

Nº 83

La géométrie, le problème d'équivalence et la classification des CR-variétés homogènes em dimension 3

J.M.Veloso e J.A.Verderesi

junho de 1985

LA GÉOMÉTRIE, LE PROBLÈME D'EQUIVALENCE ET LA CLASSIFICATION
DES CR-VARIÉTÉS HOMOGÈNES EN DIMENSION 3

J.M. Veloso, J.A. Verderesi

1. Introduction

Dans ce papier on donne une nouvelle version d'une partie du papier de E. Cartan: "sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes" dans le contexte de la théorie intrinsèque des systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles (S.E.D.P.).

On associe à chaque CR-variété intégrable et non dégénérée de dimension 3 un fibré des *repères* de deuxième ordre et sur ce fibré une connexion de Cartan. Une partie de la courbure de cette connexion définit un vrai tenseur sur la variété semblable à celui de Weyl de la géométrie conforme et que l'on appelle "tenseur fondamental". On détermine ses propriétés algébriques et son expression dans un CR-repère adapté (2.2).

Une CR-variété M est *non umbilique* si le tenseur fondamental ne s'annule pas partout. Ces variétés admettent un Z_2 - fibré de CR-repères adaptés (2.2) qui permettent de définir trois fonctions sur M que l'on appelle les invariants fondamentales (Th. 4.16). En utilisant ces invariants on démontre, comme en [C], un théorème d'équivalence pour les CR-variétés non umbiliques.

Pour les CR-variétés homogènes les invariants fondamentales sont constantes. Cela, permet de faire une classification de ces variétés (Th. 4.18). Si $\text{Aut}(M)$ est le groupe de automorphisme de M , alors $M \cong \text{Aut}(M)$ ou $M = \text{Aut}(M)/Z_2$. En plus le théorème 4.18 décrit complètement la structure de $\text{Aut}(M)$.

Finalement, on remarque que la construction de la G-structure qu'on trouve dans le papier de Cartan [C] a été généralisée pour les dimensions plus grandes que trois par Tanaka [T₂] et Chern-Moser [C.M.]. Si on essaie d'appliquer notre méthode on trouve une obstruction d'ordre 3, c'est-à-dire dans le théorème 2.1, $(S^2)^1 \xrightarrow{\alpha} M$ n'est pas surjective. Pour associer un fibré principal à une CR-structure de dimension plus grande que trois il faut changer l'espace homogène Q. Comme en [C.M.] on considère le fibré en droites $E \rightarrow Q$ donné par $E = \{\theta \in TM^* \mid \theta \in D^\perp\}$ que est un espace homogène du groupe $G = \text{Aut}(Q)$. Si on considère l'équation qui fait le contact d'ordre 1 entre le fibré en droites d'une CR-variété abstraite et le fibré E associé à Q alors on peut répéter ce que l'on a fait en dimension trois.

L'intérêt des auteurs au sujet de ce travail est fruit du séjour du Prof. Kuranishi à l'Université de São Paulo. A lui nos remerciements pour ses enseignements.

Nous remercions aussi au Prof. Rodrigues pour de vivantes conversations et nombreuses suggestions qui font partie de ce papier.

Une CR-variété est une triade (M, D, J) où: D est une distribution de codimension 1 et J est une structure complexe sur D. On dit que la CR-variété (M, D, J) est intégrable si la distribution complexe $D^{(1,0)} \subset TM^{\mathbb{C}}$ est une distribution intégrable.

Les exemples naturels des CR-variétés sont donnés par les hypersurfaces réelles d'une variété complexe. En particulier, soit $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hypersurface, I la structure complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, alors, si on pose: $D = TM \cap I(TM)$ et $J = I/D$, (M, J, D) est une CR-variété plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

La forme de Levi est définie par:

$$L : D \times D \rightarrow TM/D$$

$$L(X, Y) = [X, JY] \mod D$$

on peut voir que $L(X, Y)_x$ ne dépend que de $X(x)$ et $Y(x)$. En plus, comme $\dim TM/D = 1$ on peut considérer $L : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$.

On note par la même lettre L l'extension de la forme de Levi au espace complexifié $D^{\mathbb{C}}$. On dit que une CR-variété est *non dégénérée* si la forme de Levi l'on est, et quelle est strictement pseudo-convexe si tous les valeurs propres de L ont le même signal.

Remarque: Si on suppose que $L = 0$ alors D est complètement intégrable. D'après le théorème de Newlander-Nirenberg on voit que M est localement équivalent à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Donc, la géométrie d'une CR-variété dégénérée est de dimension infinie.

On se restreint dans cet exposé à CR-variété de dimension 3 non dégénérée. Dans ce cas elle est aussi strictement pseudo-convexe.

L'exemple le plus simple de CR-variété et que joue le rôle du $\mathbb{R}^n$ pour la géométrie riemannienne c'est la quadrique Q associée au produit hermitienne sur $\mathbb{C}^3$.

$$\langle z, w \rangle = z^1 \bar{w}^1 + \frac{1}{2} (z_2 \bar{w}_0 - z_0 \bar{w}_2)$$

$$\text{où } z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3.$$

$$Q = \{[\lambda z] \in \mathbb{CP}^2 \mid \langle z, z \rangle = 0\}$$

La partie réelle de Q est donnée par: $Q^* = \mathbb{C}^2 \cap Q$.

Q^* est définie par l'équation

$$z_1 \bar{z}_1 + \frac{1}{2} (z_2 - \bar{z}_2) = 0$$

Le groupe linéaire que préserve $\langle \cdot \rangle$ et la forme volume est $SU(2,1)$. $SU(2,1)$ opère sur $\mathbb{CP}^2$ et laisse Q invariante. Cette action sur Q est transitive et préserve la CR-structure de Q . C'est-à-dire, chaque $g \in SU(2,1)$ détermine un CR-automorphisme $g : Q \rightarrow Q$ ($g_*(D) = D$ et $dg \circ J = J \circ dg$). Le sous-groupe de $SU(2,1)$ qui fixe Q point-à-point est $r(3) = \{\lambda I \mid \lambda^3 = 1\}$. Donc, $SU(2,1)/r(3) \subset \text{Aut}(Q)$ le groupe des CR-automorphismes de Q . C'est un résultat de Poincaré [P] que $SU(2,1)/r(3) = \text{Aut}(Q)$.

On considère, maintenant, le sous groupe H de $SU(2,1)$ formé des éléments

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^1 & 1 & 0 \\ x^2 + i|z^1|^2 & 2i\bar{z}^1 & 1 \end{bmatrix}$$

La application $\begin{cases} H \rightarrow Q^* \\ T \rightarrow T \cdot O \end{cases}$ où $O = (1, 0, 0)$ est un

difféomorphisme. Cela montre que Q^* a une structure naturel du groupe de Lie.

2. L'équation de contact et le théorème fondamental

Soit (M, D, J) une CR-variété de dimension 3 et (Q, D_Q, J_Q) la CR-variété de la quadrique Q . On note par $J^k(M, Q)$ l'espace de k -jets des difféomorphismes de M dans Q , $\alpha : J^k(M, Q) \rightarrow M$, $\beta : J^k(M, Q) \rightarrow Q$ et $\pi_k : J^k(M, Q) \rightarrow J^2(M, Q)$ les applications "source", "but" et projections respectivement. Chaque $z = J^1_x \sigma \in J^1 J^2(M, Q)$ détermine l'application linéaire $z_* = d\sigma(x) \in T_x^* M \otimes T_{\sigma(x)} J^2(M, Q)$. En particulier, si $z \in J^1(M, Q)$ alors $z_* \in T_{\alpha(z)}^* M \otimes T_{\beta(z)} Q$. (on identifie, dans ce cas, une section du fibré trivial $M \times Q \rightarrow M$ avec une application de M dans Q)

L'équation de contact de la CR-variété M est donné par:

$$S^1 = \{z \in J^1(M, Q) \mid z_*(D) \subset D_Q \text{ et } z_* \circ J = J_Q \circ z_*\}$$

Il est facile de voir que $S^1 \subset J^1(M, Q)$ est un système d'équation aux dérivées partielles (SEDP) (voir [C]). Le prolongement de S^1 d'ordre k est définie par induction par:

$$S^{k+1} = J^1 S^k \cap J^{k+1}(M, Q)$$

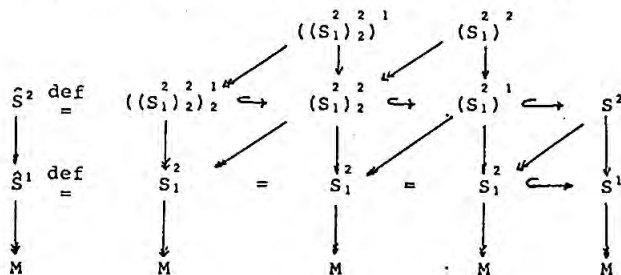
On dit que $z \in J^k(M, Q)$ fait un contact d'ordre k entre M et Q dans les points $x \in M$ et $y \in Q$ si: $\alpha(z) = x$, $\beta(z) = y$ et $z \in S^k$.

Le problème fondamental est d'établir le plus grand contact que une CR-variété a avec l'espace modèle Q .

Si $S^k \in J^k(M, Q)$ alors on défine $S^k_l = \pi_l(S^k)$ pour $l < k$, et $P S^k_l = (S^k_l)^1$.

L'un de notre résultat est le suivant:

Théorème 2.1 Soit (M, D, J) une CR-variété non dégénérée, $S^1 \subset J^k(M, Q)$ l'équation de contact. Alors on a le diagramme:



et: i) $\hat{S}^1 \xrightarrow{\alpha} M$ et $\hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^1$ sont des fibrations.

ii) Si ϕ^k est le symbole de $\hat{S}^k$, alors $\dim \phi^1 = 4$, $\dim \phi^2 = 1$ et $\dim \phi^k = 0$, $k \geq 3$.

iii) $\hat{S}^1 = \{z \in S^1 \mid z \text{ preserve } L\}$

Pour démontrer ce théorème on commence par introduire un système de coordonnées spéciales dans $J^k(M, Q)$.

Un repère $(F_1, F_{\bar{1}}, F_0)$ de $TM^{\mathbb{C}}$ s'appelle un *CR-repère* si:

i) $F^1 \in D^{(1,0)}$, $F_{\bar{1}} \in D^{(0,1)}$

ii) $\bar{F}_1 = F_{\bar{1}}$ et $F_0 = \bar{F}_0$

Un *CR-repère adapté* est un CR-repère tel que

$$\begin{aligned} \text{i) } [F_1, F_{\bar{1}}] &= c F_1 - \bar{c} F_{\bar{1}} + i F_0 \\ [F_1, F_0] &= i a F_1 + b F_{\bar{1}} \quad a \text{ réel} \quad (2.2) \\ [F_1, F_0] &= b F_1 - i a F_{\bar{1}} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que toute CR-variété non dégénérée admet des repères adaptés (local).

Si f est une fonction sur M soit $f_j = F_j(f)$. Alors le 1^{er} identité de Jacobi on obtient

$$(2.3) \quad c_0 - i a_{\bar{1}} + b_1 + b \bar{c} - i a c = 0$$

La quadrique Q^* admettre un CR-repère adapté especial $(Z_1, \bar{Z}_1, Z_0)$ tel que:

- i) $[Z_1, \bar{Z}_1] = i Z_0$, $[Z_1, Z_0] = 0$ $[\bar{Z}_1, Z_0] = 0$
 ii) $(Z_1, \bar{Z}_1, Z_0)$ est une base de champs invariants pour la structure de groupe de Lie de Q^* .

Ce repère semble le translations du $\mathbb{R}^3$!

Soit $f : M \rightarrow Q$ une application différentiable et $\omega : TQ \rightarrow \mathcal{Q}$ la forme de Maurer-Cartan de Q . La *différentielle de Darboux* de f est définie par $Df = f^* \omega$.

Si on applique f^* à l'équation de Maurer-Cartan on obtient:

$$dDf + [Df, Df] = 0$$

Si on pose: $Df(F_i) = p_i = p_i^j Z_j \in \mathcal{Q}$

$$Df [F_i F_j] = P[i, j] \in \mathcal{Q}$$

$$P_{ij} = F_i(p_j) \in \mathcal{Q}$$

alors de l'équation on obtient la relation de compatibilité:

$$(2.4) \quad P_{ij} - P_{ji} = P[i, j] - [P_i P_j]$$

Explicitement on a:

$$p_{i\bar{1}}^1 - p_{\bar{1}i}^1 = c p_i^1 + i p_i^1$$

$$p_{i1}^1 - p_{1i}^1 = i a p_i^1$$

$$p_{i\bar{1}}^1 - p_{\bar{1}i}^1 = b p_i^1$$

$$p_{i\bar{1}}^3 - p_{\bar{1}i}^3 = i (p_i^3 - p_i^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}})$$

$$p_{i1}^3 - p_{1i}^3 = - i p_i^1 p_1^{\bar{1}}$$

Il est claire que, en chaque pont x , les p_i ne dépend que $J_x^1 f$ et que les p_{ij} de $J_x^2 f$. En général on peut définir p_I pour un multi-indice I que dépend seulement de $J_x^k f$ où $k = [I]$.

Si le repère (F_1, F_1^-, F_0) est défini dans un ouvert $U \subset M$, alors (c, y, p_1) ; $x \in U$, $y \in Q$ et $p_1 \in \mathcal{Q}$ s'appelle un *système de coordonnées adapté* dans $J^k(M, Q)$ associé à (F_1, F_1^-, F_0) .

L'équation de contact S^1 est donnée dans un système adapté les équations:

$$S^1 \left\{ \begin{array}{l} p_1^1 = 0 \\ p_1^0 = 0 \end{array} \right. + \text{conjuguées}$$

Son prolongement est

$$S^2 \left\{ \begin{array}{lll} p_{11}^1 = 0 & p_{11}^1 = 0 & p_{01}^1 = 0 \\ p_{11}^0 = 0 & p_{11}^0 = 0 & p_{01}^0 = 0 \end{array} \right. + \text{conjuguées}$$

De l'équation $p_{11}^0 = 0$, sa conjuguée et la relation de compatibilité (2.4) on obtient l'équation

$$p_0^0 - p_1^1 \cdot p_1^1 = 0$$

On ne obtient pas d'autres relations de première ordre. Donc,

$$S_1^2 \left\{ \begin{array}{l} p_1^1 = 0 \\ p_1^0 = 0 \\ p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^1 \end{array} \right. + \text{conjuguées}$$

Pour voir que S_1^2 est formée des 1-jets de S^1 que préserve la forme de Levi on observe que: $L(F_1 F_1^-) = 1 F_0 \bmod D^C$ et $L(Z_1, Z_1^-) = 1 Z_0 \bmod D_a^C$. Donc, $z = (x, y, p_j)$ préserve la forme de Levi si et seulement si $[p_1 p_1^-] = 1 p_0 \bmod D_Q^C$, qu'il est équivalent à l'équation $p_0^0 = p_1^1 p_1^1$.

Le prolongement de S_1^2 est donné par:

$$(S^2)_1^1 \left\{ \begin{array}{lll} p_1^1 = 0 & p_1^0 = 0 & p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^{\bar{1}} \\ p_{11}^1 = -2i \frac{p_1^1 p_0^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} + \bar{c} p_1^1 & p_{11}^0 = 0 & \\ & p_{1\bar{1}}^0 = 0 & \\ p_{1\bar{1}}^1 = 0 & & p_{01}^0 = 0 \\ & p_{0\bar{1}}^1 = 0 & \\ p_{1\bar{1}}^1 = 0 & & p_{00}^0 = p_1^1 \cdot p_{01}^{\bar{1}} + p_1^{\bar{1}} \cdot p_{01}^1 \end{array} \right.$$

L'équation $p_{11}^1 = -2i \frac{p_1^1 p_0^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} + \bar{c} p_1^1$ on obtient des équations

$p_{01}^0 = 0$, $p_{10}^0 = p_1^{\bar{1}} \cdot p_{11}^1 + p_1^1 p_{1\bar{1}}^{\bar{1}}$, $p_{11}^1 = 0$ et de la relation de compatibilité (2.4).

L'équation $p_{00}^0 = p_1^1 p_{01}^{\bar{1}} + p_1^{\bar{1}} \cdot p_{01}^1$ de $p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^{\bar{1}}$

Il est clair que $(S^2)_1^1 \xrightarrow{\pi_1} S_1^2$ est surjective.

Le prolongement de $(S^2)_1^1$ n'est pas surjective sur $(S^2)_1^1$.

Si on dérive par rapport à $\bar{1}$ l'équation

$$p_1^{\bar{1}} \cdot p_{11}^1 = -2i p_1^1 p_0^{\bar{1}} + \bar{c} p_0^0$$

et on utilise les relations de compatibilité (2.4)

$$p_{11\bar{1}}^1 - p_{1\bar{1}1}^1 = c p_{11}^1 + i p_{10}^1 + c_1 p_1^1$$

$$p_{1\bar{1}1}^1 - p_{11\bar{1}}^1 = c p_{11}^1 - \bar{c} p_{1\bar{1}}^1 + i p_{01}^1$$

et les autres équations de $(S^2)_1^1$ alors on obtient:

$$p_1^1 p_{01}^{\bar{1}} - p_1^{\bar{1}} p_{01}^1 = 3i p_0^1 p_0^{\bar{1}} - i \Delta p_0^0 \quad (*)$$

où

$$(2.5) \quad \Delta = \frac{\bar{c}_1 + c_1 + 2c\bar{c} - 3a}{2}$$

Les autres équations ne conduisent pas à nouvelles équations de deuxième ordre.

Les équations de $(S^2)_2^2 = \pi_2 ((S^2)_1^2)$ sont:

$$(S^2)_{1,1}^2 \left\{ \begin{array}{lll} p_1^1 = 0 & p_1^0 = 0 & p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^{\bar{1}} \\ p_{11}^1 = -2 i \frac{p_1^1 p_0^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} + \bar{c} p_1^1 & & p_{11}^0 = 0 \\ p_{1\bar{1}}^1 = 0 & & p_{1\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{\bar{1}1}^1 = 0 & & p_{\bar{1}1}^0 = 0 \\ p_{0\bar{1}}^1 = 0 & & p_{0\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{01}^1 = \frac{p_{00}^0 - 3 i p_0^1 p_0^{\bar{1}} + i \Delta p_0^0}{2 p_1^{\bar{1}}} & & \end{array} \right.$$

Maintenant, on derive:

$$p_1^1 p_0^{\bar{1}} - p_1^{\bar{1}} p_{01}^1 = 3 i p_0^1 p_0^{\bar{1}} - i \Delta p_0^0$$

par rapport à $\bar{1}$,

$$p_{1\bar{1}}^1 = \frac{2 i p_1^{\bar{1}} p_0^1}{p_1^1} + c p_1^{\bar{1}} \text{ par rapport à } 0$$

De les relations de compatibilité (2.4), on obtient

$$p_{00}^1 = \frac{p_0^1}{p_0^0} (p_{00}^0 - i p_0^1 p_0^{\bar{1}}) + R p_1^1$$

où

$$(2.6) \quad R = \frac{1}{3} (2 c_0 + i \Delta \bar{1} - 2 b \bar{c} - 2 i a c)$$

Une analyse des autres équations montre qu'il n'existe pas d'autres équations de deuxième ordre.

Les équations du système $\hat{S}^2 = \pi_2 ((S^2)_2^2)^1$ sont

$$\hat{S}^2 \left\{ \begin{array}{ll} p_1^1 = 0 & p_1^0 = 0 \quad p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^{\bar{1}} \\ p_{11}^1 = p_1^1 \left(-2 i \frac{p_0^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} + \bar{c} \right) & p_{11}^0 = 0 \\ p_{i\bar{1}}^1 = 0 & p_{i\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{\bar{1}\bar{1}}^1 = 0 & p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{0\bar{1}}^1 = 0 & p_{0\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{01}^1 = \frac{p_{00}^0 - 3 i p_0^1 p_0^{\bar{1}} + i \Delta p_0^0}{2 p_1^{\bar{1}}} & \\ p_{00}^1 = \frac{p_0^1}{p_0^0} (p_{00}^0 - i p_0^1 p_0^{\bar{1}}) + R p_1^1 & \\ + \text{conjuguées.} & \end{array} \right.$$

$$\text{ou } \Delta = \frac{\bar{c}\bar{1} + c_1 + 2 c \bar{c} - 3 a}{2}$$

$$(2.7) \quad R = \frac{1}{3} (2 c_0 + i \Delta \bar{1} - 2 b \bar{c} - 2 i a c)$$

3. Le fibré principal associé à une CR-variété

Le groupe $G = SU(2,1)/r(3)$ opère sur Q . Le groupe d'isotropie G_0 en $0 = (1, 0, 0) \in Q$ est formé des matrices de la forme

$$\left[\begin{array}{ccc} a & -2 i a u \bar{c} & b \\ 0 & u & c \\ 0 & 0 & 1/\bar{a} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} u \cdot \bar{u} = 1 \\ \frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = -2 i c \bar{c} \\ \frac{au}{\bar{a}} = 1 \end{array}$$

L'action de G sur Q se prolonge dans une action sur $J^2(Q)$.

L'application

$$G \rightarrow J^2_0(Q, Q)$$

$$g \rightarrow J^2_0 g$$

est donnée, dans les coordonnées adaptées, par:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p^1_1 &= \frac{u}{a} & p^1_{11} &= 0 & p^0_1 &= 0 & p^0_{10} &= \frac{1}{a \bar{a}} & p^1_{00} &= \frac{-2c}{a} \\ p^1_{11} &= \frac{4}{a} \frac{1}{u^2} \bar{c} & p^0_{10} &= \frac{-2}{a} \frac{1}{\bar{u}} \frac{c}{\bar{a}} \\ p^1_{10} &= \frac{2}{a^2} \frac{b u - 4}{a} \frac{1}{u} \frac{c}{\bar{c}} & p^0_{00} &= \frac{2}{a \bar{a}} \left(-\frac{b}{a} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \\ p^1_{001} &= \frac{-8}{a^2} bc \\ p^1_{11} &= p^1_{01} = p^0_{11} = p^0_{10} = p^0_{01} = 0 \end{aligned}$$

Si on fait, dans le calcul précédent, $M = Q$, $\Gamma^1 = S^1$, $\hat{\Gamma}^1 = S^1$ et $\hat{\Gamma}^2 = S^2$ alors:

Théorème 3.2 Soit Γ^1 le groupoïde de Lie des 1-jets de CR-automorphismes de Q alors,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Gamma}^3 & & ((\hat{\Gamma}^1)_2^2)^1 & & (\hat{\Gamma}^1)^2 \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \hat{\Gamma}^2 & \longleftrightarrow & (\hat{\Gamma}^1)_1^2 & \longleftrightarrow & (\hat{\Gamma}^1)^1 \longleftrightarrow \Gamma^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Gamma}^1 & = & \hat{\Gamma}^1 & = & \Gamma^1 \longleftrightarrow \Gamma^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Q & & Q & & Q \end{array}$$

- i) $\tilde{\Gamma}^i$ $i = 1, 2, 3$ sont des groupoïdes de Lie sur Q et $\tilde{\Gamma}^{i+1} \xrightarrow{\pi_i} \tilde{\Gamma}^i$
 $i = 1, 2$ sont des fibrations.
- ii) si g^{i-1} est le symbole de $\tilde{\Gamma}^i$ alors $\dim g^0 = 4$ $\dim g^1 = 1$ $\dim g^2 = 0$
- iii) $\tilde{\Gamma}^3$ est un S.E.D.P. complètement intégrable

Dem: i) et ii) sont des conséquences immédiates du théorème (2.1). iii) est une conséquence de la paramétrisation (3.1). On verra une démonstration directe de iii) dans le paragraphe suivant.

Corolaire (Poincaré): Le groupe d'automorphisme de Q forment un groupe de Lie de dimension 8.

De la paramétrisation (3.1) on a $G = \text{Aut}(M) = \text{sol}(\tilde{\Gamma}^2) = 1$ ensembles des solutions globales de $\tilde{\Gamma}^2$. Comme $g^2 = 0$ alors G est représenté comme un groupe des difféomorphismes d'ordre 2 sur Q .

Soit (M, D, J) une CR-variété de dim.3. L'action de G sur Q se prolonge naturellement à une action sur $J^k(M, Q)$.

On dit que un S.E.D.P. $S^k \subset J^k(M, Q)$ est invariante par G si: pour chaque $z \in S^k$ et $g \in G$ alors $g \cdot z \in S^k$.

On dit que S^k est automorphe par G si S^k est invariante et pour chaque $z, w \in S^k$, $\alpha(z) = \alpha(w)$, alors il existe $g \in G$ tel que $w = g \cdot z$ (*).

On a les propriétés suivantes, les systèmes automorphes:

Théorème 3.3. Soit $S^k \subset J^k(M, Q)$ un S.E.D.P. automorphe par un groupoïde de Lie $\Gamma^k \subset J^k(Q)$.

- i) Si $S^{k+1} \xrightarrow{\alpha} M$ est une fibration et $\Gamma^{k+1} \subset J^{k+1}(Q)$ est un groupoïde de Lie alors S^{k+1} est automorphe par Γ^{k+1} .
- ii) Si $\Gamma^k_2 = \Pi_2(\Gamma^k)$ est un groupoïde de Lie alors $S^k_2 = \Pi_2(S^k)$ est un S.E.D.P. automorphe par Γ^k_2 . Pour la démonstration de ce théorème voir [V].

(*) On remarque que la notion de système automorphe d'ordre k par G ne dépend que de $\Gamma^k = J^k_G \cap J^k(Q)$.

On voit de ce théorème que $\hat{S}^2$ est une équation automorphe par G . Comme l'ordre de l'action de G sur Q est 2, alors $(\hat{S}^2, M, \alpha, G)$ est un G -fibré principal. Si on pose:

$$P^k = \{z \in S^k \mid \beta(z) = 0\} \quad 0 \in Q$$

alors P^k est la β -fibre de $\hat{S}^k$ sur $0 \in Q$, et (P^k, M, α, G_0) est un fibré des repères de deuxième ordre qui l'on appelle *CR-fibré des repères de deuxième ordre associé à (M, D, J)* .

4. La connexion de Cartan d'une CR-variété

Une section $\sigma : \hat{S}^2 \rightarrow J^1 \hat{S}^2$ est un invariante par G si:

$$\sigma(g \cdot z) = g \cdot \sigma(z) \quad z \in \hat{S}^2 \text{ et } g \in G$$

Chaque section σ détermine une *distribution horizontal* sur le fibré $\hat{S}^2 \xrightarrow{\alpha} M$:

$$H_\sigma(z) = \sigma(z)_* (T_{\alpha(z)} M) \quad ; \quad z \in \hat{S}^2$$

Comme σ est un invariante par G alors H_σ est une *connexion* sur le fibré principal $(\hat{S}^2, M, \alpha, G)$.

Si θ est un champ des vecteurs sur M alors son *relèvement horizontal* est donné par:

$$\sigma(\theta)(z) = \sigma(z)_* (\theta(\alpha(z))) \quad z \in \hat{S}^2$$

La *courbure associée à σ* est définie par:

$$(4.1) \quad k_\sigma(\theta, \eta) = [\sigma(\theta), \sigma(\eta)] - \sigma[\theta, \eta]$$

La *forme de la connexion H_σ* est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_\sigma : T\hat{S}^2 &\rightarrow \mathfrak{g} \\ \omega_\sigma(z)(\eta) &= \tau(z)^{-1} (\sigma(z)_* (d\alpha(\eta)) - \eta) \end{aligned}$$

où

$$\tau(z) : \zeta \rightarrow v_z \hat{S}^2$$

$$\tau(z) \left(-\frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} g(t) \cdot z \Big|_{t=0}$$

L'équation de structure est donnée par:

$$d\omega_\sigma + [\omega_\sigma, \omega_\sigma] = \Pi_\sigma$$

et la relation entre k_σ et Π_σ est la suivante:

$$(4.2) \quad \tau(z) \circ \Pi_\sigma(z) = k_\sigma(z) \circ da$$

La restriction de ω_σ à P^2 est une connexion de Cartan sur le fibré principal (P^2, M, α, G_0) .

La connexion qui a la plus grande symétrie sur $\hat{S}^2$ provient des sections $\sigma : \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^3$. En général, $\hat{S}^3$ n'est pas surjective sur $\hat{S}^2$.

On définit le prolongement holonome jusqu'à l'ordre 2 de $\hat{S}^2$ par

$$\hat{S}^{2,1} = \{z \in J^1 \hat{S}^2 \mid \Pi_{1,1}(z) = \Pi_2(z)\}$$

où les applications $\Pi_{1,1} : J^1 \hat{S}^2 \rightarrow J^1 \hat{S}^1$ et $\Pi_2 : J^1 \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^2$ sont définies par:

$$\Pi_{1,1}(J_X^1 s) = J_X^1 \Pi_1 s \text{ et } \Pi_2(J_X^1 s) = s(x) ; s \in \hat{S}^2$$

$\Pi_{1,1}$ est le prolongement de $\Pi_1 : \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^1$ et Π_2 est l'extension de $\Pi_1 : \hat{S}^3 \rightarrow \hat{S}^2$ à $J^1 \hat{S}^2$.

Proposition 4.3 Comme $\hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^1$ est une fibration, alors $\hat{S}^{2,1} \xrightarrow{\Pi_2} \hat{S}^2$ est une fibration (surjection surjective). En plus, $\hat{S}^{2,1} \xrightarrow{\Pi_2} \hat{S}^2$ est un fibré affine sur le fibré vectoriel $TM^* \otimes_{\hat{S}^2} \phi^2 \rightarrow \hat{S}^2$ où ϕ^2 est le symbole de $\hat{S}^2$.

Démonstration: Soit $z \in \hat{S}^2$. Si $w = \Pi_1(z)$ et $\varphi : \hat{S}^1 \rightarrow \hat{S}^2$ une section telle que $\varphi(w) = z$, (elle existe localement parce que $\hat{S}^2 \xrightarrow{\Pi_1} \hat{S}^1$ est une fibration), et $s : M \rightarrow \hat{S}^1$ une section telle que $J_X^1 s = z$, alors si on considère la section $\sigma = \varphi \circ s$ on a:

$$\Pi_{1,1}(J_X^1 \sigma) = J_X^1 \Pi_1 \sigma = J_X^1 s = z$$

$$\Pi_2(J_X^1 \sigma) = \sigma(x) = \varphi(s(x)) = z$$

C'est-à-dire, $x = J_X^1 \sigma \in \hat{S}^{2,1}$ et $\Pi_2(X) = z$. Donc, $\hat{S}^{2,1} \xrightarrow{\Pi_2} \hat{S}^2$ est surjective.

Par ailleurs, soit $z, w \in \hat{S}^{2,1}$ tels que $\Pi_2(z) = \Pi_2(w)$.

Alors $v = w_* - z_* \in T_X M^* \otimes V \hat{S}^2$ et $d\Pi_1 \circ v = d\Pi_1 \circ w_* - d\Pi_1 \circ z_*$.

Comme, $z, w \in \hat{S}^{2,1}$ alors $\Pi_{1,1}(z) = \Pi_2(z)$ et $\Pi_{1,1}(w) = \Pi_2(w)$. Cela montre que $d\Pi_1 \circ z_* = \Pi_2(z)_*$ et $d\Pi_1 \circ w_* = \Pi_2(w)_*$. Donc, $d\Pi_1 \circ v = 0$. C'est-à-dire, $v \in TM^* \otimes V^1 \hat{S}^2$, où $V^1 \hat{S}^2$ est le fibré vertical de la fibration $\hat{S}^2 \rightarrow S^1$. De l'identification fondamentale $[G] V_Z^1 \hat{S}^2 = \phi^2(z)$.

Proposition 4.4 Soit $\sigma: \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^{2,1}$ alors

$$d\Pi_1(\sigma(\theta)(z)) = \Pi_2(z)_*(\theta(\alpha)(z))$$

Démonstration: Si $z = J_X^1 \varphi \in \hat{S}^{2,1}$ alors $\Pi_2(z) = \Pi_{1,1}(z)$. Donc, $\Pi_2(z)_* = \Pi_{1,1}(z)_*$. Mais, $\Pi_{1,1}(z)_* = (J_X^1 \Pi_1 \varphi)_* = d(\Pi_1 \circ \varphi)(x) = d\Pi_1 \circ d\varphi(x) = d\Pi_1 \circ z_*$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} d\Pi_1(\sigma(\theta)(z)) &= d\Pi_1(\sigma(z)_*(\theta(\alpha)(z))) = \\ (d\Pi_1 \circ \sigma(z)_*)(\theta(\alpha)(z)) &= \Pi_2(\sigma(z))_*(\theta(\alpha)(z)) = z_*(\theta(\alpha)(z)) \end{aligned}$$

Corolaire 4.5 Si $\sigma: \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^{2,1}$ alors on a:

$$d\Pi_0[\sigma(\theta), \sigma(n)](z) = \Pi_1(z)_*([\theta, n](\alpha(z)))$$

Proposition 4.6 Soit $\sigma: \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^{2,1}$ une section alors

$$k_\sigma \in \Lambda^2 TM^* \otimes V^0 \hat{S}^2.$$

Démonstration: Cela suivre du lemme e du Corolaire ci-dessus. (voir aussi [v]).

Le groupe de Lie G opère sur Q . Cette action induit une filtration dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}: \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 = 0$ où $\mathfrak{g}_k$ est

l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de l'action de G sur $J^k Q$ dans le k -jet de l'identité on point $0 \in Q$.

L'isomorphisme d'espace vectoriel $\tau(z): \zeta + V_z \hat{S}^2$ est tel que $\tau(z): \zeta_2 + V_z^2 \hat{S}^2$ est un isomorphisme. En particulier, $\tau(z): \zeta_0 + V_z^0 \hat{S}^2$ est un isomorphisme.

De (4.2) et de la proposition (4.6) on a:

Proposition 4.7 Soit $\sigma: \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^2$, alors la connexion de Cartan $\omega_\sigma: TP^2 \rightarrow \zeta$ est sans torsion, c'est-à-dire $\Pi_\sigma \in \Lambda^2 TP^* \otimes \zeta_0$.

Si $\sigma: \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^2$, on a vu que $k_\sigma \in \Lambda^2 TM^* \otimes V^0 \hat{S}^1$.

La partie principale de la courbure est définie par

$$k_\sigma^1 = d\Pi_1 \circ k_\sigma \in \Lambda^2 TM^* \otimes V^0 \hat{S}^1$$

Comme le symbole ϕ^1 de $\hat{S}^1$ est identifié au espace vertical on peut écrire

$$k_\sigma^1 \in \Lambda^2 TM^* \otimes \phi^1$$

$$\hat{S}^2$$

Pour chaque $z \in \hat{S}^2$, $k_\sigma^1(z) \in \Lambda^2 T_X M^* \otimes \phi^1(\Pi_1(z))$

Si $z^1 = \Pi_1(z)$ alors $z^1_*: T_X M \rightarrow T_0 Q$ où $x = \alpha(z)$ $0 = \beta(z)$

On définit

$$R_\sigma^1(z) = (1 \otimes (z^1_*)^{-1}) \circ k_\sigma^1(z) \in \Lambda^2 T_X M^* \otimes (T_X M^* \otimes T_X M)$$

On démontre facilement que

Proposition 4.8 Quelque soit $z \in P^2$ et $g \in G$, alors

$$R_\sigma^1(gz) = R_\sigma^1(z)$$

Cette proposition montre que R_σ^1 définit un tenseur sur M :

$R_\sigma \in \Lambda^2 \underline{TM}^* \otimes \underline{TM}^* \otimes \underline{TM}^*$ défini par

$$R_\sigma(x) = R_\sigma^1(z)$$

où $z \in P^2$ et $\alpha(z) = x$

R_0 s'appelle *tenseur fondamental associé à σ* .

On verra que à chaque CR-variété on peut associer une section $\sigma : \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^{2,3}$ invariante qui est univoquement déterminée par des conditions supplémentaires algébriques sur le tenseur de courbure.

Soit $\delta : \Lambda^2 TM^* \otimes \phi^k \rightarrow \Lambda^{k+1} TM \otimes \phi^{k-1}$ le complexe de Spencer de l'équation $\hat{S}^2$ [voir G]

Alors on montre que [V]:

Proposition 4.9 1) $\delta k_0^1 = 0$

ii) Se $\varphi : \hat{S}^2 \rightarrow \hat{S}^{2,3}$ est une autre section alors

$$k_\phi^1 - k_\sigma^1 = \delta(\varphi - \sigma)$$

où $(\varphi - \sigma) \in TM^* \otimes \phi^2$ [voir V]

Pour donner une description de k_0^1 on analyse l'algèbre $gr(\zeta) = v \oplus g^0 \oplus g^1$ associée à la filtration $\zeta \supset \zeta_0 \supset \zeta_1 \supset \zeta_2 = 0$

ζ est formée des matrices de la forme:

$$\zeta = \left\{ \begin{bmatrix} a & -2i\bar{c} & b \\ f & u & c \\ e & 2i\bar{f} & -\bar{a} \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} u + \bar{u} = 0 \\ b, e \in \mathbb{R} \\ a + u - \bar{a} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\zeta_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -2i\bar{c} & b \\ 0 & u & c \\ 0 & 0 & -\bar{a} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\zeta_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Si on fixe une base $(Z, Z\bar{Z}, Z_0)$ de $\zeta^{\mathbb{C}} \subset \zeta^{\mathbb{C}}$ on a :

$$V = \{fZ + \bar{f}Z\bar{Z} + eZ_0 \mid f \in \mathbb{C} \text{ et } e \in \mathbb{R}\} = T_0Q$$

$$g^0 = \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 & c \\ 0 & \bar{h} & \bar{c} \\ 0 & 0 & h + \bar{h} \end{bmatrix} \mid c, h \in \mathbb{C} \right\} \subset T_0Q^* \otimes T_0Q$$

$$g^1 = \{b \cdot B \mid b \in \mathbb{R}\} \subset S^2(T_0Q^*) \otimes T_0Q$$

$$\text{où } B = Z^1 \otimes Z^1 \otimes Z_1 + Z^1 \otimes Z^1 \otimes Z\bar{Z} + Z^1 \otimes Z^1 \otimes Z_0 \in S^2(T_0Q^*) \otimes T_0Q$$

L'isomorphisme $\tau(z) : \zeta_z \rightarrow V_z \hat{S}^2$ induit des isomorphismes des espaces vectoriels :

$$\Delta(z) : g^0 \rightarrow \phi^1(z)$$

$$\Delta(z) : g^1 \rightarrow \phi^2(z)$$

Cela montre qu'on peut considérer la partie principale de la courbure Π_Q donnée par

$$\Pi_Q^1 \in \Lambda^2 TP^* \otimes g^0$$

$$\Delta(z) \circ \Pi_Q^1 = k_Q^1 \circ da$$

Donc si on fixe aussi un CR-repère adapté $(F, F\bar{F}, F_0)$ de M la partie principale de la courbure est donnée par

$$k_Q^1 = \begin{bmatrix} \Pi_Q^2 & 0 & \Pi_Q^1 \\ 0 & \bar{\Pi}_Q^2 & \bar{\Pi}_Q^1 \\ 0 & 0 & \Pi_Q^2 + \bar{\Pi}_Q^2 \end{bmatrix} \in \Lambda^2 TM^* \otimes \phi^1$$

$$\text{où } \Pi_Q^2, \Pi_Q^1 \in \Lambda^2 TM^*.$$

Le symbole ϕ^2 est représenté par

$$\phi^2 = \{b \cdot B \mid b \in \mathbb{R}\} \subset S^2 TM^* \otimes TQ$$

où $B \in S^2(TM^*) \otimes TQ$. Si on considère $B : TM + TM^* \otimes TQ$ alors la représentation matricielle de B dans la base (F_1, F_1^*, F_0) de M et (Z_1, Z_1^*, Z_0) de TQ est donnée par:

$$B = \begin{bmatrix} F^0 & 0 & F^1 \\ 0 & F^0 & F^1 \\ 0 & 0 & 2 F^0 \end{bmatrix}$$

Soit $\sigma, \varphi : \hat{S}^2 + \hat{S}^2$ deux sections, alors de la proposition (4.3) on a:

$$f = \varphi - \sigma \in TM^* \otimes \phi^2$$

Si on pose $f = \omega \otimes B$,

$$\delta f = \begin{bmatrix} \omega \wedge F^0 & 0 & \omega \wedge F^1 \\ 0 & \omega \wedge F^0 & \omega \wedge F^1 \\ 0 & 0 & \omega \wedge F^0 \end{bmatrix}$$

De la proposition (4.9) on a

$$k_f^1 - k_f^1 = \delta f$$

C'est-à-dire,

$$\pi_f^2 - \pi_\sigma^2 = \omega \wedge F^0$$

$$\pi_f^3 - \pi_\sigma^3 = \omega \wedge F^1$$

$$\text{Si } \pi_\sigma^2 = A_\sigma F^1 \wedge F^1 + B_\sigma F^1 \wedge F^0 + C_\sigma F^1 \wedge F^0$$

$$\pi_\sigma^3 = a_\sigma F^1 \wedge F^1 + b_\sigma F^1 \wedge F^0 + c_\sigma F^1 \wedge F^0$$

$$\omega = \alpha F^1 + \bar{\alpha} F^1 + \beta F^0, \beta \in \mathbb{R}$$

alors

$$(4.10) \quad \begin{array}{ll} B_f - B_\sigma = \alpha & a_f - a_\sigma = -\bar{\alpha} \\ C_f - C_\sigma = \bar{\alpha} & b_f - b_\sigma = -\beta \\ A_f - A_\sigma = 0 & c_f - c_\sigma = 0 \end{array}$$

On observe, maintenant, que $g^0 = g^{01} \otimes g^{02}$ où

$$g^{01} = \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h} & 0 \\ 0 & 0 & h + \bar{h} \end{bmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{et} \quad g^{02} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\}$$

Donc la partie principale k_σ^1 de la courbure se décompose

$$k_\sigma^1 = k_\sigma^{11} \otimes k_\sigma^{12}$$

Dans un repère adapté (F, F^1, F^0) on a

$$k_\sigma^{12} = \pi_\sigma^1 F^0 \otimes F_1 + \pi_\sigma^3 F^0 \otimes F_1^1 \in \Lambda^2 TM^* \otimes TM^* \otimes TM$$

on définit le tenseur $T_\sigma \in TM^* \otimes TM^*$ comme la contraction de k_σ^{12} dans la dernière composante, c'est-à-dire,

$$T_\sigma = \bar{a}_\sigma F^1 \otimes F^0 + a_\sigma F^1 \otimes F^0 + (b_\sigma + \bar{b}_\sigma) F^0 \otimes F^0$$

Alors, on peut énoncer:

Théorème 4.11 Il existe une seule section G -invariante $\sigma : \bar{S}^2 \rightarrow S^{2,1}$ telle que $T_\sigma = 0$

Démonstration: Si σ et φ sont deux telles sections alors $a_\sigma = a_\varphi = (b_\sigma + \bar{b}_\sigma) = (b_\varphi + \bar{b}_\varphi) = 0$

De (4.10), $\alpha = \beta = 0$. Donc $f = \omega \otimes B = 0$

Comme $f = \sigma - \varphi$. Alors $\sigma = \varphi$. L'existence on démontre de la façon suivante. Soit φ une section locale quelq'une. Sin on pose

$$\omega = -\bar{a}_\varphi F^1 + a_\varphi F^1 - \frac{(b_\varphi + \bar{b}_\varphi)}{2} F^0$$

$$f = \omega \otimes B$$

Alors $\sigma = \varphi + f$ a la propriété $T_\sigma = 0$. Donc, on peut couvrir $\bar{S}^2$ par des sections avec la propriété désirée. L'unicité assure la globalisation.

Comme corolaire de ce théorème on a:

Théorème 4.12 Il existe une seule connexion de Cartan $\omega : TP^2 \rightarrow \mathfrak{g}$ sur la fibré (P^2, M, α, G_0) sans torsion et que vérifie $T_\sigma = 0$.

On appelle cette connexion, la *connexion normale pseudo-conforme* sur le CR-fibré de repère de deuxième ordre (P^2, M, α, G_0) .

Si l'on pose,

$$\omega_\sigma = \begin{bmatrix} \omega_0^0 & -2i\bar{\omega}_2^1 & \omega_2^0 \\ \omega_0^1 & \omega_1^1 & \omega_2^1 \\ \omega_0^2 & 2i\bar{\omega}_0^1 & -\bar{\omega}_0^0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \omega_0^0 + \omega_1^1 - \bar{\omega}_0^0 &= 0 \\ \omega_1^1 + \bar{\omega}_1^1 &= 0 \\ \omega_0^2, \omega_0^0 &\text{ réels} \end{aligned}$$

alors de l'équation de structure

$$d\omega_\sigma + [\omega_\sigma, \omega_\sigma] = \pi_\sigma$$

on a:

$$d\omega_0^0 = \omega_2^0 \wedge \omega_0^2 - 2i\bar{\omega}_2^1 \wedge \omega_0^1 + \pi_0^0$$

$$d\omega_0^1 = \omega_0^1 \wedge \omega_0^0 + \omega_1^1 \wedge \omega_0^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_0^2 + \pi_0^1$$

$$d\omega_0^2 = \omega_0^2 \wedge \omega_0^0 + 2i\bar{\omega}_0^1 \wedge \omega_0^1 + \bar{\omega}_0^0 \wedge \omega_0^2 + \pi_0^2$$

$$d\omega_1^1 = -2i\omega_0^1 \wedge \bar{\omega}_2^1 + 2i\omega_2^1 \wedge \bar{\omega}_0^1 + \pi_1^1$$

$$d\omega_2^0 = \omega_0^0 \wedge \omega_2^0 - 2i\bar{\omega}_2^1 \wedge \omega_2^1 - \omega_2^0 \wedge \bar{\omega}_0^0 + \pi_2^0$$

$$d\omega_2^1 = \omega_0^1 \wedge \omega_2^0 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 - \omega_2^1 \wedge \bar{\omega}_0^0 + \pi_2^1$$

Comme la connexion est sans torsion alors $\pi_0^1 = 0$ $\pi_0^2 = 0$

Si on passe ces formules à l'algèbre graduée par l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} + \text{gr}(\mathfrak{g}) &= \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \\ (\omega_j^i) + (\Omega_0, \Omega_1) &\oplus (\Omega_2, \Omega_3) \oplus (\Omega_4) \end{aligned}$$

$$\text{où: } \Omega_0 = \frac{-\omega_0^2}{2}$$

$$\Omega_1 = \omega_0^1$$

$$\Omega_2 = \omega_1^1 - \omega_0^0$$

$$\Omega_3 = -2\omega_2^1$$

$$\Omega_4 = 2\omega_2^0$$

on obtient les formules de Cartan (C):

$$\begin{aligned} d\Omega_0 &= i\Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_1 - \Omega_0 \wedge (\Omega_2 + \bar{\Omega}_2) + \Pi_0 \\ d\Omega_1 &= -\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_0 \wedge \Omega_3 + \Pi_1 \\ (4.13) \quad d\Omega_2 &= 2i\Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_3 + i\bar{\Omega}_1 \wedge \Omega_3 - \Omega_0 \wedge \Omega_4 + \Pi_2 \\ d\Omega_3 &= -\Omega_1 \wedge \Omega_4 - \Omega_2 \wedge \Omega_3 + \Pi_3 \\ d\Omega_4 &= i\Omega_3 \wedge \bar{\Omega}_3 - (\Omega_2 + \bar{\Omega}_2) \wedge \Omega_4 + \Pi_4 \end{aligned}$$

Comme la connexion est sans torsion

$$\Pi_0 = -\frac{\Pi_0^2}{2} = 0 \quad \Pi_1 = \Pi_0^1 = 0$$

Si on écrit les équations de structure dans une section de P^2 alors on arrive à montrer que

$$\Pi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \Pi_3 = c_0 \Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_0 \quad \text{et}$$

$$\Pi_4 = s \Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_0 + \bar{s} \Omega_1 \wedge \Omega_0$$

La partie principale de la courbure est donnée par

$$\Pi_{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Pi_3 \\ 0 & 0 & \bar{\Pi}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur fondamental R_{σ} dans un CR-repère adapté $(F_1 \bar{F}_1 F_0)$ est donnée par

$$R_{\sigma} = \Pi_3 F^0 \otimes F_1 + \bar{\Pi}_3 F^0 \otimes \bar{F}_1$$

$$(4.14) \quad R_G = c_G F^{\bar{1}} \wedge F^0 \otimes F^0 \otimes F_1 + \bar{c}_G F^1 \wedge F^0 \otimes F^0 \otimes F_{\bar{1}}$$

On peut, encore, déterminer c_G par rapport les constants de structures du CR-repère $(F_1 F_{\bar{1}} F_0)$:

$$(4.15) \quad c_G = c_R - R_{\bar{1}} + i b \Delta + b_0$$

avec les notations (2.7).

Si on suppose $R_G = 0$ alors $\Pi_G^1 = 0$. Si on différencie l'avant dernière équation de (4.12) et on remplace dans la dernière on obtient $\Pi_{\bar{1}} = 0$. Cela montre que $R_G = 0$ implique $\Pi_G = 0$. Donc, la distribution H_G est complètement intégrable. Donc $\hat{S}^2$ est intégrable. Une solution de $\hat{S}^2$ est une équivalence entre la CR-structure sur M et la CR-structure canonique de Q . Donc,

Théorème 4.16 Si $R_G = 0$, c'est-à-dire le tenseur fondamental est 0, alors la CR-variété est localement équivalente à la CR-variété homogène Q .

On suppose, maintenant $R_G \neq 0$ partout.

Comme

$$R_G = c_G F^{\bar{1}} \wedge F^0 \otimes F^0 \otimes F_1 + \bar{c}_G F^1 \wedge F^0 \otimes F^0 \otimes F_{\bar{1}}$$

alors si $(E_1 E_{\bar{1}} E_0)$ est un autre CR-repère adapté

$$R_G = \gamma E^{\bar{1}} \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_1 + \bar{\gamma} E^1 \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_{\bar{1}}$$

si on écrit

$$E_1 = p_1^1 F_1 \quad E_{\bar{1}} = \bar{E}_{\bar{1}}$$

$$E_0 = p_0^1 F_1 + p_0^{\bar{1}} F_{\bar{1}} + p_0^0 E_0$$

on obtient

$$\gamma = c p_1^1 (p_1^{\bar{1}})^3$$

Si on impose $\gamma = 1$ (voir Cartan [C]) on détermine

$$p_1^1 = \epsilon \sqrt{\frac{\bar{c}}{\sqrt{c \bar{c}}}} \quad \epsilon = \pm 1$$

$$p_0^0 = p_1^1 \cdot p_1^{\bar{1}} = \sqrt{c \bar{c}}$$

Comme $(E_1, E_1^{\bar{1}}, E_0)$ est un CR-répère adapté alors $[E_1, E_0] = 0 \mod (E_1, E_1^{\bar{1}})$. Cela, détermine,

$$p_0^1 = \frac{-i}{4} \left(\frac{c_1^{\bar{1}}}{c} + \frac{\bar{c}_1^{\bar{1}}}{\bar{c}} \right) p_1^1$$

On dit qu'un pont $p \in M$ est *umbilique* si $R_G(p) = 0$. Donc, on vient de voir que une CR-variété sans points umbilique admet en chaque point deux CR-répères privilégiés $(E_1, E_1^{\bar{1}}, E_0)$ et $(-E_1, -E_1^{\bar{1}}, E_0)$ tels que le tenseur fondamental est donné par

$$R_G = E_1^{\bar{1}} \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_1 + E^1 \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_1^{\bar{1}}$$

Cela montre que l'ensemble E des CR-répères adaptés privilégiés d'une CR-variété M sans points umbiliques forment un Z_2 - *fibré principal* sur M .

Théorème 4.17 Soit M une CR-variété simplement connexe sans points umbiliques. Alors M admet un CR-répère $(E_1, E_1^{\bar{1}}, E_0)$ définie sur toute la variété M tel que $R_G = E_1^{\bar{1}} \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_1 + E^1 \wedge E^0 \otimes E^0 \otimes E_1^{\bar{1}}$ et:

$$[E_1, E_1^{\bar{1}}] = c E_1 - \bar{c} E_1^{\bar{1}} + i E_0$$

$$[E_1, E_0] = i a E_1 + \bar{b} E_1^{\bar{1}}$$

$$[E_1^{\bar{1}}, E_0] = b E_1 - i a E_1^{\bar{1}}$$

En particulier M est parallélisable.

Les fonctions (c^2, a, b) sont appelées *les invariants fondamentales* de la CR-variété M non umbilique.

Remarques:

a) Si on change des repères privilégiés alors les constantes a et b ne change pas. Par contre c change de signal. Cela, justifie la définition ci-dessus.

b) Si on écrit $\Omega_2 = \alpha \Omega_1 - \bar{\alpha} \bar{\Omega}_1 + i\beta \Omega_0$

$$\Omega_3 = i\gamma \Omega_1 + \theta \bar{\Omega}_1 + \eta \Omega_0$$

$$\Omega_4 = \sigma \Omega_1 + \bar{\sigma} \bar{\Omega}_1 + \zeta \Omega_0$$

et on fait $\Omega_1 = E^1$ $\Omega_0 = E^0$ alors

$$\alpha = \bar{c} \quad \beta = \frac{\Delta}{2} \quad \eta = R$$

$$\theta = b \quad \gamma = \frac{\Delta}{2} + a$$

$$\sigma = -\frac{1}{2} \frac{\bar{R}}{R}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} (R_1 + \bar{R}_1 + \bar{c} R + c \bar{R} + 2((\frac{\Delta}{2} + a)^2 + b \bar{b}))$$

Cela, sont les invariants de Cartan (C) qui l'on obtient des invariants fondamentales (a, b, c^2) .

Les résultats antérieurs permet de classifier les CR-variétés homogènes de dimension 3.

On dit que M est homogène si $\text{Aut}(M)$ opère transitivement sur M .

Théorème 4.18 Soit (M, D, J) une CR-variété de dimension 3, homogène, sans points umbiliques. Alors le groupe d'automorphismes de M est un groupe de Lie G de dimension 3 tel que son algèbre de Lie possède une base (X_1, X_2, X_3) avec les propriétés:

i) (X_1, X_2) est un système de générateur de D et $J(X_1) = X_2$

ii) (X_1, X_2, X_3) appartient à un des cas suivants:

a) $[X_1 X_2] = X_3$,

$$[X_2 X_3] = -\frac{6a^2 - 4}{3a} X_1 \quad a \neq 0$$

$$[X_3 X_1] = -\frac{6a^2 + 4}{3a} X_2$$

$$b) [X_1 X_2] = 2 \epsilon \left(\frac{2 - 3 a^2}{2 a} \right)^{1/2} X_2 + X_3 \quad 0 < a < \sqrt{6}/3$$

$$[X_2 X_3] = 0 \quad a < -\sqrt{6}/3$$

$$[X_3 X_1] = -4 a X_2 \quad \epsilon = \pm 1$$

$$c) [X_1 X_2] = 2 \epsilon \left(\frac{2 + 3 a^2}{-2 a} \right)^{1/2} X_1 + X_3$$

$$[X_2 X_3] = -4 a X_1 \quad a < 0$$

$$[X_3 X_1] = 0 \quad \epsilon = \pm 1$$

En plus, $M \cong G$ dans le cas ii) a) où

$M \cong G/Z_2$ dans les cas ii) b) et ii) c)

Démonstration: Comme M est homogène, $G = \text{Aut}(M)$ opère transitivement sur M . Soit $0 \in M$ et G_0 l'isotropie en ce point. Alors $M \cong G/G_0$. Si E est le Z_2 -fibré des repères privilégiés de M , alors G preserve E . Donc, $G_0 = \{e\}$ ou $G_0 = Z_2$. Cela, montre que $\dim G = 3$. Si on considère l'application $\phi : G \rightarrow M$, $\phi(g) = g \cdot 0$ alors il'existe une voisinage V de $e \in G$ tel que $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ est un difféomorphisme. Si $A \in \mathcal{G}$ alors $\Lambda_* = \phi_* (A/V)$ sur $\phi(V)$ est invariante par G . Il est clair que on peut choisir V tel que sur $\phi(V)$ il existe une section de E sur $\phi(V)$, $(E_1 E_1^* E_0)$ comme dans le théorème 4.17. Donc, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}^c$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par $(E_1 E_1^* E_0)$. Du théorème 4.17 on a:

$$[E_1 E_1^*] = c E_1 - \bar{c} E_1^* + i E_0$$

$$[E_1 E_0] = i a E_1 + \bar{b} E_1^* \quad a, b, c \text{ sont constantes.}$$

$$[E_1^* E_0] = b E_1 - i a E_1^*$$

De la formule (2.3):

$$c_0 = cR - R\bar{i} + i b \Delta + b_0$$

Du théorème précédent $c_0 = 1$ alors

$$cR + i b \Delta = 1$$

$$\text{où } R = -\frac{2i}{3} (b\bar{c} + i a c)$$

$$\Delta = \frac{2c\bar{c} - 3a}{2}$$

Donc,

$$ac^2 - \frac{3ia b}{2} = 1$$

De l'identité de Jacobi (2.3) : $b\bar{c} = i \cdot a \cdot c$

$$\text{Si on résout le système: } \begin{cases} ac^2 - \frac{3ia b}{2} = 1 \\ b\bar{c} = i a c \end{cases}$$

on obtient les trois cas:

$$a) c = 0 \text{ et } b = \frac{2i}{3a}$$

$$b) c \neq 0, c = \bar{c}, b = ia \text{ et } c = \epsilon \sqrt{\frac{2 - 3a^2}{2a}}$$

$$\text{où: } 0 < a < \sqrt{6}/3 \quad 0 - \sqrt{6}/3, \epsilon = \pm 1$$

$$c) c \neq 0 \quad c = -\bar{c}, b = -ia \quad c = i\epsilon \sqrt{\frac{2 + 3a^2}{-2a}}$$

$$\text{où: } a < 0$$

$$\text{Si on pose } X_1 = E_1 + E_1^- \quad X_1^- = i(E_1 - E_1^-)$$

$$X_3 = 2E_0$$

on obtient les trois cas du théorème. En plus, on voit du remarque qui suit le théorème 4.17 que $G_0 = \{e\}$ si et seulement si $C \neq 0$.

On dit que une CR-variété M est *régulière* si les invariants fondamentales (a, b, c) sont indépendentes.

Théorème 4.19 (Cartan) Soit M et M' CR-variétés régulières et $(a, b, c), (a', b', c')$ leurs respectives invariants. Alors un diféomorphisme $f : M \rightarrow M'$ est un CR-isomorphisme si et seulement si

$$(4.20) \quad \begin{aligned} a &= a' \cdot f & b &= b' \cdot f & c &= c' \cdot f \\ a_j &= a'_j \cdot f & b_j &= b'_j \cdot f & c_j &= c'_j \cdot f \quad j = 1, \bar{1}, 0 \end{aligned}$$

où, par exemple, $a_j = E_j(a)$.

Démonstration: Il est clair que ces conditions sont nécessaires.

Alors de (4.20) on a

$$f^*(da') = da \quad f^*(db') = db \quad f^*(dc') = dc$$

D'autre côté, si (Ω_j) est la base dual (complexe) de (E_j) on a:

$$da = a_1 \Omega_1 + a_{\bar{1}} \Omega_{\bar{1}} + a_0 \Omega_0$$

$$db = b_1 \Omega_1 + b_{\bar{1}} \Omega_{\bar{1}} + b_0 \Omega_0$$

$$dc = c_1 \Omega_1 + c_{\bar{1}} \Omega_{\bar{1}} + c_0 \Omega_0$$

et les mêmes relations pour (a', b', c')

Si on applique f^* à da', db', dc' et on utilise (4.20) on obtient

$$a_1 (\Omega_1 - f^*(\Omega'_1)) + a_{\bar{1}} (\Omega_{\bar{1}} - f^*(\Omega'_{\bar{1}})) + a_0 (\Omega_0 - f^*(\Omega'_0)) = 0$$

$$b_1 (\Omega_1 - f^*(\Omega'_1)) + b_{\bar{1}} (\Omega_{\bar{1}} - f^*(\Omega'_{\bar{1}})) + b_0 (\Omega_0 - f^*(\Omega'_0)) = 0$$

$$c_1 (\Omega_1 - f^*(\Omega'_1)) + c_{\bar{1}} (\Omega_{\bar{1}} - f^*(\Omega'_{\bar{1}})) + c_0 (\Omega_0 - f^*(\Omega'_0)) = 0$$

Comme les variétés sont régulières alors ce système est déterminé, donc $f^*(\Omega'_j) = \Omega_j$; $j = 1, \bar{1}, 0$

Cela montre que f préserve les CR-structures.

Comme corolaire du théorème d'équivalence on a le théorème fondamental des hypersurfaces de $\mathbb{CP}^2$.

Soit $\varphi : M \rightarrow \mathbb{CP}^2$ une immersion réelle analytique. Alors M hérite une CR-structure induite de la structure complexe de $\mathbb{CP}^2$, qu'on suppose régulière. Soit (a, b, c) les invariants fondamentales et (a_j, b_j, c_j) les invariants dérivées alors:

4.20 Théorème Fondamental des hypersurfaces de $\mathbb{CP}^2$

Soit $\varphi, \varphi' : M \rightarrow \mathbb{CP}^2$ deux immersions analytiques réelles régulières. Alors il existe, pour chaque point $x \in M$ un voisinage $U \subset \mathbb{CP}^2$ de $\varphi(x)$ et $U' \subset \mathbb{CP}^2$ de $\varphi'(x)$ et une transformation holomorphe $F : U \rightarrow U'$ tel que $\varphi' = f \circ \varphi$ si et seulement si

$$(4.22) \quad \begin{aligned} a &= a' & , & \quad b = b' & , & \quad c = c' \\ a_j &= a'_j & , & \quad b_j = b'_j & , & \quad c_j = c'_j \end{aligned} \quad \text{pour } j = 0, 1, \bar{1}$$

Démonstration: Il est clair que ces conditions sont nécessaires.

On suppose que les conditions (4.22) sont vérifiées. Pour chaque $x \in M$ on choisit un voisinage V de x tel que $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ et $\varphi': V \rightarrow \varphi'(V)$ soient des difféomorphismes. Alors $f = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ est dans les conditions du théorème d'équivalence. Donc, $f: \varphi(V) \rightarrow \varphi'(V)$ est un CR-difféomorphisme. D'après un théorème de Tanaka (T_1) il existe une extension holomorphe $F: U \rightarrow U'$ de f tel que $F|_{\varphi(V)} \cap U = f|_{\varphi(V)} \cap U$. Alors $\varphi' = F \circ \varphi$.

BIBLIOGRAPHIE

- [C] E. CARTAN: Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes I, II (Oeuvres. II, 2, 1231-1304) (Oeuvres II, 2, 1217-1238).
- [CM] S.S. CHERN and J. MOSER: Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math. 133 (1974) 219-271.
- [G] H. GOLDSCHMIDT: Integrability criteria for systems of Non-linear Partial Differential Equations. J. Diff. Geom. I (1967) 269-307.
- [P] H. POINCARÉ: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. Rend. Circ. Math. Palermo 23 (1907) 185-220 (où Oeuvres. IV, 244-289)
- [T₁] N. TANAKA: On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables. J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 397-429

- [T₂] N. TANAKA. On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras, and Cartan connections. Japan. J. Math. 2 (1976), 131-190.
- [V] J.A. VERDERESI: S.E.D.P. dans la géométrie différentielle. (à apparaitre).

J.A. Verderesi - J.M. Veloso
Universidade de São Paulo - I.M.E.
Caixa Postal 20.570 - Ag. Iguatemi
São Paulo - Brasil

TRABALHOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÍTULOS PUBLICADOS

- 80-01 PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. 10 p.
- 80-02 PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. 8 p.
- 80-03 CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Transfinite induction on ordinal configurations. 22 p.
- 80-04 JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. 13 p.
- 80-05 CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de. Notes on many-sorted systems. 25 p.
- 80-06 POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. 10 p.
- 80-07 CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. 10 p.
- 80-08 CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. 21 p.
- 80-09 CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . 8 p.
- 81-10 JONES RODRIGUES, A.R. Units of ZCp^n . 7 p.
- 81-11 KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da. Problems of model and discussive logics. 35 p.
- 81-12 BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Álgebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características 7 p.
- 81-13 POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. Iv. (não paginado)
- 81-14 CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves 5 p.
- 81-15 COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic 8 p.
- 81-16 CASTILLA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. 6 p.
- 81-17 CHEN, C.C. & GOES, C.C. Degenerate minimal surfaces in R^4 . 21 p.
- 81-18 CASTILLA, M.S.A.C. Imagens inversas de algumas aplicações fechadas. 11 p.
- 81-19 ARAGONA VALLEJO, A.J. & EXEL FILHO, R. An infinite dimensional version of Hartogs' extension theorem. 9p.
- 81-20 GONÇALVES, J.Z. Groups rings with solvable unit groups. 15 p.
- 81-21 CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Paraconsistent algebras. 16 p.
- 81-22 GONÇALVES, D.L. Nilpotent actions. 10 p.
- 81-23 COELHO, S.P. Group rings with units of bounded exponent over the center. 25 p.
- 81-24 PARMENTER, M.M. & POLCINO MILIES, F.C. A note on isomorphic group rings. 4 p.
- 81-25 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Hereditary algebras with maximum spectra are of finite type. 10 p.
- 81-26 POLCINO MILIES, F.C. Units of group rings: a short survey. 32 p.
- 81-27 CHEN, C.C. & GACKSTATTER, F. Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces with handles. 14 p.
- 81-28 POLCINO MILIES, F.C. A glance at the early history of group rings. 22 p.
- 81-29 FERRER SANTOS, W.R. Reductive actions of algebraic groups on affine varieties. 52 p.
- 81-30 COSTA, N.C.A. da. The philosophical import of paraconsistent logic. 26 p.
- 81-31 GONÇALVES, D.L. Generalized classes of groups, spaces c-nilpotent and "the Hurewicz theorem". 30 p.
- 81-32 COSTA, N.C.A. da & MORTENSEN, Chris. Notes on the theory of variable binding term operators. 18 p.
- 81-33 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Homogenes & hereditary algebras with maximum spectra. 32 p.
- 81-34 PERESI, L.A. A note on semiprime generalized alternative algebras. 10 p.
- 81-35 MIRAGLIA NETO, F. On the preservation of elementary equivalence and embedding by filtered powers and structures of stable continuous functions. 9 p.
- 81-36 FIGUEIREDO, G.V.R. Catastrophe theory: some global theory a full proof. 91 p.
- 82-37 COSTA, R.C.F. On the derivations of gametic algebras. 17 p.
- 82-38 FIGUEIREDO, G.V.R. A shorter proof of the Thom-Zeeman global theorem for catastrophes of cod ≤ 5 . 7 p.
- 82-39 VELOSO, J.M.M. Lie equations and Lie algebras: the intransitive case. 97 p.
- 82-40 GOES, C.C. Some results about minimal immersions having flat normal bundle. 37 p.
- 82-41 FERRER SANTOS, W.R. Cohomology of comodules II. 15 p.
- 82-42 SOUZA, V.H.G. Classification of closed sets and diffeos of one-dimensional manifolds. 15 p.
- 82-43 GOES, C.C. The stability of minimal cones of codimension greater than one in R^n . 27 p.
- 82-44 PERESI, L.A. On automorphisms of gametic algebras. 27 p.
- 82-45 POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. Torsion units in integral group rings of metacyclic groups. 18 p.

- 82-46 GONÇALVES, J.Z. Free subgroups of units in group rings. 8 p.
- 82-47 VELOSO, J.M.M. New classes of intransitive simple Lie pseudogroups. 8 p.
- 82-48 CHEN, C.C. The generalized curvature ellipses and minimal surfaces. 10 p.
- 82-49 COSTA, R.C.F. On the derivation algebra of zygotical algebras for polyploidy with multiple alleles. 24 p.
- 83-50 GONÇALVES, J.Z. Free subgroups in the group of units of group rings over algebraic integers. 3 p.
- 83-51 MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Free k-triples in linear groups. 7 p.
- 83-52 BRITO, F.G.B. A remark on closed minimal hypersurfaces of S^4 with second fundamental form of constant length. 12 p.
- 83-53 KIIHL, J.C.S. U-structures and sphere bundles. 8 p.
- 83-54 COSTA, R.C.F. On genetic algebras with prescribed derivations. 23 p.
- 83-55 SALVITTI, R. Integrabilidade das distribuições dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita no $gh(n, C)$. 4 p.
- 83-56 MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Construction of open sets of free k-Tuples of matrices. 18 p.
- 83-57 BRITO, F.G.B. A remark on minimal foliations of codimension two. 24 p.
- 83-58 GONÇALVES, J.Z. Free groups in subnormal subgroups and the residual nilpotence of the group of units of group rings. 9 p.
- 83-59 BELOQUI, J.A. Modulus of stability for vector fields on 3-manifolds. 40 p.
- 83-60 GONÇALVES, J.Z. Some groups not subnormal in the group of units of its integral group ring. 8 p.
- 84-61 GOES, C.C. & SIMÕES, P.A.Q. Imersões mínimas nos espaços hiperbólicos. 15 p.
- 84-62 GIAN BRUNO, A.; MISSO, P. & POLCINO MILIES, F.C. Derivations with invertible values in rings with involution. 12 p.
- 84-63 FERRER SANTOS, W.R. A note on affine quotients. 6 p.
- 84-64 GONÇALVES, J.Z. Free-subgroups and the residual nilpotence of the group of units of modular and p-adic group rings. 12 p.
- 84-65 GONÇALVES, D.L. Fixed points of S^1 -fibrations. 18 p.
- 84-66 RODRIGUES, A.A.M. Contact and equivalence of submanifolds of homogenous spaces. 15 p.
- 84-67 LOURENÇO, M.L. A projective limit representation of (DFC)-spaces with the approximation property. 20 p.
- 84-68 FORNARI, S. Total absolute curvature of surfaces with boundary. 25 p.
- 84-69 BRITO, F.G.B. & WALCZAK, P.G. Totally geodesic foliations with integral normal bundles. 6 p.
- 84-70 LANGEVIN, R. & POSSANI, C. Quase-folheações e integrais de curvatura no plano. 26 p.
- 84-71 OLIVEIRA, M.E.G.G. de Non-orientable minimal surfaces in R^n . 41 p.
- 84-72 PERESI, L.A. On baric algebras with prescribed automorphisms. 42 p.
- 84-73 MIRAGLIA NETO, F. & ROCHA FILHO, G.C. The measurability of Riemann integrable-function with values in Banach spaces and applications. 27 p.
- 84-74 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Artin algebras which are equivalent to a hereditary algebra modulo preprojectives. 38 p.
- 84-75 GOES, C.C. & SIMÕES, P.A.Q. The generalized Gauss map of minimal surfaces in H^3 and H^4 . 16 p.
- 84-76 GONÇALVES, J.Z. Normal and subnormal subgroups in the group of units of a group rings. 13 p.
- 85-77 ARAGONA VALLEJO, A.J. On existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator on generalized differential forms. 13 p.
- 85-78 POLCINO MILIES, C.; RITTER, J. & SEHGAL, S.K. On a conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings II. 14 p.
- 85-79 JONES RODRIGUES, A.R. & MICHLER, G.O. On the structure of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2 . The Jacobson radical of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2 . 26 p.
- 85-80 VELOSO, J.M.M. & VERDERESI, J.A. Three dimensional Cauchy-Riemann manifolds. 19 p.
- 85-81 PERESI, L.A. On baric algebras with prescribed automorphisms II. 18 p.
- 85-82 KNUDSEN, C.A. O impasse aritmo-geométrico e a evolução do conceito de número na Grécia antiga. 43 p.
- 85-83 VELOSO, J.M.M. & VERDERESI, J.A. La géométrie, le problème d'équivalence et la classification des CR-varietés homogènes em dimension 3. 30 p.