

AS EQUAÇÕES MULTIQUÁDRICAS NORMALIZADAS PARA INTERPOLAÇÃO DE DADOS GEOLÓGICOS

Jorge Kazuo YAMAMOTO*

- **RESUMO:** Este trabalho apresenta o desenvolvimento das equações multiquádricas normalizadas para interpolação de dados geológicos. A origem deste método de interpolação deve-se a transformações introduzidas no sistema de equações multiquádricas, que o tornou semelhante ao sistema da krigagem ordinária, e que foi denominado novo método de interpolação. Contudo, observou-se que as transformações introduzidas procuraram corrigir a soma dos coeficientes das equações multiquádricas para um, ou seja, a normalização dos coeficientes. Esta simples correção dos coeficientes produziu uma interpolação superior ao método original das equações multiquádricas, com a grande vantagem de ser definido como um método local, ao contrário do original que era essencialmente global. Portanto, como o novo método utiliza os coeficientes normalizados das equações multiquádricas, propõe-se manter a denominação original de "equações multiquádricas" acrescida da expressão "normalizadas".
- **PALAVRAS-CHAVE:** Interpolação bidimensional; interpolação tridimensional; equações multiquádricas; krigagem ordinária; equações multiquádricas normalizadas.

Introdução

A interpolação é um procedimento matemático que permite determinar o valor de interesse em um ponto não amostrado, a partir de informações de pontos de amostragem. Trata-se, portanto, de um procedimento comumente empregado em geologia na representação gráfica quantitativa, bem como para o cálculo de perfis, áreas e volumes. É preciso ressaltar que a informação geológica é essencialmente discreta, localizada em pontos de investigação em superfície ou subsuperfície.

Antes do advento dos computadores, a interpolação era baseada em princípios de interpretação, como os princípios dos métodos convencionais para cálculo de reservas: variação gradual, dos pontos mais próximos e da generalização. Entre esses princípios, o da variação gradual fundamenta-se na interpolação linear.

* Departamento de Geologia Econômica e Geofísica Aplicada - Instituto de Geociências - USP - 05508-900 - São Paulo - SP.

Com o desenvolvimento dos computadores, foram surgindo os métodos de interpolação matemática, dos quais os mais comuns para interpolação de dados geológicos são o do inverso da potência da distância e a krigagem ordinária.

Recentemente, as equações multiquádricas passaram a ser aplicadas para interpolação de superfícies topográficas e outras superfícies irregulares. As equações multiquádricas foram estudadas pelo autor, revelando-se potencialmente aplicáveis para a interpolação de dados geológicos.

Entretanto, as equações multiquádricas foram propostas originalmente como um interpolador global, ou seja, dependente de todos os pontos de dados, de tal modo que a adição ou retirada de um único ponto de dado irá se propagar pelo domínio de definição da função.

Estudos realizados para utilização das equações multiquádricas como interpolador local demonstraram a viabilidade desta adaptação, cuja eficiência dependia de um número mínimo de pontos de dados para que a interpolação resultasse em valores aceitáveis, dentro do intervalo de variação esperado.

Este trabalho apresenta os resultados de pesquisa recente realizada pelo autor, em que foi verificado que os coeficientes das equações multiquádricas, quando normalizados, tornam a interpolação mais eficiente, mesmo para um número pequeno de amostras, o que era inviável pelas equações multiquádricas originais. A esse novo procedimento de interpolação com coeficientes normalizados denomina-se "equações multiquádricas normalizadas", como se expõe a seguir.

As equações multiquádricas

Hardy¹ apresentou uma proposta para o ajuste de equações multiquádricas para interpolação de superfícies topográficas, pois os mapas interpolados por polinômios não se prestavam para fins de engenharia, justamente pelo fato de o interpolador não ser exato. As equações multiquádricas proporcionavam uma interpolação exata, ou seja, suas funções passavam exatamente sobre os pontos de dados.

$$F = \sum_{i=1}^n c_i [(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + C]^{1/2} \quad (1)$$

onde: c_i é o coeficiente da i -ésima amostra; C é uma constante de suavização; (X_i, Y_i) são as coordenadas do i -ésimo ponto; (X, Y) são as coordenadas do ponto a ser interpolado.

Os coeficientes $(c_i, i=1, n)$ são obtidos pela resolução de um sistema de equações lineares da forma:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i [(X_i - X_i)^2 + (Y_i - Y_i)^2 + C]^{1/2} \text{ para } i = 1, n \quad (2)$$

ou em forma matricial, fazendo:

$$d_{ij} = \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C \right]^{1/2}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

A hipótese básica da análise multiquádrica é que qualquer superfície matemática suave e, também, qualquer superfície arbitrária suave (indefinida matematicamente), pode ser aproximada, com o grau de precisão desejado, pela soma de uma grande variedade de superfícies regulares matematicamente definidas, particularmente de formas quádricas.²

Observe-se que cada termo quádrico da equação (1) representa um hiperbolóide circular.

Para ilustrar a interpretação geométrica das equações multiquádricas bidimensionais, foram amostrados 17 pontos sobre uma semi-esfera centrada no ponto (150, 150) e raio = 100 m, conforme a seguinte equação:

$$F = \left(R^2 - (X - 150)^2 - (Y - 150)^2 \right)^{1/2}$$

Os pontos assim amostrados encontram-se listados na Tabela 1 e representados no mapa de localização da Figura 1.

Tabela 1 - Conjunto de pontos de dados sobre uma semi-esfera, conforme a equação (4)

Ponto	X	Y	F
1	50	150	0
2	100	150	86,603
3	150	150	100
4	200	150	86,603
5	250	150	0
6	150	50	0
7	150	100	86,603
8	150	200	86,603
9	150	250	0
10	79,289	79,289	0
11	96,967	96,967	66,144
12	203,033	203,033	66,144

Continuação

Ponto	X	Y	F
13	220,711	220,711	0
14	79,289	220,711	0
15	96,967	203,033	66,144
16	203,033	96,967	66,144
17	220,711	79,289	0

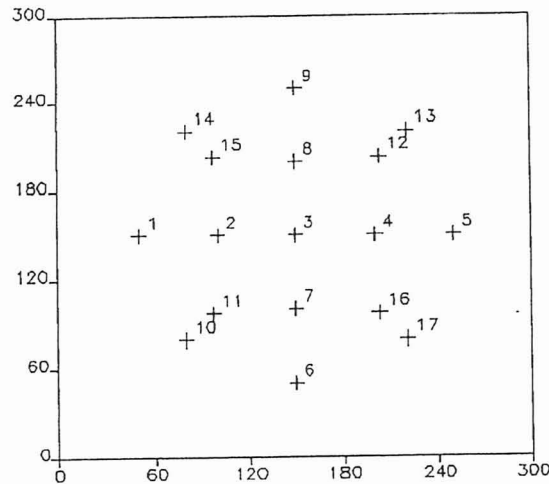


FIGURA 1 - Mapa de localização dos pontos de dados sobre a semi-esfera.

Os coeficientes das equações multiquádricas obtidos para os pontos de dados da Tabela 1 encontram-se reproduzidos na Tabela 2.

Tabela 2 - Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos sobre a semi-esfera (Tabela 1)

Ponto	Coefficiente
1	0,408631
2	-0,370633
3	0,175595
4	-0,370633
5	0,408631
6	0,408631
7	-0,370633
8	-0,370633
9	0,408631
10	0,758054
11	-0,975162
12	-0,975162
13	0,758054
14	0,758054
15	-0,975162
16	-0,975162
17	0,758054

As Figuras 2 e 3 apresentam as hiperbolóides circulares, respectivamente para os pontos 3 e 4 do conjunto de pontos de dados (Tabela 2).

Observe-se que as figuras estão orientadas conforme os sinais dos coeficientes (Tabela 2).

A superfície interpolada, por meio das equações multiquádricas, está representada na Figura 4.

Para a interpolação tridimensional, as equações multiquádricas têm a forma:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j [(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2 + C]^{1/2} \text{ para } i = 1, n \quad (5)$$

onde: (X,Y,Z) são as coordenadas do ponto a ser interpolado; (X_i,Y_i,Z_i) são as coordenadas da i-ésima amostra.

Os termos quádracos da equação (5) representam esferas centradas nos pontos de dados, como se pode verificar a partir de um exemplo hipotético, gerado a partir da amostragem de um cubo, de lado igual a 100 m, como mostra o desenho da Figura 5.

As coordenadas dos pontos de amostragem encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 - Coordenadas dos pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 5

Ponto	X	Y	Z	Teor
1	50	50	50	6,5
2	150	50	50	6,3
3	50	150	50	8,1
4	150	150	50	6,5
5	50	50	100	7,7
6	150	50	100	7,1
7	50	150	100	9,2
8	150	150	100	7,2
9	50	50	150	10,3
10	150	50	150	7,9
11	50	150	150	12,1
12	150	150	150	8,3
13	100	100	100	8,0

Os coeficientes das equações multiquádricas obtidos para os dados da Figura 5 encontram-se na Tabela 4.

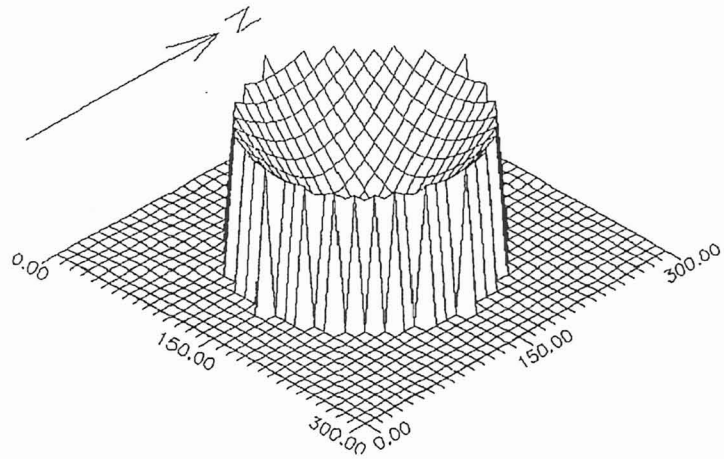


FIGURA 2 - Hiperbolóide circular associada ao ponto 3.

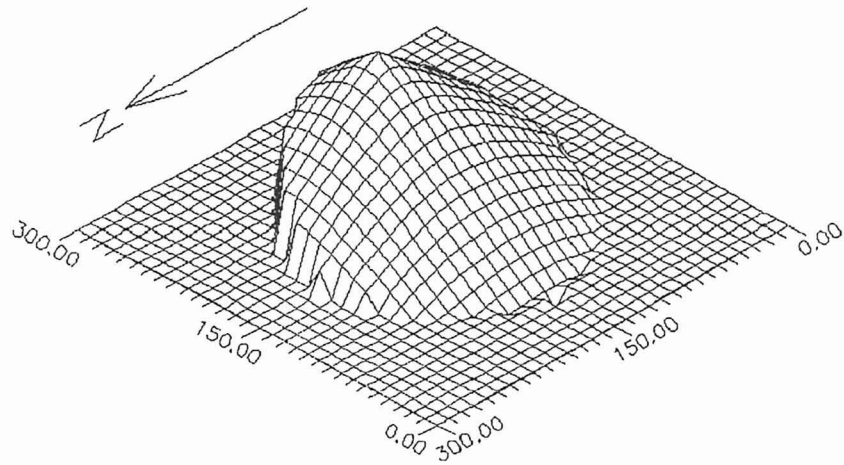


FIGURA 3 - Hiperbolóide circular associada ao ponto 4.

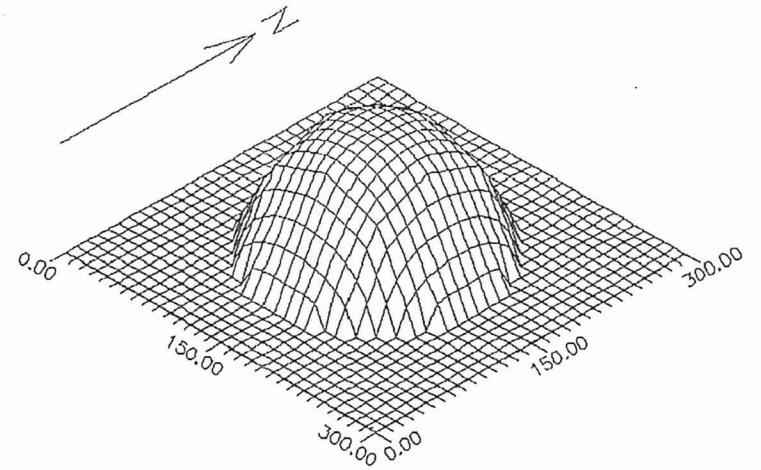


FIGURA 4 - Superfície multiquádrica interpolada a partir do conjunto de pontos de dados da Tabela 2.

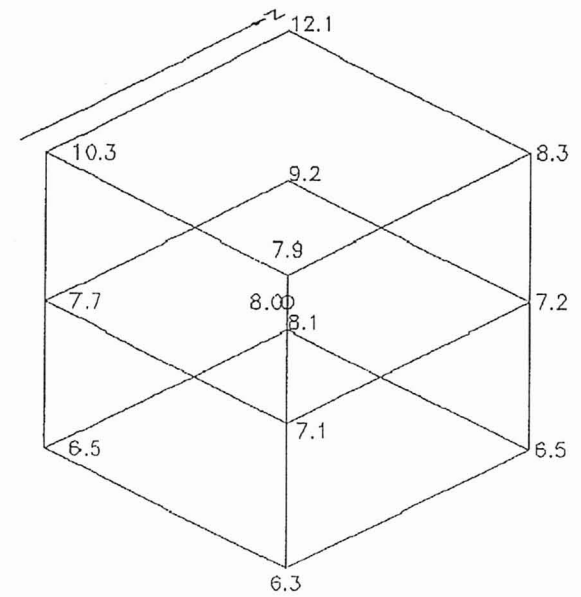


FIGURA 5 - Desenho esquemático mostrando a localização dos pontos amostrados sobre um cubo de lado igual a 100 m.

Tabela 4 – Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 6 (Constante C = 0)

Ponto	Coefficiente
1	0,023178
2	0,013321
3	0,010215
4	0,017349
5	0,012059
6	-0,004730
7	0,009690
8	0,003106
9	-0,004527
10	0,017866
11	-0,020422
12	0,018963
13	-0,027724

Os sinais dos coeficientes indicavam, para os casos a uma e a duas dimensões, a concavidade dos cones ou hiperbolóides circulares. Mas, para o caso a três dimensões, o sinal positivo indica aumento de teores do centro (ponto de dado) para fora da esfera e o negativo a diminuição de teores do centro para fora.

A esfera gerada pelo ponto central do cubo pode ser visualizada na planta interpolada para a cota 100, como mostra a Figura 6. Observe-se nesta figura, que o coeficiente do ponto central (ponto 13) é negativo e, por isso, as curvas diminuem para fora da esfera.

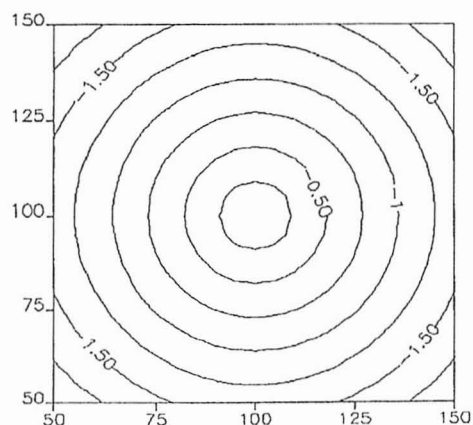


FIGURA 6 – Componente quádrlica devida ao ponto 13 do conjunto de dados da Tabela 3.

Cada um dos pontos de dados irá gerar uma esfera centrada e o valor interpolado em qualquer ponto de dado, dentro do domínio da amostragem se dá pela soma da contribuição de todos os pontos, como se ilustra na Figura 7, a planta de isoteores para a cota 100.

A interpolação tridimensional, por meio das equações multiquádricas, proporciona o desenho de plantas e seções da jazida, como apresentado por Yamamoto⁶ para o depósito de fosfato do Complexo Alcalino de Anitápolis (SC), bem como de um bloco-diagrama de parte ou de toda a jazida.

A Figura 8 apresenta um bloco-diagrama da jazida hipotética amostrada, conforme os dados da Tabela 3, em que se pode verificar o aumento geral de teores de leste para oeste.

Como foi exposto, o método das equações multiquádricas é bastante versátil quanto à dimensionalidade do problema de interpolação, dependendo somente da definição da constante multiquádrica e no caso de sua utilização como interpolador local, do número de pontos vizinhos para esse fim. O estudo da aproximação local das equações multiquádricas foi realizado por Yamamoto,⁸ que concluiu ser viável essa aproximação e que a utilização entre 12 e 24 pontos é um bom compromisso entre a precisão e o tempo de computação requerido.

O método das equações multiquádricas, proposto originalmente por Hardy,¹ foi sendo constantemente desenvolvido e aperfeiçoado por ele próprio e por diversos pesquisadores, conforme revisão apresentada por Hardy,⁴ referente aos 20 anos de sua descoberta.

O estudo comparativo, realizado por Landim & Yamamoto⁵ entre krigagem e equações multiquádricas, dá origem ao desenvolvimento do novo método de interpolação, como se expõe a seguir.

O novo método de interpolação

A partir do estudo das equações multiquádricas e do sistema de krigagem ordinária, foram efetuadas transformações no sistema de equações multiquádricas, que o tornou muito semelhante ao da krigagem ordinária. Segundo Yamamoto,⁷ a interpolação usando o sistema modificado das equações multiquádricas foi denominada "novo método".

É interessante reproduzir como foi o desenvolvimento deste novo método a partir das equações multiquádricas.

Seja o mapa de pontos apresentado na Figura 9, cujas coordenadas encontram-se listadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Coordenadas dos pontos de dados da Figura 9

Ponto	X	Y	Z
1	20	30	760
2	40	40	790
3	40	20	780

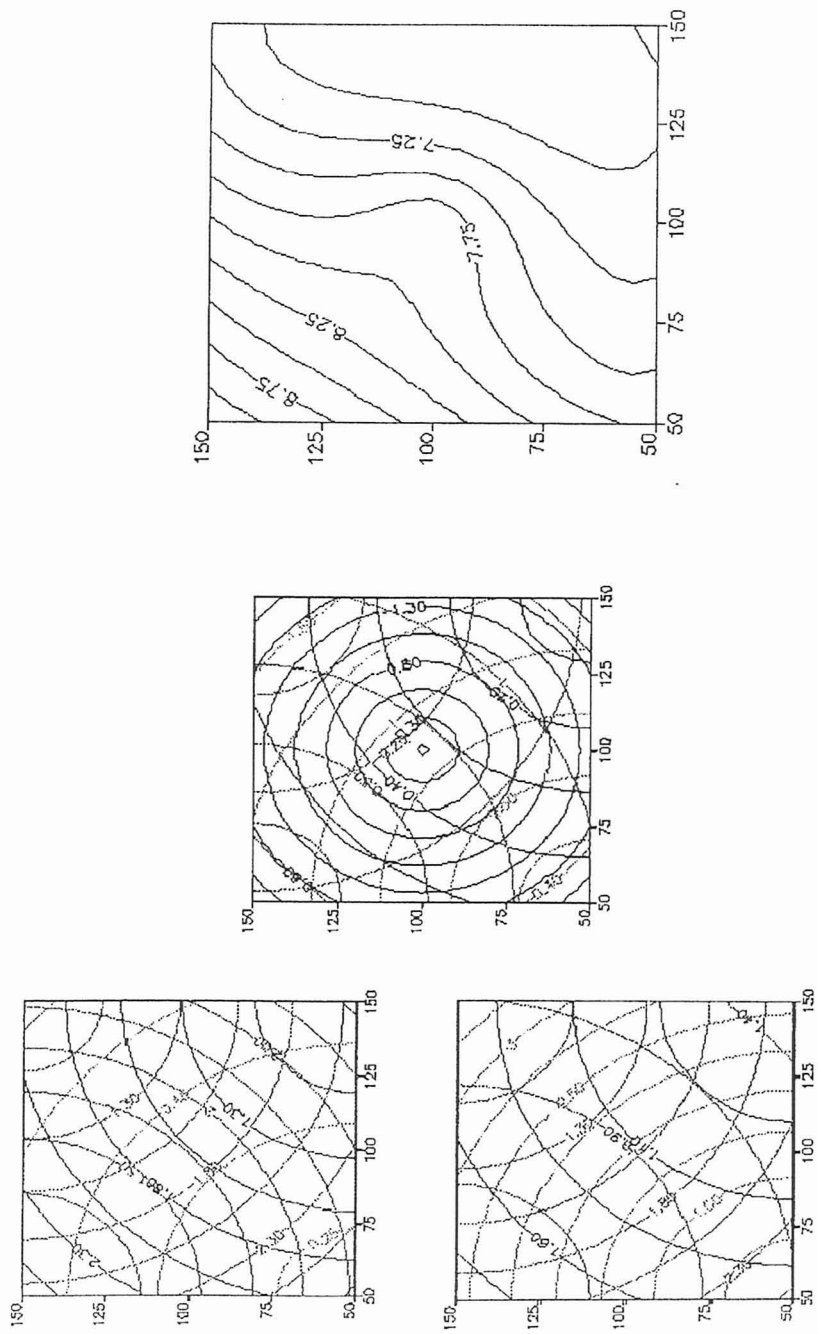


FIGURA 7 - Desenho mostrando o processo de interpolação da planta de isotores da cota 100, por meio da soma da contribuição de todos os pontos para a mesma cota 100.

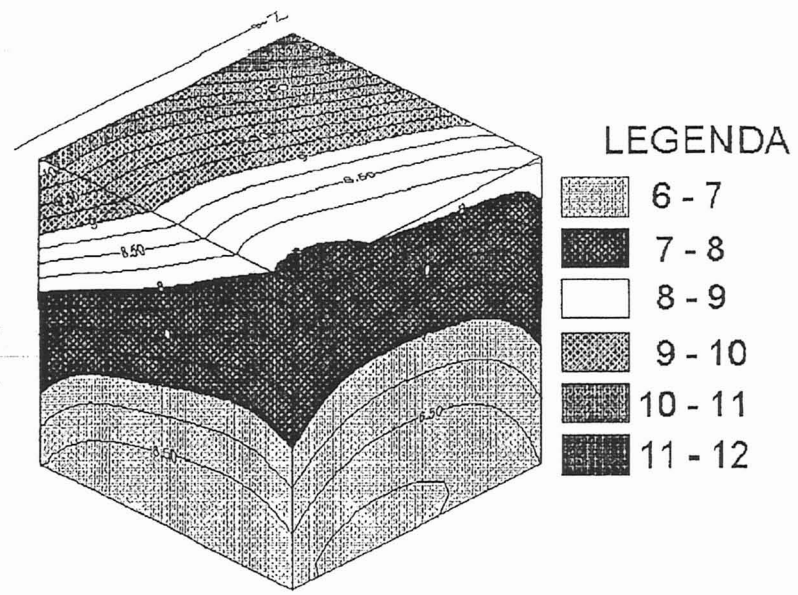


FIGURA 8 - Bloco-diagrama mostrando a variação espacial de teores de uma jazida hipotética.

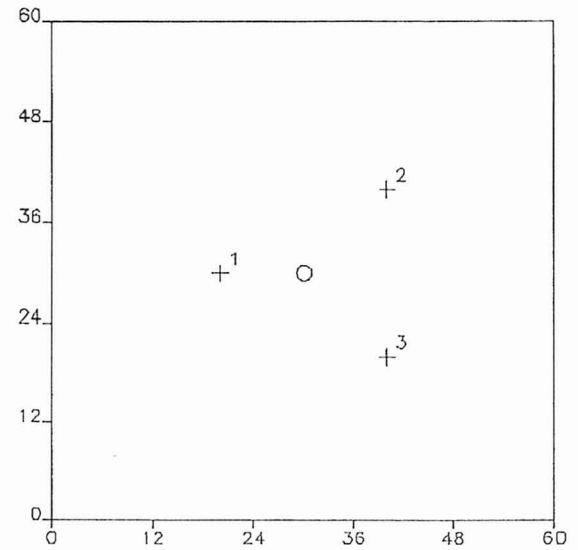


FIGURA 9 - Mapa de pontos de dados para interpolação de ponto de coordenadas (30,30).

Se fosse utilizado o método da triangulação, o ponto (30,30) poderia ser interpolado por meio de um plano que passa sobre os três pontos de dados, como está ilustrado esquematicamente na Figura 10.

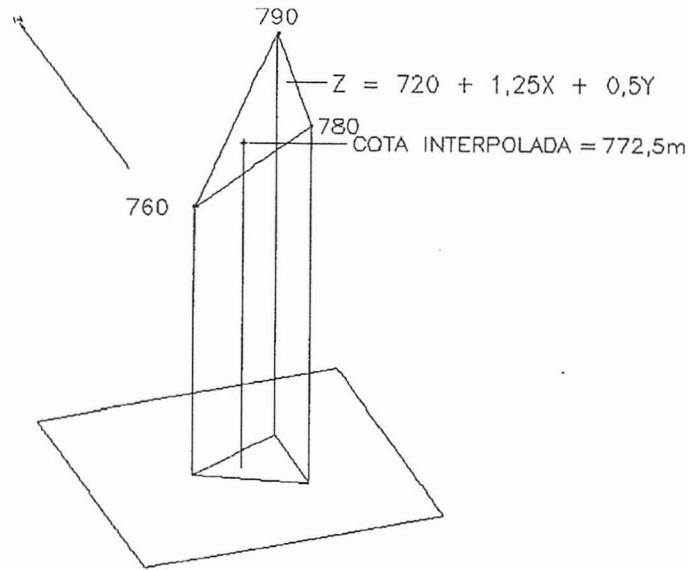


FIGURA 10 - Desenho esquemático mostrando a interpolação do ponto (30,30) por meio de um plano passando pelos pontos de dados.

A equação do plano, ajustada pelo método dos mínimos quadrados, é:

$$Z = 720 + 1,25X + 0,5Y \quad (6)$$

Portanto, a cota interpolada no ponto (30,30) é:

$$Z = 720 + 1,25 \cdot 30 + 0,5 \cdot 30 = 772,50$$

O ajuste das equações multiquádricas, para esses pontos e usando $C = 10$, é obtido pela resolução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} \quad (7)$$

que dá:

$$c_1 = 18,672$$

$$c_2 = 15,227$$

$$c_3 = 15,812$$

Para interpolação da cota no ponto (30,30), tem-se:

$$Z = 18,672 \cdot \left((20 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + 10 \right)^{1/2} + 15,227 \cdot \left((40 - 30)^2 + (40 - 30)^2 + 10 \right)^{1/2} + 15,812 \cdot \left((40 - 30)^2 + (20 - 30)^2 + 10 \right)^{1/2}$$

$$Z = 645,63$$

Pelo resultado obtido, muito aquém do mínimo esperado (760), verifica-se que o número de pontos (3) utilizado no ajuste das equações multiquádricas foi muito pequeno. Assim, para verificar o número mínimo de pontos necessário para um bom ajuste, foram adicionados mais 24 pontos na vizinhança, totalizando 27 pontos de dados, conforme o mapa de pontos da Figura 11 e coordenadas listadas na Tabela 6.

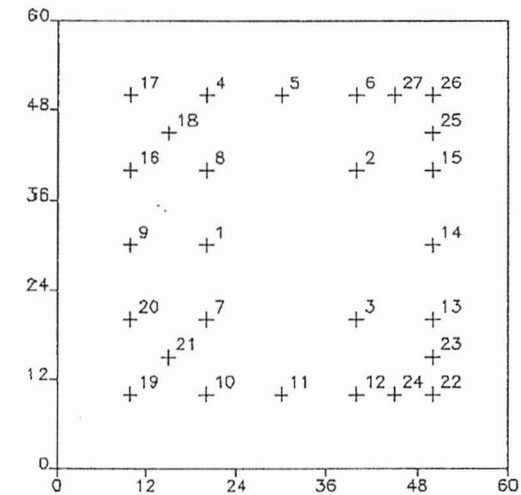


FIGURA 11 - Mapa de localização de 27 pontos de dados.

Tabela 6 - Coordenadas dos pontos de dados da Figura 11

Ponto	X	Y	Z
1	20	30	760
2	40	40	790
3	40	20	780
4	20	50	772
5	30	50	775
6	40	50	788
7	20	20	750
8	20	40	770
9	10	30	765
10	25	25	760
11	35	25	765
12	45	25	770
13	50	20	775
14	55	30	780
15	45	40	785
16	15	40	770
17	10	50	765
18	20	55	770
19	30	55	775
20	40	55	780
21	45	55	785
22	50	55	790
23	55	55	795
24	40	60	780
25	50	60	785
26	55	60	790
27	45	60	785

Continuação

Ponto	X	Y	Z
9	10	30	740
10	20	10	748
11	30	10	753
12	40	10	773
13	50	20	795
14	50	30	800
15	50	40	799
16	10	40	750
17	10	50	760
18	15	45	770
19	10	10	730
20	10	20	735
21	15	15	745
22	50	10	788
23	50	15	792
24	45	10	780
25	50	45	795
26	50	50	790
27	45	50	789

Para verificar como o número de pontos influencia o ajuste das equações multiquádricas, foram acrescentados, ao conjunto inicial de pontos, subconjuntos de três pontos cada, até completar 27 pontos. Em cada etapa foi interpolada a cota no ponto (30,30), conforme os resultados apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Resultados da cota interpolada com números variáveis de pontos de dados de 3 até 27 pontos, em incrementos de 3

Nº de pontos	Cota (m)
3	645,63
6	698,13
9	729,96
12	749,59
15	759,07
18	761,43
21	763,59
24	764,87
27	766,18

Como se pode observar nesta tabela, com o aumento do número de pontos, a cota vai se aproximando do valor esperado. Nesse caso, o valor mínimo possível foi alcançado com 18 pontos de dados, mas ainda aquém do valor interpolado pela triangulação.

É preciso ressaltar que, mesmo para o conjunto final com 27 pontos de dados, a interpolação por meio da triangulação continua fornecendo o mesmo valor de cota, pois o triângulo ainda é o mesmo, como se pode verificar na Figura 12.

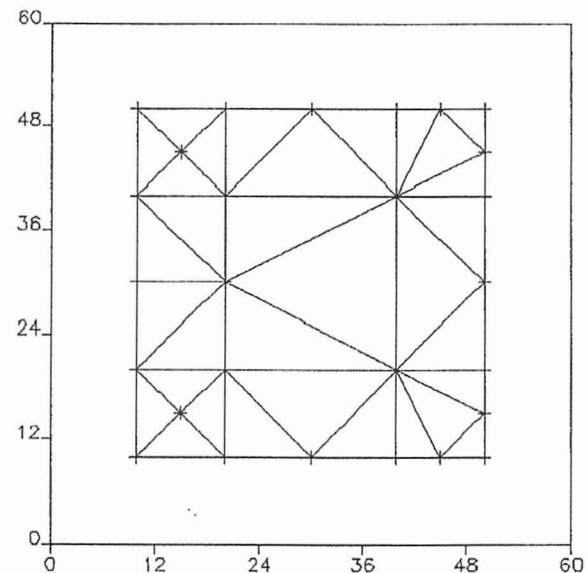


FIGURA 12 - Mapa de triângulos para o conjunto final de pontos de dados.

Considerando a cota interpolada pela triangulação (772,50) como referência, embora as cotas fornecidas pelas equações multiquádricas possam ser válidas a partir de 18 pontos de dados, pode-se calcular um erro relativo (%), como se apresenta na Tabela 8. A variação das cotas e a distribuição dos erros com o número de pontos podem ser observadas no gráfico da Figura 13.

Tabela 8 - Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelas equações multiquádricas

Nº de pontos	Cota (m)	Erro relativo (%)
3	645,63	16,42
6	698,13	9,63
9	729,96	5,51
12	749,59	2,97
15	759,07	1,74
18	761,43	1,43
21	763,59	1,15
24	764,87	0,99
27	766,18	0,82

Nesta simulação, pôde-se verificar que de 8 a 12 pontos de dados ainda são insuficientes para uma boa aproximação pelas equações multiquádricas, especialmente quando se tratar de informações de topografia. Para esse tipo de dado, recomenda-se a utilização de no mínimo 18 pontos de dados.

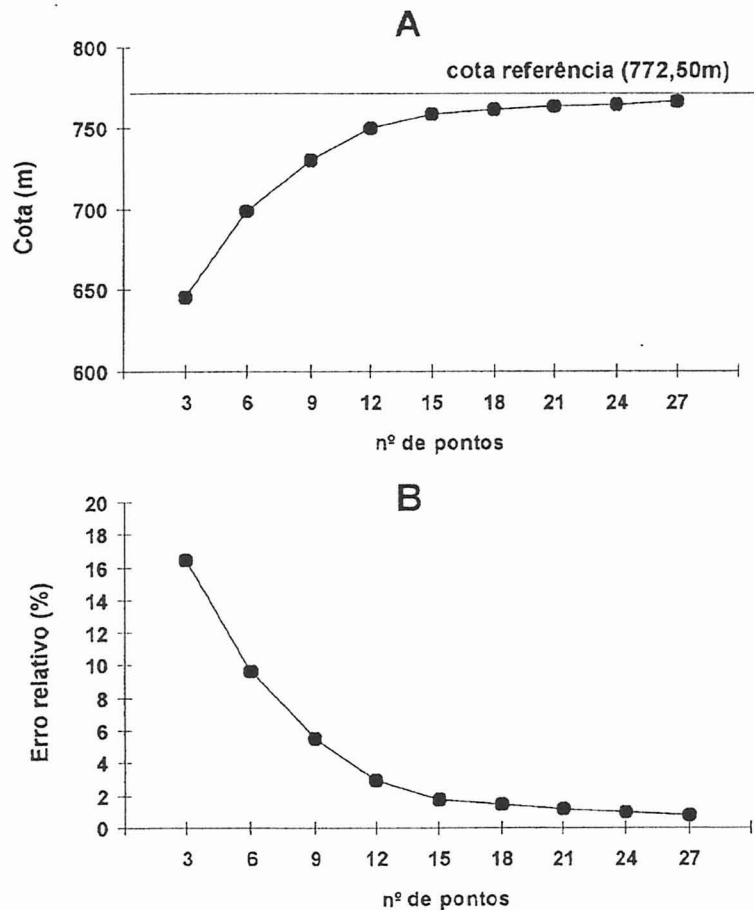


FIGURA 13 - Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelas equações multiquádricas (B).

Do ponto de vista crítico, o grande número de pontos de dados a ser utilizado no ajuste das equações multiquádricas é uma desvantagem do método, em relação, por exemplo, ao da triangulação, que faz a interpolação sempre usando apenas os três pontos de dados (vértices dos triângulos).

Retomando ao desenvolvimento do novo método de interpolação, adicionou-se ao sistema de equações (7) a seguinte condição:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (8)$$

ou seja, exatamente a mesma condição presente no sistema de equações de krigagem. O novo sistema de equações multiquádricas torna-se:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 & 1 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 & 1 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A resolução desse novo sistema deu:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,184 \\ c_2 &= -0,385 \\ c_3 &= 0,201 \\ M &= 760,414 \end{aligned}$$

Observe-se que o 4º coeficiente resultou num valor muito próximo ao mínimo esperado pelas equações multiquádricas.

Continuando o desenvolvimento, substituindo-se o vetor do lado direito por um termo quádrico, calculado entre o ponto de dado e o ponto a ser interpolado, tem-se:

$$d_i = \left((X_i - X_p)^2 + (Y_i - Y_p)^2 + C \right)^{1/2} \quad (10)$$

com $(X_p, Y_p) = (30, 30)$.

O sistema de equações do novo método fica:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 & 1 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 & 1 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,488 \\ 14,491 \\ 14,491 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

cuja resolução dá:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,49115 \\ c_2 &= 0,25443 \\ c_3 &= 0,25443 \\ M &= -2,55659 \end{aligned}$$

O valor do ponto a ser interpolado não pode ser calculado como nas equações multiquádricas originais, mas sim como a krigagem ordinária, ou seja, por meio da média ponderada:

$$Z = 0,49115 \cdot 760 + 0,25443 \cdot 790 + 0,25443 \cdot 780$$

$$Z = 772,72 \text{ m}$$

O valor interpolado é muito próximo daquele obtido pela triangulação, com um erro relativo de apenas 0,13%. Este método foi efetivamente apresentado em sessão técnica do XXXV Congresso Brasileiro de Geologia.

A grande vantagem deste novo método está justamente no número de pontos para se conseguir uma boa interpolação. A fim de verificar o comportamento desse novo interpolador em relação ao número de pontos, os dados da Tabela 6 e o mesmo procedimento para aferir o número mínimo de pontos para as equações multiquádricas foram utilizados. Os resultados desta nova simulação, juntamente com o erro relativo (%), encontram-se reproduzidos na Tabela 9.

A distribuição dos valores de cota, bem como o comportamento do erro, pequenos em geral, pode ser observada na Figura 14.

Os erros relativos desse novo método são muito pequenos (em torno de 0,12% em média), quando comparados com os mesmos obtidos para as equações multiquádricas, o que o torna viável para interpolação de dados com grande precisão, para o contorno automático de dados geológicos.

Tabela 9 - Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelo novo método

Nº de pontos	Cota (m)	Erro relativo (%)
3	772,72	0,03
6	772,28	-0,03
9	774,28	0,23
12	773,79	0,17
15	773,39	0,12
18	773,25	0,10
21	773,26	0,10
24	773,25	0,10
27	773,37	0,11

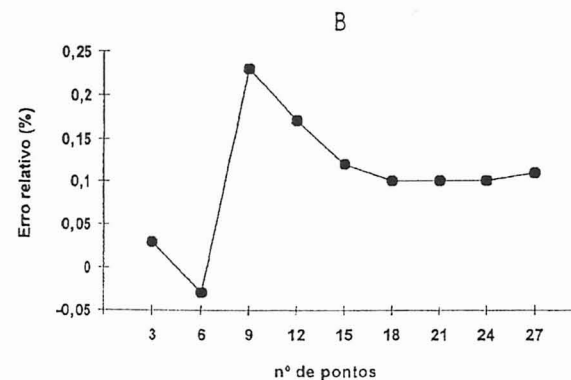
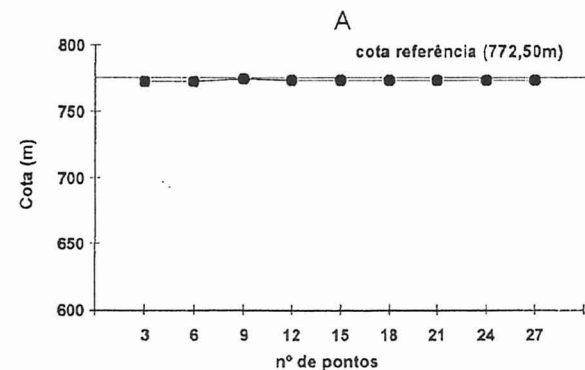


FIGURA 14 - Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelo novo método (B).

As equações multiquádricas normalizadas

O desenvolvimento deste novo método, como mostrado passo a passo neste trabalho, foi resultado de uma série de adaptações e substituições feitas no sistema de equações multiquádricas, a fim de torná-lo semelhante ao sistema de equações de krigagem ordinária. A interpretação atual do sistema do novo método pode ser feita a partir de um artigo de Hardy,² onde ele demonstra que os sistemas de equações de covariância (12), semelhante ao da krigagem ordinária, e o das equações multiquádricas (13), em notação matricial, são similares, como se reproduz a seguir:

$$Z_p = [C_{p1} \ C_{p2} \ \dots \ C_{pn}] * \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Z_p = [Q_{p1} \ Q_{p2} \ \dots \ Q_{pn}] * \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde: $Q_{ij} = [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + C]^{1/2}$.

No caso da predição com funções de covariância, o valor a ser interpolado resulta de:

$$Z_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i Z_i \quad (14)$$

e no caso das equações multiquádricas, de:

$$Z_p = \sum_{i=1}^n c_i Q_{pi} \quad (15)$$

Os coeficientes (α_i , $i = 1, n$) são resultado do produto do vetor linha com a matriz inversa das covariâncias da equação (12), enquanto os coeficientes (c_i , $i = 1, n$) resultam do produto da matriz inversa das quádricas com o vetor coluna das variáveis dependentes. As similaridades entre os dois sistemas estão somente nas formas dessas equações, pois segundo Hardy:²

$$Q \neq C \quad (16)$$

A equação (12) permite fazer uma interpretação adequada das transformações feitas no sistema de equações multiquádricas,⁷ as quais, hoje, consideramos que te-

nham sido empíricas. Assim, a transformação básica foi calcular o produto do vetor linha com a matriz das quádricas, porém com uma condição adicional: que a soma dos coeficientes assim obtidos fosse igual a um. Para ilustrar a interpretação, utilizou-se novamente do conjunto de pontos de dados da Tabela 5. Portanto, a interpolação da cota Z_p no ponto de coordenadas (30,30), de acordo com a equação (12), é feita como:

$$Z_p = [10,488 \ 14,491 \ 14,491] * \begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Multiplicando-se o vetor linha pela matriz inversa das quádricas, obtém-se o seguinte vetor linha:

$$[0,432 \ 0,202 \ 0,202] \quad (18)$$

que, multiplicado pelo vetor coluna das cotas, resulta na cota interpolada no ponto (30,30):

$$Z_p = [0,432 \ 0,202 \ 0,202] * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} = 645,46 \quad (19)$$

Agora, como a formulação original de Hardy,¹ multiplicando-se a matriz inversa das quádricas pelo vetor coluna das cotas, obtém-se o vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} \quad (20)$$

que, multiplicado pelo vetor linha das quádricas no ponto (30,30), resulta também na cota interpolada:

$$Z_p = [10,488 \ 14,491 \ 14,491] * \begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} = 645,63 \quad (21)$$

As pequenas diferenças entre os resultados obtidos (19 e 21) devem-se a erros de arredondamento. A matriz linha (18) são os coeficientes equivalentes do sistema da krigagem ordinária. Entretanto, a soma desses coeficientes não resulta em 1, portanto, o resultado obtido em (19) deve ser dividido pela soma dos coeficientes, se-

gundo o cálculo da média ponderada. Assim, dividindo-se a cota obtida pela soma dos coeficientes, tem-se:

$$Z_p = 645,46 / 0,836 = 772,08 \quad (22)$$

ou seja, um resultado muito próximo ao da interpolação pela equação do plano (6) e, portanto, muito superior, em qualidade, ao resultado obtido pelas equações multiquádricas (21). Assim, no novo método, introduzindo-se empiricamente a condição para que a soma dos coeficientes fosse igual a 1, estava-se na realidade normalizando os coeficientes como em (22). Como consequência o novo método pode trabalhar com um número menor de pontos, para produzir uma interpolação de qualidade, em relação às equações multiquádricas, conforme pode-se observar nas Figuras 13 e 14.

Mas, por que a interpolação pelas equações multiquádricas tende a melhorar com o número de pontos? A resposta para esta questão deve estar justamente na soma dos coeficientes das equações multiquádricas, obtidos pelo produto do vetor linha pela matriz inversa das quádricas (equação 12). Assim, a fim de verificar esta resposta utilizou-se do conjunto de pontos de dados da Tabela 6, do qual foram extraídos 9 subconjuntos, de 3 a 27 pontos, em incrementos de 3, para interpolação do ponto de coordenadas (30,30). Para cada subconjunto foram calculados os coeficientes e a sua soma, cujos resultados encontram-se listados na Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados da interpolação pelas equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30), o erro relativo e a soma dos coeficientes

Nº de pontos	Cota (m)	Erro relativo (%)	Soma dos coeficientes
3	645,63	16,42	0,836
6	698,13	9,63	0,905
9	729,96	5,51	0,942
12	749,59	2,97	0,968
15	759,07	1,74	0,981
18	761,43	1,43	0,985
21	763,59	1,15	0,987
24	764,87	0,99	0,989
27	766,18	0,82	0,991

A variação da soma dos coeficientes com o número de pontos foi representada graficamente, como se apresenta na Figura 15.

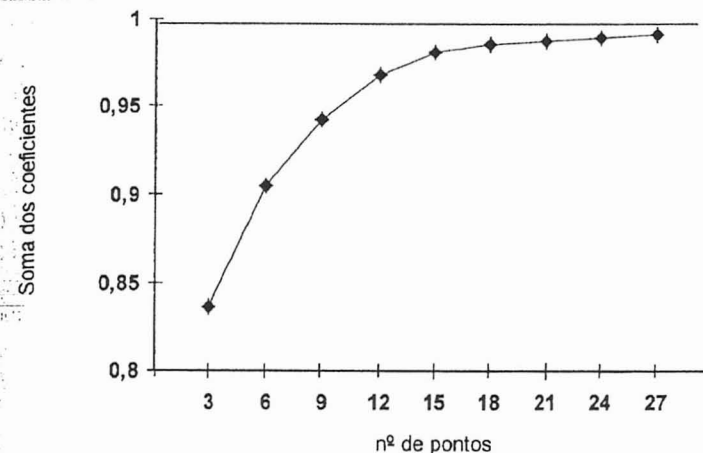


FIGURA 15 – Variação da soma dos coeficientes das equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30) a partir dos subconjuntos de pontos extraídos da Tabela 6.

Como pode-se verificar na Tabela 10, a soma dos coeficientes tende a 1 com o aumento do número de pontos, acompanhada da diminuição do erro relativo. Portanto, a simples correção dos coeficientes, por meio da sua normalização, já é suficiente para melhorar a qualidade da interpolação com um mínimo de pontos. Assim, o novo método consiste simplesmente na utilização dos coeficientes normalizados!

Se o novo método utiliza os coeficientes normalizados das equações multiquádricas, o ideal seria manter a denominação original de "equações multiquádricas" acrescida da expressão "normalizadas".

"As equações multiquádricas normalizadas" mantêm as mesmas propriedades originais, porém com a vantagem de serem um interpolador tanto local como global.

Considerações finais

Este trabalho apresentou uma revisão das equações multiquádricas, a origem do novo método de interpolação e a demonstração matemática das transformações introduzidas, neste último, que normalizaram os coeficientes das equações multiquádricas. Em vista do exposto, propõe-se a redenominação do novo método de interpolação para "equações multiquádricas normalizadas". Como foi demonstrado, a normalização dos coeficientes proporciona uma interpolação superior em relação às equações multiquádricas originais, além da grande vantagem de ser agora um inter-

polador local. A disponibilidade de funções de interpolação local é de grande importância prática, pois em Geologia os conjuntos de dados de amostragem são, geralmente, da ordem de centenas de pontos, o que inviabilizaria o método global. Por outro lado, devido à grande semelhança do sistema das equações multiquádricas normalizadas com o da krigagem ordinária, os resultados de interpolação por aquele método serão consistentes. Entretanto, deve-se considerar que, se por um lado elas não necessitam do cálculo e modelagem de variogramas experimentais, por outro elas apresentam a desvantagem de não proporcionarem a correção de anisotropia geométrica porventura existente no conjunto de dados. Cabe ressaltar que, no caso da impossibilidade de obtenção de variogramas representativos, o método das equações multiquádricas normalizadas poderá ser escolhido como alternativa, pois deverá apresentar resultados confiáveis, dentro da qualidade e quantidade das informações disponíveis.

YAMAMOTO, J. K. The multiquadric equations normalized for interpolation of geological data. *Geociências (São Paulo)*, v.15, n.1, p.41-65, 1996.

- **ABSTRACT:** *This paper presents the development of normalized multiquadric equations to interpolation of geological data. The origin of this method of interpolation is due to transformations introduced in the system of multiquadric equations, that left similar to the ordinary kriging system, which was named as new method of interpolation. However, it has been observed that the transformations produced, actually the correction of sum of coefficients to one, or its normalization. As result the interpolation is better than the original method, with the additional advantage of being defined as local method, while the original was just global. Therefore, as the new method uses the normalized coefficients of multiquadric equations, it is proposed call as "normalized multiquadric equations".*
- **KEYWORDS:** *Two-dimensional interpolation; tridimensional interpolation; multiquadric equations; ordinary kriging; normalized multiquadric equations.*

Referências bibliográficas

- 1 HARDY, R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, v.76, p.1905-15, 1971.
- 2 _____. Least squares prediction. *Phot. Eng. Rem. Sens.*, v.43, n.4, p.475-92, 1977.
- 3 _____. Comunicação pessoal recebida pelo autor. 1985.
- 4 _____. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method. *Computers Math. Applic.*, v.19, n.8/9, p.163-208, 1990.
- 5 LANDIM, P. M. B., YAMAMOTO, J. K. Comparação entre krigagem e equações multiquádricas para interpolação de dados irregularmente distribuídos. In: SIMPÓSIO DE QUANTIFICAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS, 3, 1988, Rio Claro. *Bol. Res...* Rio Claro: IGCE/UNESP, 1988. p.72-6.

- 6 YAMAMOTO, J. K. *Representações gráficas espaciais em Geologia: aplicações no Complexo Alcalino de Anitápolis, SC.* São Paulo, 1986. 167p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geológicas) - Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo.
- 7 _____. Novo método de interpolação para contorno automático de dados geológicos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE GEOLOGIA, 35, 1988, Belém. *Anais...* Belém: SBG. 1988. v.4, p.1684-95.
- 8 _____. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. *Geociências*, p.1-22, 1990. (Número especial).