

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS PLANAS DE MADEIRA A PARTIR DO MEF POSICIONAL

Thiago Damasceno Silva¹ (damasceno.tds@gmail.com); **André Luis Christoforo**² (christoforoal@yahoo.com.br); **Tarniê Nunes Vilela Narques**³ (tarnie.projetos@gmail.com); **Julia Naves Teixeira**⁴ (julianavest@gmail.com); **Francisco Antonio Rocco Lahr**⁵ (frocco@sc.usp.br);

^{1,2,3,4}Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) – Departamento de Engenharia Civil (DECiv), Brasil; ⁵Universidade de São Paulo (USP) – Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Brasil;

Resumo

A evolução da tecnologia e industrialização das estruturas de madeira, incluindo técnicas de fabricação de peças compostas e de reforço estrutural, tem possibilitado diversos avanços na capacidade resistente dessas estruturas, como o emprego de elementos com maior esbeltez. Esses elementos mais flexíveis possibilitam ganhos de economia e otimização do material, contudo, podem sofrer grandes deslocamentos, não sendo aceitável a análise de seu equilíbrio na posição inicial apenas. Dessa forma, neste trabalho apresenta-se uma metodologia para análise não linear geométrica de sistemas treliçados planos de madeira, a partir de uma formulação posicional do método dos elementos finitos, para avaliar o comportamento de dois modelos de treliça. Madeiras folhosas com classe de resistência C60 são consideradas para composição das barras. A formulação do elemento finito é realizada a partir da minimização da energia potencial total, cujo sistema de equações é não linear em relação às posições nodais da estrutura e sua resolução é alcançada empregando o método de Newton-Raphson. Os resultados obtidos são comparados aos de uma análise linear geométrica para cada modelo, sendo possível observar que esta análise (linear) pode conduzir a valores inferiores de esforços internos e deslocamentos, o que influencia a etapa de dimensionamento e eventualmente pode oferecer riscos à segurança estrutural. Conclui-se que o emprego de análise não linear geométrica deve ser priorizado no projeto de estruturas de madeira, mesmo que isto implique em maior custo computacional e complexidade envolvida no procedimento de análise.

Palavras-chave: Estruturas de madeira. Análise não linear geométrica. Método dos elementos finitos. Formulação posicional.

Abstract

The evolution of timber structures technology and industrialization, including fabrication techniques of composite and structural reinforcement, has enabled several advances in these structures strength, such as the use of elements with greater slenderness. These flexible structural elements allow savings in material and optimization, however, they may suffer large displacements, and is not acceptable the analysis of their equilibrium in the initial configuration only. Thus, this work presents a methodology for geometric nonlinear analysis of timber plane truss, based on a positional formulation of the finite

element method, to evaluate the behavior of two truss models. Hardwoods with strength class C60 are considered in the elements. The finite element formulation is performed from the minimization of the total potential energy, whose nonlinear system of equations in relation to the nodal positions of the structure and its resolution is achieved using the Newton-Raphson method. The results obtained are compared to those of a linear geometric analysis for each model, and it can be observed that this linear analysis can lead to internal forces and displacements with lower values, which influences the design and may eventually offer structural safety risks. It is possible to conclude that the use of geometric nonlinear analysis should be prioritized in the design of timber structures, even if this implies in a higher computational cost and complexity involved in the analysis procedure.

Keywords: Timber structures. Geometric nonlinear analysis. Finite element method. Positional formulation.

1 Introdução

Diversos avanços relacionados à capacidade resistente de estruturas de madeira têm sido observados nas últimas décadas, incluindo a industrialização de peças compostas e diversos tipos de reforço estrutural, que contribuem para o emprego de elementos mais esbeltos. Esses elementos possibilitam ganhos de economia e otimização do material, sendo utilizados em diversas aplicações na construção civil, principalmente em sistemas estruturais de edifícios, coberturas, torres e pontes (CALIL JUNIOR; LAHR; DIAS, 2003). Na Figura 1 é ilustrada uma passarela com sistema em arco de madeira, onde é possível observar a esbeltez dos elementos em relação ao vão vencido.

Figura 1 – Passarela com sistema em arco de madeira em Portland (EUA)



Fonte: Western Wood Structures (2019). Disponível em:

< <https://www.westernwoodstructures.com/projects> >. Acesso em: 03 nov. 2019

Apesar das vantagens possibilitadas por elementos esbeltos e mais flexíveis, é evidente que a estrutura pode sofrer grandes deslocamentos e instabilidade dependendo de suas propriedades físicas e geométricas, não sendo aceitável a análise de seu equilíbrio na configuração indeformada. Assim, uma formulação que permita a análise não linear geométrica da estrutura deve ser priorizada, devido à necessidade de avaliar seu comportamento conforme a deformação. A formulação posicional baseada no Método dos Elementos Finitos, concebida por Coda (2003) e colaboradores, tem se mostrado como uma opção interessante devido à simplicidade de sua abordagem e precisão dos resultados

possibilitados.

Dessa forma, neste trabalho utiliza-se uma metodologia de análise não linear geométrica obtida a partir da formulação posicional do método dos elementos finitos, para avaliar o comportamento de treliças planas de madeira. São testados dois modelos de treliça plana, com dimensões tipicamente empregadas na construção civil nacional, considerando madeiras folhosas com classe de resistência C60 segundo a norma brasileira ABNT NBR 7190:1997. A formulação do elemento finito é realizada a partir da minimização da energia potencial total, sendo as posições nodais da estrutura adotadas como variáveis principais. O sistema de equações gerado é não linear em relação essas posições, sendo empregado o método de Newton-Raphson para resolução. Nos casos estudados, busca-se verificar a variação dos deslocamentos e esforços internos nas barras, comparando os valores obtidos segundo as análises geometricamente linear e não linear.

2 Revisão de literatura

Uma breve revisão sobre a análise não linear geométrica de estruturas de madeira e do método dos elementos finitos posicional é apresentada nesta seção, buscando contextualizar o tema estudado.

2.1 Análise não linear geométrica de estruturas de madeira

Em geral, pode-se notar que não há ampla discussão sobre a análise não linear geométrica de estruturas de madeira no Brasil. A escassez de trabalhos voltados especificamente a estruturas de madeira, e a ausência de diretrizes da norma brasileira relacionadas ao assunto, podem ter contribuído para esse cenário.

Por um lado, as normas de dimensionamento de estruturas de aço (ABNT NBR 8800:2008) e de concreto armado e protendido (ABNT NBR 6118:2014) mencionam a necessidade de empregar análise não linear geométrica de acordo com a deslocabilidade da estrutura. Além disso, nessas normas, são propostos métodos aproximados para prever o comportamento não linear geométrico de estruturas com certos limites de esbeltez, como o método da amplificação dos esforços (no caso das estruturas de aço) e o método γ_z (no caso das estruturas de concreto).

Por outro lado, a norma brasileira de dimensionamento de estruturas de madeiras, ABNT NBR 7190:1997, não faz menção a possíveis análises fisicamente ou geometricamente não lineares. Dessa forma, o procedimento considerando na NBR 7190 prevê que a estrutura trabalhará a pequenos níveis de deslocamento e deformação (em relação à geometria original), o que pode não corresponder ao comportamento real e limitar suas possíveis aplicações.

2.2 Sobre o método dos elementos finitos posicional

A formulação posicional do Método dos Elementos Finitos voltada à análise não linear geométrica foi proposta originalmente por Coda (2003). Diversos trabalhos seguintes deram continuidade e estenderam o alcance de aplicações do MEF posicional, sendo dois

trabalhos particularmente importantes no contexto de sua formulação voltada à análise não linear geométrica de estruturas reticuladas: os trabalhos de Coda e Greco (2004) e Greco et al. (2006).

Coda e Greco (2004) desenvolveram a formulação posicional do MEF voltada à análise não linear de pórticos planos, utilizando polinômio de aproximação cúbica. A objetividade da metodologia proposta também foi demonstrada. Os resultados obtidos foram comparados aos da literatura e do programa ADINA, tendo sido observada notável precisão.

Greco et al. (2006) apresentaram a formulação posicional do MEF para análise não linear de treliças especiais. Exemplos da literatura foram empregados para validar a metodologia proposta, assim como simulações no programa ANSYS. Os resultados também se mostraram satisfatoriamente precisos em relação às simulações efetuadas e à literatura.

A formulação empregada no presente trabalho, adaptada para treliças planas de madeira, foi baseada nas publicações mencionadas. Ela será descrita de forma detalhada na próxima seção.

3 Materiais e métodos

3.1 Procedimento de análise

Dois modelos de treliça são propostos para análise, sendo uma treliça tipo torre e um arco treliçado. Em todos os casos, considera-se que a madeira empregada na estrutura pertence à classe de resistência C60 das madeiras folhosas. Admite-se que o valor médio do módulo de elasticidade paralelo às fibras da madeira seja $E_0 = 24500$ MPa, tanto à tração quanto à compressão, de acordo com a ABNT NBR 7190:1997. Além disso, considera-se que as barras das treliças são dispostas de tal forma que a força interna atua na direção paralela às fibras da madeira, e que os nós da treliça são considerados como articulações perfeitas.

Nos dois exemplos de validação, a análise não linear geométrica realizada a partir do Métodos dos Elementos Finitos Posicional foi comparada a uma análise linear de primeira ordem. Um código em linguagem MATLAB foi utilizado para a implementação computacional da análise proposta. A formulação do elemento finito de treliça é descrita na subseção seguinte.

3.2 Método dos elementos finitos posicional

O princípio da mínima energia potencial total é empregado para formulação do elemento finito de treliça voltado para análise não linear geométrica. A energia potencial total de um corpo em equilíbrio estático é definida na Equação 1, em função da energia de deformação (U) e da energia potencial das forças externas (W).

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

A energia total de deformação é obtida em função do volume da barra (V), conforme Equação 2. Nessa expressão, a tensão normal é representada por σ e a deformação de engenharia é indicada por ε .

$$U = \int_V u \, dV = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \, dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \varepsilon^2 \, dV \quad (2)$$

A energia de deformação das forças aplicadas é apresentada na Equação 3, onde F representa o conjunto de forças aplicadas e Y o conjunto de posições independentes que podem ser ocupados por um ponto do elemento.

$$W = \sum F \cdot Y \quad (3)$$

A energia potencial total, portanto, pode ser reescrita na Equação 4, substituindo a energia de deformação e o potencial das forças externas pelos termos indicados nas equações anteriores.

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^2 \, dV - \sum F \cdot Y \quad (4)$$

O equilíbrio da estrutura é admitido quando a variação da energia potencial total em relação às coordenadas nodais é nula (condição estacionária), ou seja, quando as derivadas da energia potencial em relação às posições nodais são nulas. Isso também significa que a força interna em um nó deve ser igual à força externa aplicada sobre ele, o que caracteriza o equilíbrio, conforme Equação 5.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow F_{\text{int}} = F_{\text{ext}} \quad (5)$$

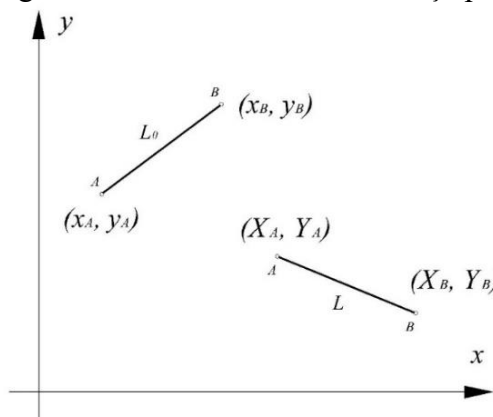
Na formulação posicional do elemento de treliça plana, admite-se que o elemento sofre deformação uniaxial constante, com variação nula da seção transversal. Admite-se que as seções permanecem planas após a deformação (hipótese de Euler-Bernoulli).

Um elemento com coordenadas iniciais dos nós sendo $Y_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]$, é ilustrado na Figura 2. Após a deformação, assume-se que os nós do elemento passam a ocupar as coordenadas $Y = [X_1, Y_1, X_2, Y_2]$.

A deformação longitudinal infinitesimal do elemento é definida na Equação 6, onde ds_0 é o comprimento inicial do elemento e ds é o comprimento após deformação. Como a referência é o comprimento original do elemento, a formulação é classificada como Lagrangiana. Caso a referência fosse adotada uma medida de deformação em que a referência fosse o comprimento atual, a formulação seria denominada Euleriana (CODA, 2018).

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1 \quad (6)$$

Figura 2 – Elemento finito de treliça plana



Fonte: Autores (2019).

A partir da expressão anterior, a configuração inicial é definida pela Equação 7, sendo L_0 o comprimento original do elemento.

$$ds_0 = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L_0 \quad (7)$$

De forma semelhante, a configuração geral é dada pela Equação 8. O comprimento após deformação do elemento é representado por L .

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = L \quad (8)$$

A partir da Equação 2 e das expressões anteriores, a energia de deformação do elemento pode ser reescrita na Equação 9, admitindo que a área de seção transversal (A) e o módulo de elasticidade longitudinal (E) do elemento sejam constantes. O termo u_t representa a energia específica de deformação do elemento.

$$U = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \, dV = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot \varepsilon^2 \cdot L_0 = L_0 \cdot u_t \quad (9)$$

A energia potencial total do elemento de treliça plana é então fornecida na Equação 10, onde (X_1, Y_1, X_2, Y_2) são as posições nodais e $(F_{X1}, F_{Y1}, F_{X2}, F_{Y2})$ são as respectivas forças externas dos nós.

$$\Pi = L_0 \cdot u_t - F_{X1} \cdot X_1 - F_{Y1} \cdot Y_1 - F_{X2} \cdot X_2 - F_{Y2} \cdot Y_2 \quad (10)$$

A variação da energia potencial total é representada na Equação 11, sendo dada pela primeira derivada parcial em relação às posições nodais. Como são considerados dois graus de liberdade por nó, tem-se $i = 1-4$. As posições nodais (X_1, Y_1, X_2, Y_2) podem ser representadas pelo índice i que varia de um a quatro, ou seja, na forma $(1, 2, 3, 4)$.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = L_0 \frac{\partial u_i}{\partial Y_i} - F_i = 0 \quad (11)$$

O sistema de equações gerado é não linear quanto às posições nodais, e pode ser representado de forma genérica na Equação 12.

$$\begin{aligned} g_1(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_1(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{X1} = 0 \\ g_2(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_2(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{Y1} = 0 \\ g_3(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_3(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{X2} = 0 \\ g_4(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_4(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{Y2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

O sistema de equações da Equação 12 também pode ser escrito com auxílio de notação indicial, segundo a Equação 13. Nesta expressão, o índice j varia de um a quatro para cada valor do índice i .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = g_i(Y_j, F_i) = f_i(Y_j) - F_i = 0 \quad (13)$$

Para resolução do sistema não linear de equações, pode-se utilizar o Método de Newton-Raphson conforme Equação 14, e adotar uma estratégia matricial.

$$g(Y) = g(Y_0) + \nabla g(Y_0) \cdot \Delta Y \cong 0 \quad (14)$$

Na Equação 14, as posições nodais iniciais são representadas pelo vetor Y_0 , enquanto Y é o vetor de posições nodais atuais e ΔY é o vetor de correção das posições nodais. O termo $g(Y_0)$ representa o vetor de resíduos, e ∇g é a matriz Hessiana. O vetor de resíduos é determinado de acordo com a primeira derivada parcial da energia potencial total em relação às posições nodais, enquanto a matriz Hessiana é obtida pela segunda derivada parcial em relação a essas mesmas posições.

Em síntese, os procedimentos indicados a seguir descrevem o funcionamento do Método de Newton-Raphson aplicado à análise não linear geométrica:

1. Definir Y_0 como a posição inicial dos nós, e calcular o vetor de resíduos $g(Y_0)$.
2. Determinar a matriz Hessiana ∇g .
3. Resolver o sistema de equações a partir da Equação 14 e calcular o vetor de correção das posições nodais ΔY .
4. Atualizar o vetor de posições Y_0 considerando $Y_0 = Y_0 + \Delta Y$.
5. Retornar à etapa 1 até que o vetor ΔY ou sua norma seja suficientemente pequeno, de forma que seja menor ou igual à tolerância adotada.

Para que o processo seja considerado iterativo-incremental, o carregamento total é dividido em incrementos cumulativos, os quais são aplicados gradualmente à estrutura.

Para o sistema estrutural, a montagem do conjunto de equações é realizada de forma semelhante ao que é feito nas análises convencionais do MEF. Contudo, não é necessário introduzir transformações de coordenadas na formulação posicional, o que reduz o trabalho algébrico do problema. Esta é uma vantagem notável da formulação posicional.

4 Resultados e discussão

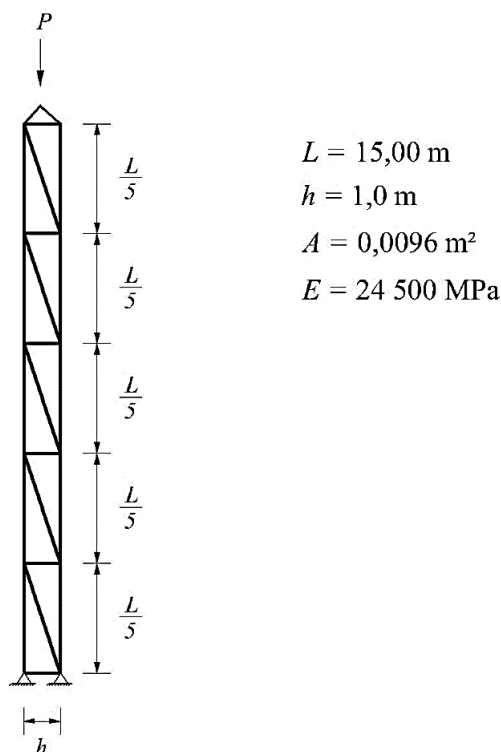
Dois modelos de treliças planas de madeira foram estudados, sendo comparada a influência das análises linear e não linear geométrica na variação do deslocamento dos nós e do esforço normal nas barras conforme o aumento das solicitações.

Na análise não linear geométrica, como critério de parada foi considerada uma tolerância de 10^{-7} para a norma do vetor ΔY determinado segundo a resolução do sistema de equações não lineares pelo Método de Newton-Raphson, para cada incremento de força. Ao todo, foram considerados 50 incrementos de força para cada modelo de treliça.

4.1 Treliça tipo torre

A primeira treliça analisada é do tipo torre (Figura 3), que possui comprimento total de 16 m e é birrotulada em sua base. Considera-se a ação de uma força vertical P aplicada ao nó localizado na extremidade livre da treliça, conforme representado na Figura 3. Outras propriedades da treliça são indicadas nessa mesma figura. De um modo geral, a força P tende a comprimir a treliça.

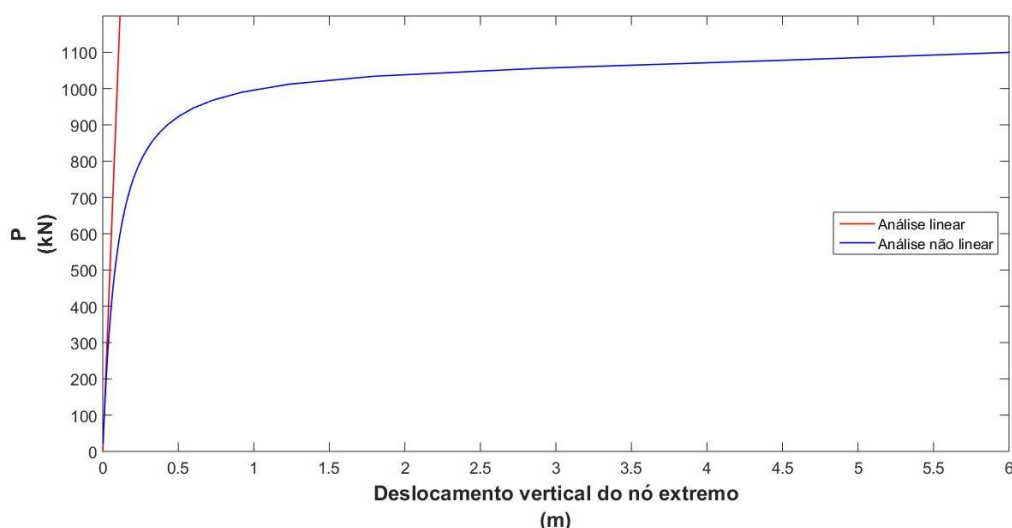
Figura 3 – Torre treliçada



Fonte: Autores (2019).

O deslocamento do nó localizado na extremidade livre é relacionado com a intensidade da força P na Figura 4. Percebe-se que o deslocamento aumenta significativamente quando $P > 600$ kN, uma vez que a partir dessa solicitação, a variação entre os valores do deslocamento obtidos a partir das duas análises supera 50%. O deslocamento cresce de maneira ainda mais acentuada entre 900 kN e 1100 kN, considerando os valores obtidos pela análise não linear, e continua aumentando desproporcionalmente até a iminência da instabilidade da treliça.

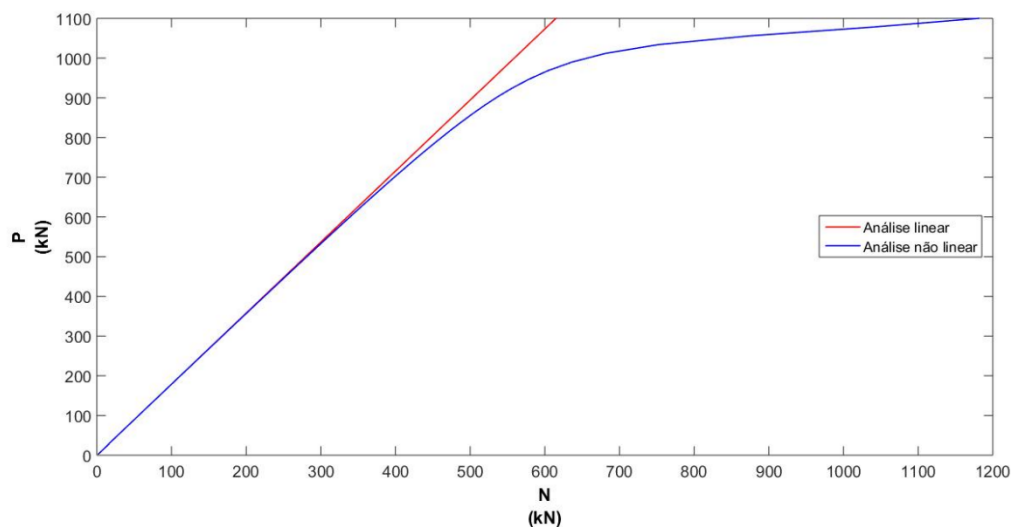
Figura 4 – Gráfico força-deslocamento (torre treliçada)



Fonte: Autores (2019).

Na Figura 5, o gráfico ilustra a variação do esforço normal na barra mais solicitada da treliça conforme o aumento da força P .

Figura 5 – Variação do esforço normal na barra mais solicitada (torre treliçada)



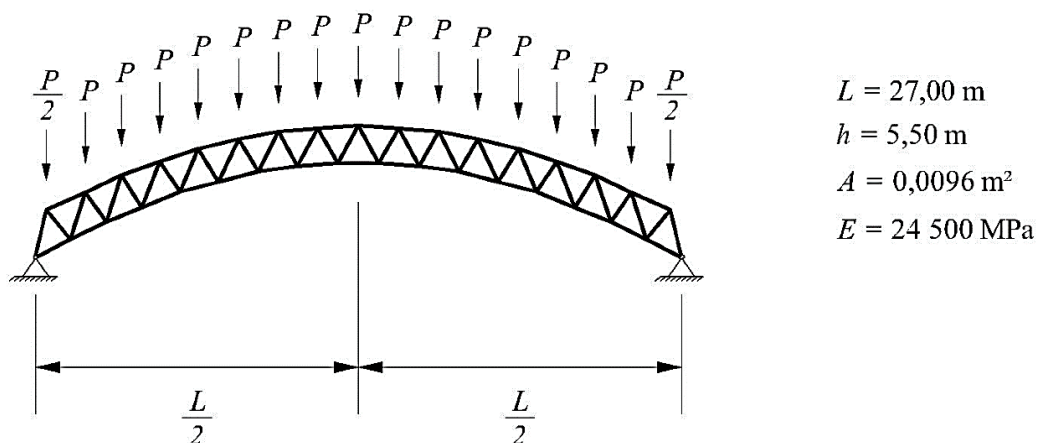
Fonte: Autores (2019).

Até alcançar uma força próxima de 700 kN, ambas as análises fornecem resultados semelhantes para o esforço normal. Assim, como essa solicitação possivelmente não seria obtida em serviço, pois a ruptura da madeira provavelmente ocorreria primeiro, o valor do esforço normal obtido pela análise linear não ofereceria riscos se fosse adotado no dimensionamento.

4.2 Arco treliçado

O segundo sistema analisado é um arco treliçado biarticulado de madeira (Figura 6), com vão de 27 m e altura total de 5,5 m. Esse sistema é uma opção eficiente para utilização como estrutura de coberturas de madeira de médio e longos vãos, acima de 25 m, conforme discutido por Lahr (1978). Para análise não linear geométrica, devido à simetria do arco e das áreas de influência, considera-se que uma força vertical P é aplicada aos nós internos do banzo superior do arco, enquanto os nós de extremidade desse mesmo banzo estão sujeitos a apenas metade da força P . As barras mais solicitadas localizam-se no banzo inferior do arco, próximas aos apoios.

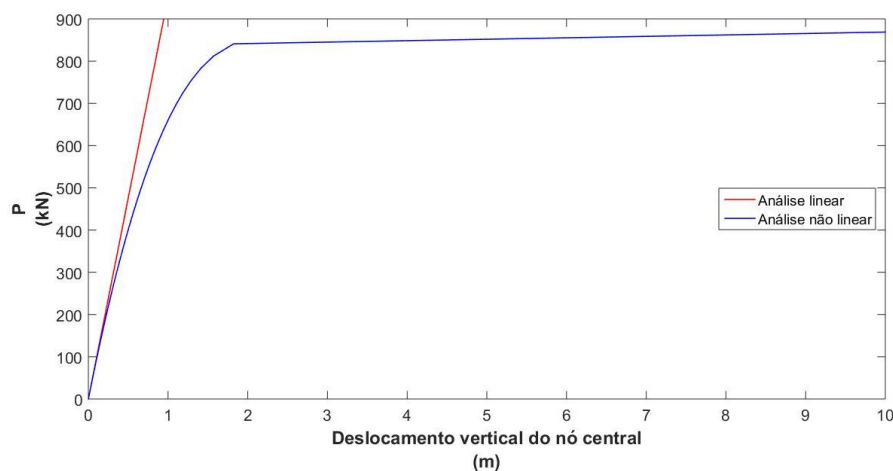
Figura 6 – Arco treliçado



Fonte: Autores (2019).

O gráfico que relaciona o deslocamento do nó central do banzo superior e a intensidade de P é indicado na Figura 7. Considerando a curva obtida pela análise não linear geométrica, nota-se maior variação do deslocamento quando P supera 400 kN, em que há uma diferença percentual de 15% entre as duas análises. Quando $P > 800$ kN, o deslocamento aumenta de forma significativa em relação ao acréscimo de força, até que a iminência da instabilidade do arco seja alcançada.

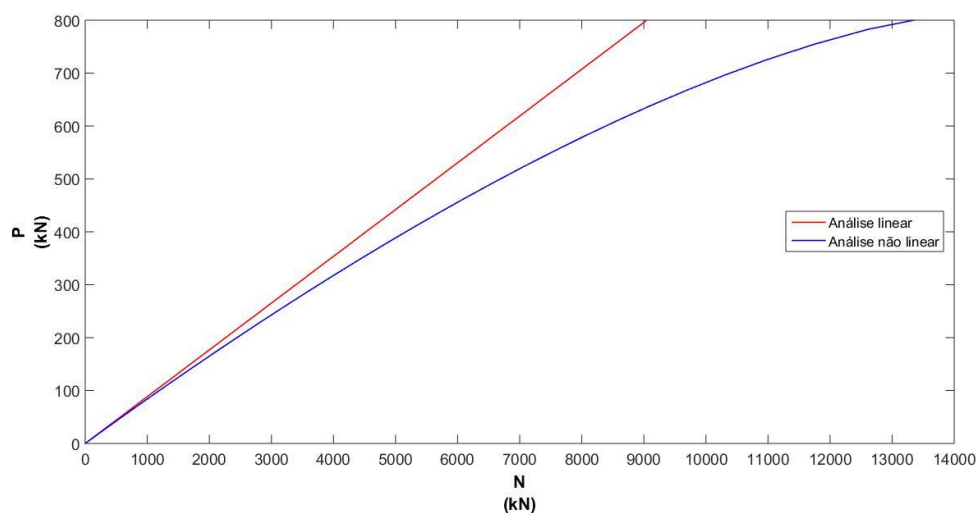
Figura 7 – Gráfico força-deslocamento (arco treliçado)



Fonte: Autores (2019).

Na Figura 8 apresenta-se outro gráfico, que relaciona o esforço normal na barra mais solicitada (N) do arco com a intensidade da força P . Observa-se que o esforço normal obtido pela análise não linear geométrica é maior quando $P > 200$ kN. Apesar de ser uma intensidade notável considerando a área da seção transversal dos elementos ($A = 0,0096$ m²), é possível que tal carregamento seja alcançado em serviço antes que ocorra ruptura da madeira, logo é imprescindível que os valores obtidos a partir da análise não linear sejam considerados no dimensionamento deste arco.

Figura 8 – Variação do esforço normal na barra mais solicitada (arco treliçado)



Fonte: Autores (2019).

5 Considerações finais

Neste trabalho foi apresentada uma formulação Lagrangiana posicional do Método dos Elementos Finitos para análise não linear geométrica de dois modelos de treliças planas de madeira.

A influência da análise não linear geométrica foi mais perceptível no caso do arco treliçado. De um modo geral, foi possível observar que a análise linear pode, dependendo da solicitação e da flexibilidade da estrutura, conduzir a valores inferiores de esforços internos e deslocamentos. Essa variação influencia a etapa de dimensionamento e eventualmente pode oferecer riscos à segurança da estrutura. Logo, o emprego de análise não linear geométrica deve ser priorizado no projeto de treliças de madeira, mesmo que isto implique em maior custo computacional e complexidade envolvida no procedimento de análise.

Sugere-se, para trabalhos futuros, que a formulação posicional seja adaptada e estendida à análise não linear geométrica de outros elementos e sistemas estruturais de madeira, como pórticos e elementos bidimensionais.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. A. **Dimensionamento de elementos estruturais de madeira**. Barueri: Manole, 2003.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular), 2003.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 193, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: análise estática e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite elements in analysis and design**, v. 42, p. 1079-1086, 2006.

LAHR, F. A. R. **Arco treliçado de madeira**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.