

Responsáveis

Eduardo Tengan e Élvia Mureb Sallum

Envie suas soluções para

RPM - Problemas

IME/USP - Cidade Universitária

Rua do Matão, 1010, bloco B, sala 105

05508-090 - São Paulo, SP

PROBLEMAS

As soluções dos problemas 331 a 335 serão corrigidas apenas se enviadas até 30 de junho de 2012.

331

Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x) - y) + f(y) = f(x + f(y)) - y$$

para quaisquer números reais x e y .

332

Sejam x e q números reais e sejam $a = \cos q + i \sin q$ e $z = \cos x + i \sin x$ números complexos. Utilizando a fórmula abaixo, da soma dos termos de uma progressão geométrica,

$$a + az + az^2 + \cdots + az^n = \frac{a(z^{n+1} - 1)}{z - 1} = \frac{az^{n/2}(z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}}$$

mostre que

$$(a) \quad \sin q + \sin(x+q) + \sin(2x+q) + \cdots + \sin(nx+q) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \left(\frac{nx}{2} + q \right)$$

$$(b) \quad \cos q + \cos(x+q) + \cos(2x+q) + \cdots + \cos(nx+q) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \left(\frac{nx}{2} + q \right)$$

333

Considere um triângulo ABC e pontos A_1, A_2 e B_1, B_2 nos lados AC e BC , respectivamente, tais que $CA_1 = A_1A_2 = A_2A$ e $CB_1 = B_1B_2 = B_2B$. Prove que, se $m(\angle A_1BA_2) = m(\angle B_1AB_2)$, então o triângulo ABC é isósceles.

334

Sejam

$$A = 8888^{8888}$$

B = soma dos dígitos de A quando escrito na base decimal

C = soma dos dígitos de B quando escrito na base decimal

D = soma dos dígitos de C quando escrito na base decimal

- (a) Mostre que $D \leq 12$ e que A e D deixam o mesmo resto na divisão por 9.
(b) Determine D .

335

De quantas maneiras diferentes podemos dividir dez pessoas em cinco grupos de duas pessoas cada um?

Probleminhas

1

Alice, Bernardo, Cecília, Otávio e Rodrigo são irmãos. Sabemos que:

- Alice não é a mais velha.
- Cecília não é a mais moça.
- Bernardo é mais velho que Otávio.
- Rodrigo é mais velho que Cecília, porém mais moço que Alice.

Você pode descobrir a ordem em que nasceram esses cinco irmãos?

2

Seja abc um número natural de três algarismos dois a dois distintos e não nulos com $a < b < c$. Permutando esses algarismos, obtemos seis números cuja soma é 1.998. Qual é o número abc ? (Tirado da Olimpíada de Matemática do Grande ABC/2005.)