

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações

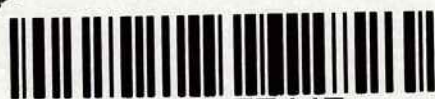
BT/PEF/9204

**Equação Constitutiva das
Barras Hiperelásticas
Transversalmente Isotrópicas**

Nelson Achcar



Escola Politécnica - EPBC



31200053445

835911
São Paulo - 1992

Achcar, Nelson

Equação constitutiva das barras hiperelásticas transversalmente isotrópicas / N. Achcar. -- São Paulo : EPUSP, 1992.

6p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9204)

1. Elasticidade - Teoria I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. Título III. Série

CDU 539.31

Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas

Nelson Achcar

20 de março de 1992

1 Introdução

Quando se admite que as únicas deformações possíveis numa barra são aquelas nas quais cada secção normal ao eixo na configuração de referência permanece plana na configuração atual, estamos restringindo os materiais que podem constituir-la. Em [1] determinamos todos os materiais aptos a isso. Os de maior grupo de simetria são os transversalmente isotrópicos. No presente artigo deduzimos a equação constitutiva das barras constituídas de material hiperelástico transversalmente isotrópico.

2 O vínculo das barras

Segundo o modelo proposto por J. C. Simo em [5], dada uma barra prismática de base A

$$\mathcal{B} = \{(X_1, X_2, X_3) \mid (X_1, X_2, 0) \in A \text{ e } 0 \leq X_3 \leq L\},$$

cada deformação de $\mathcal{B}$ é dada por duas curvas lisas

$$\phi : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ e } Q : [0, L] \rightarrow Orth^+$$

onde $Orth^+$ é o conjunto das rotações de $\mathbf{R}^3$. ϕ determina a posição do eixo de $\mathcal{B}$ na configuração deformada e $Q(S)$ a rotação que a secção $X_3 = S$ de $\mathcal{B}$

será submetida até alcançar sua posição na configuração atual. Desse modo, supondo-se que o centróide de A esteja na origem, as deformações admissíveis de $\mathcal{B}$ são as $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$$f(X_1, X_2, X_3) = \phi(X_3) + Q(X_3)[X_1 e_1 + X_2 e_2] \quad (1)$$

onde (e_1, e_2, e_3) é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Sendo $F(X)$ o gradiente de f no ponto $X = (X_1, X_2, X_3)$, demonstramos em [1] que

$$f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ é uma deformação de } \mathcal{B} \iff F(X) \in V \text{ para todo } X \in \mathcal{B} \quad (2)$$

onde

$$V = \{F \in \text{Lin}^+ \mid F e_i \cdot F e_j = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2\} \quad (3)$$

é o que chamamos de *vínculo das barras*. Também definimos o *vínculo de Cauchy Green das barras* por

$$\mathcal{C} = \{C \in \text{Psym} \mid C e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2\} \quad (4)$$

onde Lin^+ é o conjunto dos operadores lineares de $\mathbb{R}^3$ (tensores) que têm determinante positivo e Psym é o conjunto dos tensores simétricos positivos definidos. É fácil verificar que

$$F \in V \iff F^\top F \in \mathcal{C} \quad (5)$$

3 O espaço das reações para o vínculo das barras

O fato das barras só serem capazes de realizar deformações prescritas por um vínculo implica que a tensão de Cauchy se decompõe em duas parcelas

$$T = T_R + T_A \quad (6)$$

onde T_A , chamada *tensão ativa*, é função do gradiente da deformação F e T_R , chamada *tensão reativa*, não é função de F e é o que garante à barra manter-se na classe das deformações admissíveis (as dadas por (2)) independentemente das ações externas impostas a ela. Admitindo-se que T_R

realiza trabalho nulo na classe dos movimentos admissíveis, prova-se que o conjunto de todas as T_R possíveis para um dado gradiente F , chamado *espaço das reações em F* e indicado por $\mathcal{R}(F)$ é:

$$\mathcal{R}(F) = F \dot{C}_C^\perp F^\top \quad (7)$$

onde $C = F^\top F$, $\dot{C}_C$ é o espaço tangente a $\mathcal{C}$ no ponto C e $\dot{C}_C^\perp$ é o espaço ortogonal a $\dot{C}_C$ em Sym , sendo Sym o espaço dos operadores simétricos [1]. Outra expressão para $\mathcal{R}(F)$ é encontrada em [2]:

$$\mathcal{R}(F) = \dot{V}_F^\perp F^\top \quad (8)$$

onde $\dot{V}_F^\perp$ é o ortogonal em Lin do espaço tangente a V no ponto F . Em [1] concluímos que o espaço das reações para o vínculo das barras é dado por

$$\mathcal{R}(F) = \{ \alpha F e_1 \otimes F e_1 + \beta F e_2 \otimes F e_2 + \gamma (F e_1 \otimes F e_2 + F e_2 \otimes F e_1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \} \quad (9)$$

4 A equação constitutiva das barras hiperelásticas transversalmente isotrópicas

Vamos admitir que o material da barra seja homogêneo e hiperelástico, ou seja, vamos admitir a existência de uma função $\sigma : V \rightarrow \mathbf{R}$, chamada *densidade de energia de deformação*, tal que a energia de deformação armazenada em cada parte $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, no instante t , durante um movimento seja dada por

$$\int_{\mathcal{P}_t} \sigma \, dm := \int_{\mathcal{P}_t} \sigma(F) \rho \, dm \quad (10)$$

onde ρ é a densidade de massa no ponto X de $\mathcal{P}_t$ e $\mathcal{P}_t$ é a configuração de $\mathcal{P}$ no instante t . Portanto, a potência dispendida em $\mathcal{P}$ no instante t é

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \sigma \, dm = \int_{\mathcal{P}_t} \rho (\nabla)_F \cdot \dot{F} \, dV \quad (11)$$

onde $(\nabla)_F$ é o elemento de $\dot{V}_F$ que representa a diferencial de σ no ponto F :

$$(d\sigma)_F(\dot{F}) = (\nabla\sigma)_F \cdot \dot{F} \quad \forall \dot{F} \in \dot{V}_F \quad (12)$$

sendo o produto escalar entre tensores A e B definido por $A \cdot B = \text{tr}(AB^T)$. Por outro lado, sabemos que a potência dispendida é dada por

$$\int_{\mathcal{P}_t} T \cdot \dot{F} F^{-1} dV \quad (13)$$

De (11) e (13) e do fato de $\mathcal{P}$ ser uma parte qualquer de $\mathcal{B}$ concluímos que

$$(TF^{-T} - \rho(\nabla\sigma)_F) \cdot \dot{F} = 0 \quad \forall \dot{F} \in \dot{V}_F \quad (14)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} TF^{-T} - \rho(\nabla\sigma)_F &\in \dot{V}_F^\perp \\ T &= \rho(\nabla\sigma)_F F^T + T_R \end{aligned} \quad (15)$$

onde $T_R \in \dot{V}_F^\perp F^T = \mathcal{R}(F)$, por (8).

Portanto, para encontrar as equações constitutivas dos materiais sólidos hiperelásticos transversalmente isotrópicos compatíveis com as barras precisamos encontrar as $\sigma : V \rightarrow \mathbf{R}$ objetivas

$$\sigma(QF) = \sigma(F) \quad \forall F \in V \quad \forall Q \in \text{Orth}^+$$

e cujo grupo de simetria

$$\{Q \in \text{Orth}^+ \mid \sigma(FQ) = \sigma(F) \quad \forall F \in V\}$$

seja o grupo das rotações em torno de e_3 . Vamos admitir que as σ procuradas sejam restrições a V de funções $\Sigma : \text{Lin}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ satisfazendo

$$\Sigma(QF) = \Sigma(F) \quad ; \forall Q \in \text{Orth}^+ \quad \forall F \in \text{Lin}^+ \quad (16)$$

$$\Sigma(QF) = \Sigma(F) \quad \forall F \in \text{Lin}^+ \quad \forall Q \text{ rotação em torno de } e_3 \quad (17)$$

(Esta hipótese é consistente com as observações de Cohen e Wang no terceiro parágrafo da p. 137 de [2]) neste caso,

$$(\nabla\sigma)_F \cdot \dot{F} = (\nabla\Sigma)_F \cdot \dot{F} \quad \forall \dot{F} \in \dot{V}_F$$

logo,

$$(\nabla\sigma)_F - (\nabla\Sigma)_F \in \dot{V}_F^\perp$$

donde,

$$(\nabla\sigma)_F F^T - (\nabla\Sigma)_F F^T \in \dot{V}_F^\perp F^T = \mathcal{R}(F) \quad (18)$$

De (15) e (18) concluímos que

$$T = \rho(\nabla \Sigma)F^\top + T'_R \quad (19)$$

onde $T'_R \in \mathcal{R}(F)$. Se Σ satisfaz (16) então Σ pode ser fatorada na forma

$$\Sigma = \tilde{\Sigma} \circ \phi \quad (20)$$

onde $\phi : Lin \rightarrow Psym$ é dada por $\phi(F) = F^\top F$ e $\tilde{\Sigma}$ é alguma função de $Psym$ em $\mathbf{R}$. Para que valha (17) é preciso que

$$\tilde{\Sigma}(Q^\top C Q) = \tilde{\Sigma}(C) \quad (21)$$

para toda $C \in Psym$ e toda Q rotação em torno de e_3 . Há, em [3], um teorema de representação para (21): "se $\tilde{\Sigma} : Psym \rightarrow \mathbf{R}$ satisfaz (21) então existe uma função W de seis variáveis reais com valores em $\mathbf{R}$ tal que

$$\tilde{\Sigma}(C) = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \quad (22)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(C) \\ I_2 &= \frac{1}{2}(tr^2(C) - tr(C)^2) \\ I_3 &= det(C) \\ I_4 &= |PC(e_3)| \quad \text{onde } P = \mathbf{1} - e_3 \otimes e_3 \\ I_5 &= C(e_3) \cdot e_3 \\ I_6 &= C^2(e_3) \cdot e_3 \wedge C(e_3) \quad " \end{aligned} \quad (23)$$

Usando (20) concluímos que

$$\nabla \Sigma = 2F \nabla \tilde{\Sigma} \quad (24)$$

De (24) e (19) temos então que

$$T = 2\rho F \nabla \tilde{\Sigma} F^\top + T_R \quad (25)$$

onde $T_R \in \mathcal{R}(F)$. Usando (22) e os cálculos feitos em [3] temos que

$$\begin{aligned} 2\rho F \nabla \tilde{\Sigma}(C) F^\top &= 2\rho \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_2 \right) \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} \right. \\ &\quad \left. - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \frac{\partial W}{\partial I_4} \mathbf{L} + \frac{\partial W}{\partial I_5} \mathbf{M} + \frac{\partial W}{\partial I_6} \mathbf{N} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{e}_3 + \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{F}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{F}^T$$

sendo $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{C}\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{C}(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{C}\mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{C}^2(\mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_3$

Usando (26) e (9) em (25) chegamos a equação pretendida.

5 Referências

1. N. Achcar, Materiais Compatíveis com as barras cujas secções normais permanecem planas, BT/PEF, 1992
2. H. Cohen e C.C. Wang, On the Stored Energy Functions of Hyperelastic Materials with Internal Constraints, Arch. Rat. Mech. Anal.102, 1989
3. N. Achcar, Corpos Transversalmente Isotrópicos não Ortotópicos, Tese de Doutorado, EPUSP, 1990
4. Gurtin, M. E. An Introduction to Continuum Mechanics, Academic press, New York, 1981
5. Simo J. C., A finite Strain Beam Formulation, Computer Methods in Applied Mechanics and Eng. 49,1985