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} Ff &= F(fX_{X_0} + fX_{X-X_0}) = F(fX_{X_0}) = \\ &= \int f g_{X_0} d\mu, \quad \forall f \in L_p. \end{aligned}$$

isto é $\theta(g_{X_0}) = F$, $g_{X_0} \in L_q$, o que demonstra que θ é sobrejetora. (c.q.d.)

2.3.3 Corolário

L_p é reflexivo, $1 < p < \infty$.

2.3.4 TEOREMA 11

Seja μ medida σ -finita em (X, β)
Então $\theta: L_\infty \rightarrow L'_1$ definida por

$$\theta(g)f = \int_X fg d\mu$$

onde $f \in L_1$, $g \in L_\infty$ é um isomorfismo isométrico.

Prova

i) Mostremos que θ está bem definida, é linear e que $\|\theta(g)\| \leq \|g\|_\infty$ como na demonstração do Teorema 10.

Provemos que $\|\theta(g)\| \geq \|g\|_\infty$.

Se $\|g\|_\infty = 0$ é trivial. Seja $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ e $A = \{x : |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$.

Então $\mu(A) > 0$. Como μ é σ -finita existe $B \in \beta$, $B \subset A$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$.

$$\text{Seja } f = \frac{\operatorname{sgn} \bar{g} \chi_B}{\mu(B)}$$

Temos $f \in L_1$ e $\|f\|_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \|\theta(g)\| &\geq |\theta(g)f| = \left| \int \frac{\operatorname{sgn} \bar{g} \chi_B}{\mu(B)} d\mu \right| = \\ &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , resulta $\|\theta(g)\| \geq \|g\|_\infty$ e portanto $\|\theta(g)\| = \|g\|_\infty$, isto é, θ é uma isometria de L_∞ em L'_1 .

ii) Resta mostrar que θ é sobrejetora. Dividiremos a demonstração em duas partes.

1ª parte - Caso em que μ é finita.

A demonstração é a mesma da parte correspondente na demonstração do Teorema 10, fazendo $p=1$.

2ª Parte - Caso em que μ é σ -finita.

Seja $X_n \uparrow X$, $\mu(X_n) < \infty$.

$$L_1(X_n) = \{ f \in L_1 : f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-q.s. em } X \setminus X_n \}$$

Pela 1ª parte existem $g_n \in L_\infty(X_n)$ tais que

$$Ff = \int f g_n d\mu, \quad \forall f \in L_1(X_n).$$

Seja $f \in L_1$. Como $X_{X_n} f \rightarrow f$ em L_1 temos:

$$\begin{aligned} Ff &= \lim_n F(X_n f) = \lim_n \int X_{X_n} f g_n d\mu = \\ &= \lim_n \int f g_n d\mu \end{aligned}$$

Seja $g(x) = g_n(x)$ se $x \in X_n$.

Está bem definida μ -q.s. pois que pela unicidade dos g_n temos:

$$g_n = X_{X_n} g_{n+1} \quad \mu\text{-q.s.}$$

Por (i) $\|g_n\|_\infty = \|F|_{L_1(X_n)}\|_{L_1'(X_n)} \leq \|F\|$

donde $|g_n(x)| \leq \|F\| \quad \mu\text{-q.s.}$

$\therefore |g(x)| \leq \|F\| \quad \mu\text{-q.s.}$

Logo $g \in L_\infty$.

Como $fg_n \rightarrow fg, \mu\text{-q.s.}$ e $|fg_n| \leq |f| \|g\|_\infty \in L_1, \mu\text{-q.}$ resulta pelo teorema da convergência dominada que:

$$Ff = \int fg \, d\mu, \quad \forall f \in L_1$$

Logo $\theta(g) = F$ e θ é sobreyetora c.q.d.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.876 (Agência Quatzen) - Tel. 314-0011

SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating
Matrices of RK-Procedures - Agosto 1977
- RT-MAP-7702 - V.W.Setzer
A Note on a Recursive Top-Down
Analyzer of N.Wirth - Dezembro 1977
- RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação Ótima
Dezembro 1977
- RT-MAP-7704 - V.W.Setzer, M.M.Sanches
A linguagem "LEAL" para Ensino
básico de Computação - Dezembro 1977
- RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of Interest
In connection with discretization of
Ordinary Differential Equations
Janeiro 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.876 (Agência Quatzen) - Tel. 314-0011

SÃO PAULO - BRASIL

- RT-MAP-7802 - Silvío Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear
Equations with Iterative Methods
Fevereiro - 1973
- RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypohamiltonian Digraphs
Março 1978
- RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypotractable Digraphs
Maio 1978
- RT-MAP-7805 - V.Hesse, V.W.Setzer
The Line-Justifier: an example of program
development by transformations
Junho 1978
- RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap.II - Tópicos Introdutórios
Cap.II - Discretização
Julho 1978
- RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
(r, r)-Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores
Setembro 1978
- RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap. III - Métodos de passo progressivo para I
Eq. Dif. Ord. com condições Iniciais
Setembro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Pavilhão de Matemática"
Cidade Paulista - 05314-900 (Lagoa Norte) - Tel. 83-0000
SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8002 - Ivan de Queiroz Barros

Medida e Integração

Cap. I - Medida e Integração Abstrata - Julho 1980

RT-MAP-8003 - Raulo Takala

Fast Algorithms for NP-Hard Problems which are

Optimal or Near-optimal with Probability one

Setembro 1980

RT-MAP-8004 - V.V. Setzer e R. Lepyda

Uma Metodologia de Projeto de Bancos de Dados

para o Sistema ADABAS - Setembro 1980

RT-MAP-8005 - Imre Simon

On Brzozowski's Problem: $(L(A))^m = A^*$ - Outubro 1980

RT-MAP-8006 - Ivan de Queiroz Barros

Medida e Integração

Cap. II - Espaços L_p - Outubro 1980