

S B A

28º

SEMINÁRIO BRASILEIRO

DE

ANÁLISE

TRABALHOS APRESENTADOS



0537 677

SOBRE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PERIÓDICA PARA EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Hamilton Luiz Guidorizzi

Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo

ABSTRACT

In this article, we established sufficient conditions for the equation of Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

to admit periodical solution.

1. PRELIMINARES.

Em todo este artigo, suporemos que f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com f contínua e g de classe C^1 . Estas hipóteses garantem unicidade e existência de solução para a equação

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Suporemos, ainda, que

$$(2) \quad xg(x) > 0 \text{ para } x \neq 0.$$

No plano de fase (1) é equivalente a

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases}$$

A condição (2) garante que $(0,0)$ é o único ponto crítico para o sistema (3).

Consideremos o sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h_1(x)y - g_1(x) \end{cases}$$

onde $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é suposta contínua e $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Seja (x_0, y_0) , com $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$. Seja $\gamma_1(t)$ uma solução de (4) tal que

$$\gamma_1(t_0) = (x_0, y_0)$$

para algum t_0 . Suponhamos que γ_1 intercepta o eixo x em algum instante $t_1 > t_0$. Suponhamos, ainda, que, para todo $x < x_0$,

$$g_1(x) = g(x)$$

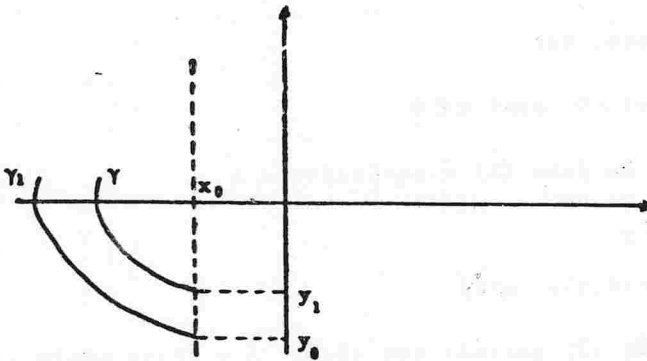
e

$$f(x) > h_1(x).$$

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (3) tal que, para algum instante $\bar{t}_0$,

$$\gamma(\bar{t}_0) = (x_0, y_1)$$

com $y_0 < y_1 < 0$. Não é difícil concluir que $\gamma(t)$ interceptará o eixo x em algum instante $\bar{t}_1 > \bar{t}_0$.



Consideremos, agora, o sistema

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h_2(x)y - g_2(x) \end{cases}$$

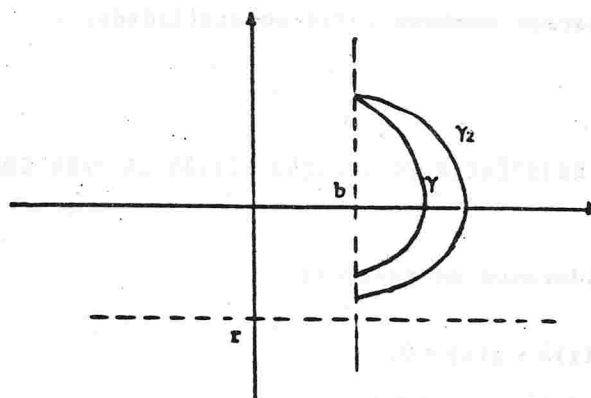
onde $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é suposta contínua e $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Suponhamos que existe $b > 0$ tal que, para todo $x \geq b$,

$$f(x) > h_2(x)$$

e

$$g(x) = g_2(x).$$

Suponhamos, ainda, que existe $r < 0$ tal que toda solução $\gamma_2(t)$ de (5) que parte de (b, y_2) , com $y_2 > 0$, encontrará novamente a reta $x = b$, sendo que $\gamma_2(t)$ interceptará pela primeira vez tal reta em um ponto (b, y_3) , com $r < y_3 < 0$. Nestas condições, não é difícil concluir que toda solução de (3) que parte de (b, y_2) , com $y_2 > 0$, interceptará novamente a reta $x = b$ sendo que o encontro dar-se-á pela primeira vez em um ponto (b, y_4) , com $r < y_4 < 0$.



Consideremos novamente o sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x). \end{cases}$$

Toda solução deste sistema, com $y \neq 0$, é, também, solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}.$$

Sejam $a < b$ e $c > 0$ reais dados e sejam

$$A = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{e} \quad B = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

Para todo x em $[a, b]$ e $|y| \geq c$,

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| \leq A + \frac{B}{c}.$$

Segue daí que toda solução de (3) que passa por (x_0, y_0) , com $y_0 < 0$, ou intercepta a reta $x = x_1$, $x_1 < x_0$, ou cruza o eixo x em algum ponto $(x_2, 0)$, com $x_1 \leq x_2 < x_0$, não podendo ocorrer nenhuma outra possibilidade. Da mesma forma, toda solução de (3) que passa por $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, com $\bar{y}_0 > 0$, ou intercepta a reta $x = \bar{x}_1$, com $\bar{x}_1 > \bar{x}_0$, ou cruza o eixo x em algum ponto $(\bar{x}_2, 0)$, com $\bar{x}_0 < \bar{x}_2 \leq \bar{x}_1$, não podendo ocorrer nenhuma outra possibilidade.

2. TEOREMA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PERIÓDICA PARA EQUAÇÃO DE LIÉNARD.

TEOREMA. Consideremos as equações

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

$$\ddot{x} + h_1(x)\dot{x} + g_1(x) = 0$$

e

$$\ddot{x} + h_2(x)\dot{x} + g_2(x) = 0,$$

onde f , h_1 , h_2 , g , g_1 e g_2 são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sendo as três primeiras contínuas e as demais de classe C^1 . Suponhamos que estejam verificadas as seguintes hipóteses:

$$(I) \quad xg(x) > 0 \quad \text{para } x \neq 0;$$

(II) a origem, em relação ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x), \end{cases}$$

é repulsora;

(III) existe $b > 0$ tal que, para todo $x \geq b$,

$$f(x) > h_2(x)$$

e

$$g(x) = g_2(x);$$

(IV) para toda solução $\gamma_2(t)$ de

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h_2(x)y - g_2(x) \end{cases}$$

com $\gamma_2(t_0) = (b, y_0)$, $y_0 > 0$, existe $t_1 > t_0$ tal que $\gamma_2(t_1)$ é um ponto da reta $x = b$;

(V) existe $r < 0$ tal que se $\gamma_2(t)$ for solução de (2), com

$$\gamma_2(t_0) = (b, y_0), \quad y_0 > 0,$$

e

$$\gamma_2(t_1) = (b, y_1), \quad t_1 > t_0,$$

então

$$y_1 > r;$$

(VI) existe $a < 0$ tal que, para todo $x \leq a$,

$$f(x) > h_1(x)$$

e

$$g(x) = g_1(x);$$

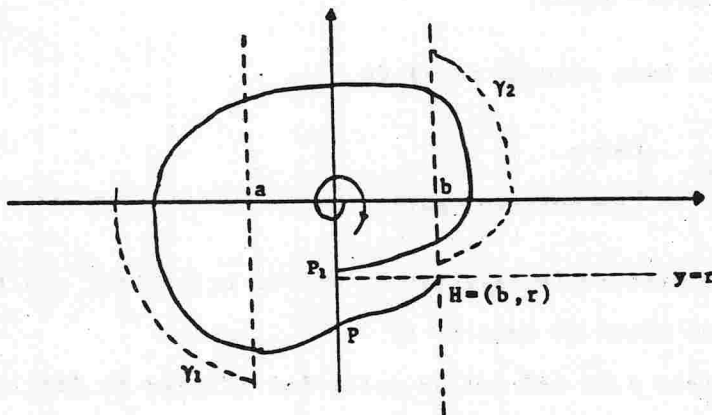
(VII) para toda solução $\gamma_1(t)$ de

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h_1(x)y - g_1(x) \end{cases}$$

com $\gamma_1(\bar{t}_0) = (a, \bar{y}_0)$, $\bar{y}_0 < 0$, existe $\bar{t}_1 > \bar{t}_0$ tal que $\gamma_1(\bar{t}_1)$ é um ponto do eixo x .

Nestas condições, a equação (1) admitirá pelo menos uma solução periódica.

DEMONSTRAÇÃO.



Seja $\gamma(t)$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases}$$

que parte de $H = (b, r)$; γ interceptará o eixo y , pela primeira vez, em um ponto P . Segue das hipóteses que γ interceptará novamente o semi-eixo negativo dos y em um ponto P_1 situado entre P e a origem. Pelo teorema de Poincaré-Bendixon, a equação admitirá pelo menos uma solução periódica. $\square$

O resultado obtido neste artigo constitui parte de nossa Tese de Doutorado.

REFERÊNCIAS

- [1] VILLARI, G. Periodic solutions of Liénard equation. J. Math. Anal. Appl. 86 (1982), 379-386.
- [2] VILLARI, G. On the existence of periodic solutions for Liénard equation. Nonlinear Anal. 7 (1983), 71-78.
- [3] VILLARI, G. On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation. J. of Differential Equations 67 (1987), 269-277.
- [4] GRAEF, J.R. On the generalized Liénard equation with negative damping. J. of Differential Equations 12 (1972), 34-62.
- [5] ZANOLIN, F. On forced periodic oscillations in dissipative Liénard system. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 69 (1983), 51-62.
- [6] HARA, T. & YONEYAMA, T. On the global center of generalized Liénard equation and its application to stability problems. Funkcialaj Ekvacioj, 28 (1985), 171-192.
- [7] OPIAL, Z. Sur un théorème de A. Filippoff. Annales Polonici Math, 5 (1958), 67-75.
- [8] UTZ, W.R. Boundedness and periodicity of solutions of the generalized Liénard equation. Ann. Mat. Pure Appl. 42 (1956), 313-324.
- [9] DRAGILEV, A.A. Periodic solutions of the differential equation of nonlinear oscillations. Prikl. Mat. Mekh 12 (1952), 85-88.
- [10] ZHANG, Z.; DING, T.; HUANG, W. & DONG, Z. Qualitative theory of ordinary differential equations. Press of Science. Peking (1985).

