UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E DISTRIBUIÇÃO

MARISTELA OLIVEIRA DOS SANTOS
FRANKLINA M. B. TOLEDO
SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO

Nº 93

NOTAS

São Carlos - SP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2577

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E DISTRIBUIÇÃO

MARISTELA OLIVEIRA DOS SANTOS
FRANKLINA M. B. TOLEDO
SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO

Nº 93

NOTAS

Série Computação

São Carlos – SP
Out./2007

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E DISTRIBUIÇÃO

MARISTELA OLIVEIRA DOS SANTOS
FRANKLINA M. B. TOLEDO
Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Avenida Trabalhador São-carlense, 400, CEP 13560-970 São Carlos-SP
e-mail: mari@icmc.usp.br
e-mail: fran@icmc.usp.br

SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO
Universidade Estadual Paulista-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Departamento de Ciências da Computação e Estatística
Rua Cristóvão Colombo 2265, CEP 15054-000 São José do Rio Preto-SP
e-mail: saraujo@ibilce.unesp.br

Resumo

Neste trabalho estudamos um problema de dimensionamento de lotes e distribuição que envolve além dos custos de estoques, produção e preparação, os custos de transportes para o armazém da empresa. Os custos logísticos estão associados aos contêineres necessários para empacotar os produtos produzidos. A empresa negocia um contrato de longo prazo onde um custo fixo por período é associado ao transporte dos itens, em contrapartida um limite de contêineres é disponibilizado com custo mais baixo que o custo padrão. Caso ocorra um aumento ocasional de demanda, novos contêineres podem ser utilizados, no entanto, seu custo será mais elevado. Neste trabalho comparamos a resolução do problema utilizando relaxação Lagrangeana/Surrogate com uma heurística Lagrangeana proposta na literatura. Testes computacionais mostraram que para este problema as duas relaxações são equivalentes quanto à qualidade das soluções encontradas, no entanto, o limitante da relaxação Lagrangeana/Surrogate é obtido num menor número de iterações.

Palavras chaves: Dimensionamento de lotes, Custos de Transporte, relaxação Lagrangeana/Surrogate.

Abstract

In this work we study a distribution and lot sizing problem that considers transportation costs to the company warehouse besides inventory, production and setup costs. The logistic costs are associated with the containers necessary for packing the produced items. The company negotiates a long term contract where a fixed cost per period is associated with the items transport, and where, a limited number of containers is made available with lower cost than the default cost. If an occasional demand increase occurs, other containers can be utilized, but that higher cost. In this work, we compare the solution of the problems using Lagrangian/Surrogate relaxation with the Lagrangian heuristic proposed in the literature. Computational tests show that for this problem both relaxations are equivalent with respect to solution's quality, however, the Lagrangian/Surrogate relaxation limit was obtained with less iteration.

Keywords: Lot Sizing, Transportation Costs, Lagrangian/Surrogate relaxation

1. Introdução

Os custos de transporte formam uma parte substancial do custo total de logística do produto, porém eles são freqüentemente negligenciados pelos problemas de dimensionamento de lotes. Os custos considerados nos modelos de dimensionamento de lotes se restringem aos custos de produção, de estocagem, de preparação e, para alguns casos, custos de horas extras. Revisões recentes para o problema de dimensionamento de lotes podem ser encontradas em Karimi *et al.* (2003) e em Brahimi *et al.* (2006).

Vroblefski *et al.* (2000) afirmam que um dos maiores custos em sistemas de distribuição (logístico) é o custo de transporte. Estes custos, segundo os autores, tendem a serem dependentes do volume de produtos transportado. Baumol e Vinod (1970) introduziram os custos das taxas de embarque ou carga em um modelo de estoque e propuseram dois modelos para solução desse problema. No problema estudado por Lee *et al.* (2005), os autores consideram que a capacidade de transporte está associada ao número de contêineres utilizados pelos itens, ou seja, os itens são produzidos e alocados em contêineres, logo o objetivo é minimizar o número de contêineres utilizados uma vez que os custos logísticos são proporcionais a esse número. Os autores propuseram uma heurística baseada na representação do modelo como um problema de fluxo em redes. As soluções obtidas foram comparadas com as melhores soluções geradas pelo CPLEX 6.0.5 considerando o limite de 700.000 nós. Esse trabalho é uma extensão de Lee (1989), no qual não são considerados múltiplos itens. Em Norden e Velde (2005), os custos de carga, dependem do tipo de contrato estabelecido com o operador logístico, ou seja, não são somente dependentes do volume de produto a ser transportado. O modelo proposto pelos autores considera um problema prático de uma empresa européia com flutuações mensais de distribuição de produtos entre sua fábrica e seus armazéns. A companhia negocia um contrato de longo prazo onde um custo fixo por período é associado ao transporte dos itens, em contrapartida um limite de contêineres é disponibilizado com custo mais baixo que o custo padrão. O número limite de contêineres é estipulado com base numa previsão de demanda. Caso ocorra um aumento ocasional de demanda, novos contêineres podem ser utilizados, no entanto, seu custo será mais elevado. O objetivo é minimizar os custos de produção e de distribuição dos itens e para tanto os autores propõem uma heurística lagrangeana para solução do problema.

Os trabalhos relacionados acima tratam de uma maneira integrada o problema de distribuição e o problema de produção. Uma revisão geral dos problemas integrados de produção e de distribuição pode ser encontrada em Erenguç *et al.* (1999) e em Rizk e Martel (2001) e uma revisão que considera extensões do modelo clássico de dimensionamento de lotes para modelos com custos de transportes pode ser vista em Bertazzi e Speranza (1999).

Neste trabalho vamos estudar e propor um novo método de solução para o problema abordado em Norden e Velde (2005). Nosso método consiste numa heurística usando relaxação lagrangeana/surrogate para o problema cujos resultados são comparados à heurística lagrangeana apresentada em (Norden e Velde, 2005).

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção, apresentamos a modelagem do problema proposta por Norden e Velde (2005). A heurística proposta é apresentada na Seção 3. Os resultados computacionais são resumidos na Seção 4. As conclusões e as pesquisas futuras são apresentadas na Seção 5.

2. Formulação Matemática

O modelo estudado neste trabalho foi proposto por Norden e Velde (2005) para um problema prático de uma empresa européia com flutuações mensais de distribuição de produtos entre sua fábrica e seus armazéns. O contrato de distribuição negociado pela companhia consiste de três tipos de custos:

- c_0 – custo fixo mensal do contrato;
- c_1 – custo unitário dos primeiros R contêineres utilizados (R é estipulado no contrato inicial e é determinado com base numa estimativa de demanda dos itens);

- c_2 – custo unitário dos demais contêineres.

Como base nestes valores a função de custo para utilizar r contêineres pode ser expressa por:

$$f(r)=\begin{cases} c_0 + r\,c_1 & se\ \ r \le R \\ c_0 + R\,c_1 + (r-R)c_2 & se\ \ r > R \end{cases}$$

O problema consiste em determinar a produção do item i (i = 1,2, ..., n) em cada um dos t períodos (t = 1, 2, ..., T) do horizonte de planejamento para atender uma demanda d_{it} preestabelecida que devem ser satisfeitas sem atraso. Um custo fixo de preparação (s_{it}) ocorre quando existir produção do item i no período t, ou seja, $X_{it} > 0$. O objetivo é determinar um plano de produção que minimize a soma dos custos de estocagem (h_{it}), das preparações e de transporte (c_0, c_1 e c_2). No modelo, os autores consideram que cada palete (todos iguais) pode acomodar P unidades de qualquer produto, ou seja, os produtos possuem tamanhos iguais. Além disso, assumem que os pedidos são feitos no início de cada período e que os produtos podem ser usados para satisfazer a demanda no mesmo período em que são produzidos. Os estoques iniciais de todos os itens são nulos, ou seja, $I_{i0} = 0$, $\forall i$. Os parâmetros e variáveis do modelo, ainda não definidos, são descritos a seguir.

Variáveis de decisão e Parâmetros

Y_{it} Variável binária que indica a produção do item i no período t (Y_{it} =1 se X_{it} > 0 e Y_{it} =0, caso contrário);

A_t Número de contêineres transportados no período t com taxa c_1 (variável);

B_t Número de contêineres transportados no período t com taxa c_2 (variável);

M um número grande positivo (parâmetro).

$$z = \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(h_{it}I_{it} + s_{it}Y_{it}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(c_0 + c_1A_t + c_2B_t\right) \quad (1)$$

s.a

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1...n;\ t = 1,...,T; \quad (2)$$

$$X_{it} - M\,Y_{it} \le 0 \qquad i = 1...n;\ t = 1,...,T; \quad (3)$$

$$B_t + A_t \ge \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} X_{it} \qquad t = 1,...,T; \quad (4)$$

$$0 \le A_t \le R \qquad t = 1,...,T; \quad (5)$$

$$I_{i0} = 0 \qquad i = 1...n; \quad (6)$$

$$X_{it} \ge 0,\ I_{it} \ge 0 \qquad i = 1...n;\ t = 1,...,T; \quad (7)$$

$$A_t,\ B_t \in \mathrm{N},\ Y_{it} \in \{0,1\} \qquad i = 1...n;\ t = 1,...,T. \quad (8)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos custos de estoque, de preparação e de transporte. As restrições (2) garantem que a demanda é atendida sem atraso. As restrições (3) asseguram que o custo de preparação é considerado apenas quando existe produção. Nas restrições (4) asseguramos que um número suficiente de contêineres para o transporte dos itens é alocado. As restrições (5) limitam a utilização dos contêineres com custo mais baixo a R. Em (6) impomos que os estoques iniciais dos itens sejam nulos e as restrições (7) garantem a não negatividade das variáveis de produção e de estoque. Finalmente, em (8) restringimos os valores das variáveis binárias e inteiras. Norden e Velde (2005) provaram que o problema definido por (1)-(8) é *NP-difícil*. Como o custo $\sum_{t=1}^{T} c_0$ é constante e independe da decisão tomada, este será omitido de agora em diante neste trabalho.

3. Método de solução

Neste trabalho desenvolvemos uma heurística baseada em relaxação lagrangeana combinada com relaxação surrogate para resolver o problema de dimensionamento de lotes (PDL) com custos de transporte discutido na seção anterior. Para um desenvolvimento teórico da relaxação combinada Lagrangeana/Surrogate veja Narciso e Lorena (1999).

A relaxação lagrangeana introduzida por Held e Karp (1971) (veja também os trabalhos clássicos de Geofrion (1974) e Fisher (1981)) tem sido utilizada com sucesso nas mais diversas áreas de aplicações, inclusive em problemas de dimensionamento de lotes (veja Trigeiro *et al.*, 1989, Lozano *et al.*, 1991, Diaby *et al.*, 1992 e Toledo e Armentano, 2006).

A relaxação surrogate foi introduzida por Glover (1965) e Glover (1968) com estudos teóricos dados em Greenberg e Pierskalla (1970), em Greenberg e Pierskalla (1973) e em Glover (1975). Devido ao sucesso da relação lagrangeana e à dificuldade de obter limitantes para a relaxação surrogate, está última tem sido menos difundida do que a primeira. No entanto, um importante resultado apresentado em Greenberg e Pierskalla (1970) garante que o *gap* de dualidade da relaxação surrogate é menor ou igual ao *gap* da relação lagrangeana. Esse fato tem levado inúmeros pesquisadores a prosseguir estudando a relaxação surrogate. Desta forma, surgiram alguns trabalhos que estudam de forma integrada as relaxações lagrangeana e surrogate (Karwan e Rardin, (1979)). Neste contexto, Lorena e Senne (1996) propuseram a relaxação Lagrangeana/Surrogate (*lagsur*). Esta relaxação é composta de duas etapas: na primeira etapa a relaxação surrogate é aplicada a um conjunto de restrições as quais são associados multiplicadores surrogate, o que resulta numa única restrição; na segunda etapa a relaxação Lagrangeana é aplicada a restrição surrogate, a qual é associado um multiplicador Lagrangiano. Temos como resultado um problema lagrangiano com um multiplicador unidimensional. Algumas aplicações da relaxação *lagsur* podem ser encontradas em Lorena e Senne (1996) que estudaram o problema de localização não capacitado; Narciso e Lorena (1999) que estudaram o problema de alocação generalizado; Senne e Lorena (2000) que trataram do problema das p-medianas; Lorena e Pereira (2002) que consideram problema de máxima cobertura; Oliveira e Morábito (2006) que trataram do problema de carregamento de contêineres do produtor. Entretanto, não foi encontrada na literatura nenhuma aplicação da relaxação *lagsur* ao problema de dimensionamento de lotes.

3.1. Relaxação Lagrangeana/Surrogate

Inicialmente propomos para o problema (1)-(8) a relaxação surrogate do conjunto de restrições (4) e, em seguida, a relaxação lagrangeana da restrição surrogate. Para obter a relaxação surrogate do problema (1)-(8) utilizamos os multiplicadores $\lambda = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_T) \geq 0$ associados as restrições (4) e obtemos a relaxação surrogate apresentada a seguir.

$$v(Su_\lambda) = \min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(h_{it}I_{it} + s_{it}Y_{it}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(c_1A_t + c_2B_t\right) \qquad (9)$$

s.a

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \qquad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (10)$$

$$X_{it} - M\,Y_{it} \leq 0 \qquad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (11)$$

$$\frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\lambda_t\left(X_{it} - B_t - A_t\right) \leq 0 \qquad (12)$$

$$0 \leq A_t \leq R \qquad t = 1,...,T; \quad (13)$$

$$I_{i0} = 0 \qquad i = 1...n; \quad (14)$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0 \qquad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (15)$$

$$A_t,\ B_t \in \mathrm{N}, Y_{it} \in \{0,1\} \qquad i = 1...n; t = 1,...,T. \quad (16)$$

A restrição (12) é uma relaxação do número de contêineres necessários para transportar os itens em cada período, no entanto, garante que a soma total dos contêineres é suficiente para transportar todos os itens produzidos no horizonte de planejamento. Ao contrário do que o ocorre com o problema relaxado (relaxação Langrangiana) de Norden e Velde (2005), o problema resultante da relaxação surrogate (9)-(16) não é um problema de fácil resolução, pois as variáveis de decisão X_{it} continuam integradas pela restrição do tipo mochila (12), logo este não pode ser decomposto em subproblemas independentes, o que impede a aplicação dos métodos conhecidos na literatura. A fim de facilitar sua resolução, propomos neste trabalho a relaxação lagrangeana da restrição surrogate (12) do problema (9)-(16). Desta forma, após relaxar a restrição surrogate, temos a relaxação lagrangeana/surrogate (*lagsur*) com a seguinte formulação:

$$v(L_{\mu}Su_{\lambda}) = \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(h_{it}^{*}I_{it} + s_{it}Y_{it}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left((c_1 - \mu\lambda_t)A_t + (c_2 - \mu\lambda_t)B_t\right) + Cte \quad (17)$$

s.a

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (18)$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (19)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1,...,T; \quad (20)$$

$$I_{i0} = 0 \quad i = 1...n; \quad (21)$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0 \quad i = 1...n; t = 1,...,T; \quad (22)$$

$$A_t, B_t \in \mathbb{N}, Y_{it} \in \{0,1\} \quad i = 1...n; t = 1,...,T. \quad (23)$$

em que:

$$Cte = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{\mu\lambda_t}{P}d_{it} - \frac{\mu\lambda_1}{P}I_{i0}\right)$$

$$h_{it}^{*} = h_{it} + \frac{\mu\lambda_t - \mu\lambda_{t+1}}{P} \quad e \quad \lambda_{T+1} = 0.$$

O valor da função objetivo do problema relaxado (*lagsur*) (17)-(23) fornece um limitante inferior para o problema original. Para um dado valor de μ, o problema resultante se resume a um problema lagrangiano que pode ser resolvido utilizando o método do subgradiente. Note que se $\mu = 1$ temos a relaxação lagrangeana do problema original. Da mesma forma que para o problema apresentado em Norden e Velde (2005), no problema (17)-(23) as variáveis de decisão X_{it} não estão mais integradas às variáveis relacionadas aos contêineres, logo para valores fixos de μ e $\lambda_1, \cdots, \lambda_T$ este pode ser decomposto em dois subproblemas independentes: subproblema de dimensionamento de lotes e subproblema de transportes.

O primeiro subproblema obtido a partir da relaxação *lagsur* é um problema de dimensionamento de lotes sem restrições de capacidade, cujos custos da função objetivo são definidos pelo multiplicador lagrangiano e pelos multiplicadores surrogate. Este problema pode ser decomposto em um problema de dimensionamento de lotes para cada item, como definimos a seguir. A solução ótima de $v(Sub_{1i})$ pode ser facilmente obtida utilizando o algoritmo de Wagner e Whitin (1958).

$$v(Sub_{1i}) = \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(h_{it}^{*}I_{it} + s_{it}Y_{it}\right)$$

s.a

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad t = 1,...,T;$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad t = 1,...,T;$$

$$I_{i0} = 0$$

$$X_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, Y_{it} \in \{0,1\} \quad t = 1,...,T.$$

O subproblema de transportes obtido após aplicarmos a relaxação *lagsur* é dado por:

$$v(Sub_2) = \quad min \quad \sum_{t=1}^{T}\left((c_1 - \mu\lambda_t)A_t + (c_2 - \mu\lambda_t)B_t\right)$$

$$s.a$$

$$0 \leq A_t \leq R \qquad t = 1,\dots,T;$$

$$A_t,\ B_t \in \mathrm{N} \qquad i = 1\dots n;\ t = 1,\dots,T.$$

Este subproblema difere do apresentado em Norden e Velde (2005) apenas pelos custos da função objetivo, logo pode ser resolvido de forma ótima pela heurística gulosa proposta pelos autores, cuja complexidade é O(T log T). Para melhorar a qualidade dos limitantes inferiores, Norden e Velde (2005) propõem alguns limitantes para as variáveis B_t (24) e algumas desigualdades válidas (25).

$$B_t \leq \left\lceil \frac{1}{P}\sum_{t=s}^{T}\sum_{i=1}^{n} d_{it} \right\rceil - (T - s + 1)R \quad para \quad s = 1,\dots,T \tag{24}$$

$$\sum_{t=1}^{s}(A_t + B_t) \geq \left\lceil \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{s} d_{it} \right\rceil \quad para \quad s = 1,\dots,T \tag{25}$$

A heurística é resumida no algoritmo a seguir, em que:

UD_t - a demanda acumulada não atendida no período t;
FS_t - espaço não utilizado nos contêineres com custo mais baixo no período t;

Passo 0.	**Inicialização** Faça para t = 1, ... , T: $UD_t = \sum_{i=1}^{n} d_{it}$ e $FS_t = P*R$.
Passo 1.	**Cálculo de A e B para o primeiro período.** Faça $A_1 = min\{R*P,\ UD_1\}$, $B_1 = max\{0,\ UD_1 - A_1\}$, $UD_1 = 0$, $FS_1 = max\{0,\ UD_1 - A_1\}$
Passo 2.	**Cálculo inicial de A e B para os demais períodos.** Faça para t = 2, 3, ..., T: Se ($c_1 - \mu\lambda_t < 0$) então $A_t = R$, senão $A_t = 0$; $B_t = 0$ Faça s = 2.
Passo 3.	Defina um conjunto em ordem crescente como a seguir: $NC = \{c_1 - \mu\lambda_t, t = 1,\cdots,s\} \cup \{c_2 - \mu\lambda_t, t = 1,\cdots,s\}$
Passo 4.	Escolha o primeiro elemento do conjunto. Se o elemento considerado vem do primeiro subconjunto então $A_t = A_t + min\{UD_s,\ FS_s\}$ $UD_s = UD_s - min\{UD_s,\ FS_s\}$ $FS_s = FS_s$ - $min\{UD_s,\ FS_s\}$. Se $UD_s = 0$ então retire esse elemento do conjunto. senão $B_t = B_t + UD_s$ $UD_s = 0$. Se $\mathrm{UD_S} = 0$ então vá para o **Passo 5**, senão volte ao **Passo 4**.
Passo 5.	Faça $s = s+1$. Se $s \leq T$ então volte para o **Passo 4**.
Passo 6.	Converta os valores de A_t e B_t para contêineres e calcule o valor da função objetivo.

Neste trabalho vamos resolver o problema dual *lagsur* como em Narciso (1998). O autor propõe que por k iterações seja aplicado o método subgradiente ao problema *lagsur* para um valor de μ fixo. A partir da solução obtida, aplicamos uma busca local para o valor do multiplicador μ que é mantido por mais k iterações do método subgradiente, e assim sucessivamente até que um critério de parada seja atingido. Esse algoritmo é descrito a seguir.

Passo 1.	**Inicialização** Defina um valor inicial para μ e para λ_t, t = 1, 2, ... T. Faça k = 1 e cont=0.
Passo 2.	**Solução do problema** Resolva os n subproblemas de dimensionamento de lotes. Resolva o subproblema de transportes. Se a solução obtida for melhor que o limitante atual então atualize o limitante atual e faça cont = 0; senão incremente cont. Calcule o subgradiente. Se a solução obtida foi ótima então **PARE.**
Passo 3.	Aplique 3 passos da busca unidimensional como proposto em Narciso (1998) para atualização o valor de μ.
Passo 4.	Se cont = 15 então atualize o passo do subgradiente. Atualize os valores de λ_t, t = 1, 2, ... T. $k = k + 1$ Se k < num_Max_iterações então volte ao **Passo 2.** senão **PARE.**

O algoritmo subgradiente proposto por (Held *et al.*, 1974) foi implementado neste trabalho utilizando os seguintes critérios para atualização do passo do subgradiente:

$$\theta^k = \frac{\eta^k (UB - v(L_\mu Su_\lambda))}{\|CX^k\|^2}$$

onde $v(L_\mu Su_\lambda)$ é a solução da relaxação lagsur na iteração k, UB é um limitante superior para a solução ótima do problema (1)-(8), ou seja, uma solução factível e η^k é uma constante. O valor inicial de η é 1,75, esse valor é mantido por 15 iterações, depois é dividido por 2 e assim sucessivamente.

3.2. Heurística Proposta

Neste trabalho propomos uma heurística baseada na relaxação *lagsur* para a solução do problema estudado. Dada uma solução infactível obtida pela minimização do problema *lagsur* aplicamos uma heurística de factibilização baseada em movimentos de transferência de produção entre períodos para buscar uma solução factível para o problema. Se a solução obtida for factível uma heurística de melhoria é aplicada à solução. A heurística de factibilização é aplicada a cada passo do algoritmo subgradiente. A inclusão dos passos a seguir no segundo algoritmo apresentado na Seção 3.1. ilustra a heurística proposta.

Passo 3.1.	Se a solução atual não for factível então aplique o Procedimento de Factibilização.
Passo 3.2.	Se a solução atual for factível então aplique o Procedimento de Melhoria.

3.2.1. Procedimento de Factibilização

O procedimento de factibilização utilizado neste trabalho foi proposto em Norden e Velde (2005). A cada iteração do algoritmo de relaxação, o subproblema de transportes é utilizado para construir uma solução factível. As restrições (2)-(3) e (6)-(8) são satisfeitas para qualquer solução do subproblema de dimensionamento de lotes, assim, o objetivo é encontrar A_t e B_t que satisfaçam as restrições (4) e (5). Em outras palavras, para cada período, os itens são produzidos e, quando possível, alocados nos contêineres com custos baixos. O restante produzido é colocado em contêineres com custos altos. Seja X^*_{it} (i=1,..., n e t=1,...,T) uma solução ótima para o subproblema de dimensionamento de lotes. Esta solução constitui uma solução factível para o problema original se usarmos A^*_t contêineres com custos baixos e B^*_t contêineres com custos altos, em que:

$$A^*_t = \min\left\{R, \left\lceil \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} X^*_{it} \right\rceil\right\} \text{ e } B^*_t = \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} X^*_{it} \right\rceil - R\right\} \text{ para } t = 1,\cdots,T.$$

3.2.2. Procedimento de Melhoria

A partir de uma solução factível, são executados três passos com o objetivo de melhorar a solução sem perder a factibilidade. No primeiro passo os períodos são processados em ordem crescente, ou seja, a partir do primeiro período do horizonte de planejamento em direção ao último é verificado se existe algum período t onde $B_t > 0$, o que significa que estão sendo utilizados contêineres no período t com taxa c_2. O próximo passo consiste em buscar um período t' posterior a t em que existam contêineres mais baratos que não estão sendo totalmente utilizados ($A_{t'}<R$). Para um dado item i produzido no período t, calculamos qual a quantidade que pode ser transferida, ou seja, o mínimo entre a quantidade produzida do item i no período t, o estoque do item i no período t, a quantidade que cabe nos contêineres baratos não utilizados no período posterior t' e a quantidade que cabe nos contêineres caros que estão sendo utilizados no período t.

Desta forma criamos uma possibilidade de transferência, mantendo a factibilidade da solução. Para uma dada possibilidade de transferência, calculamos a variação no custo caso tal possibilidade seja concretizada. No cálculo da variação do custo consideramos: possíveis reduções nos custos de estocagem, possíveis reduções ou acréscimos nos custos de preparação considerando o período t e o período posterior t', e possíveis reduções nos custos de transportes. Caso a variação do custo seja negativa, a transferência deste item é concretizada e, se B_t ainda é positivo, buscamos outro item e avaliamos uma nova possibilidade de transferência. Caso B_t não seja positivo, continuamos acrescentando os períodos, buscando por períodos onde estejam sendo utilizados contêineres com custo c_2.

O segundo passo é semelhante ao primeiro, mas é executado com início no último período em direção ao período inicial. O terceiro passo é igual ao primeiro. No entanto, a configuração inicial é diferente devido ao dois passos executados anteriormente.

4. Testes computacionais

A abordagem de solução proposta neste artigo e a proposta por Norden e Velde (2005) foram implementadas em linguagem C e compiladas utilizando o programa Borland C++ versão 5. Os testes foram realizados em um microcomputador Pentium IV 3GHz com 512 de memória RAM e sistema operacional Windows XP. Para obtenção da solução ótima foi utilizado o CPLEX 10.0.

As instâncias foram geradas baseadas no trabalho de Norden e Velde (2005). Desta forma, para todas as instâncias consideramos: P=100, n=20, T=12 (corresponde a um horizonte de planejamento de um ano) e custos de preparação s_{it}=100 para todos os itens e períodos. As demandas d_{it} foram geradas uniformemente no intervalo $\left[\left\lfloor \frac{ED_i}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{3ED_i}{2} \right\rceil\right]$, onde ED_i é a demanda média gerada uniformemente no intervalo [40,700]. No processo de geração dos dados, consideramos picos de demanda no quinto e décimo período, onde a demanda d_{it} é multiplicada por 1,5. Consideramos dois tipos de custos de transporte, os custos para os contratos negociados em longo prazo ($c_1 = 50$ e $c_2 = 200$) e para os contratos em curto prazo ($c_1 = 150$ e $c_2 = 500$). O número máximo de contêineres baratos, ou seja, o valor R é calculado de acordo com a fração de demanda que será transportada com o custo c_1. São consideradas $FR = \frac{1}{4}$ e $FR = \frac{1}{6}$. O valor $FR = \frac{1}{4}$ significa que R deve ser gerado de forma que para um quarto dos períodos a demanda deve ser inferior a $R*P$. Assim como para os custos de preparação, assumimos que os custos de estoque são iguais para todos os itens e constantes ao longo do horizonte de planejamento, dois custos foram considerados: os custos baixos, $h=1$, e os custos altos $h = 3$.

Geramos 100 instâncias para os testes computacionais, considerando cada conjunto de parâmetros (FR, h, c_1, c_2). Para os procedimentos baseados na relaxação Lagrangeana e na Lagrangeana/surrogate(Lagsur) consideramos o número máximo de iterações 800. Para o Lagsur consideramos o valor do multiplicador Lagrangiano inicial $\mu = 1$ e, a cada iteração do subgradiente, a execução da busca unidimensional por 3 iterações. Os resultados obtidos foram analisados considerando:

UBLag	valor da melhor solução factível encontrada pela heurística Lagrangeana;
UBLsur	valor da melhor solução factível encontrada pela heurística Lagsur;
LILag	valor do limitante inferior encontrado pela relaxação Lagrangeana;
LILsur	valor do limitante inferior encontrado pela relaxação Lagsur;
OC	a melhor solução obtida pelo CPLEX após 300 segundos;
GapLag	valor médio de 100 x *(UBLag-LILag)/LILag*
GapLsur	valor médio de 100 x *(UBLsur-LILsur)/LILsur*
GapOLag	valor médio de 100 x *(UBLag-OC)/OC*
GapOLsur	valor médio de 100 x *(UBLsur-OC)/OC*
MgapLag	valor máximo de 100 x *(UBLag-OC)/OC*
MgapLsur	valor máximo de 100 x *(UBLsur-OC)/OC*
NMITLag	número médio de iterações da heurística Lagrangeana;
NMITLsur	número médio de iterações da heurística Lagsur;
TCLag	tempo computacional médio da heurística Lagrangeana;
TCLsur	tempo computacional médio da heurística Lagsur;
TC	tempo computacional médio do CPLEX;

Na Tabela 1 apresentamos os resultados dos procedimentos heurísticos. Para os casos estudados, o procedimento *Lagsur* converge para o melhor limitante inferior, em média, mais rápido do que o procedimento Lagrangiano puro e, além disso, apresenta soluções, com os desvios médios menores do que o Lagrangiano. Porém, não podemos afirmar que o procedimento da relaxação *Lagsur* seja o melhor procedimento para o problema, pois tanto na estabilização quanto na qualidade das soluções oferecidas, são muito semelhantes, apesar da pequena melhoria. Deste modo, podemos dizer que ambas as abordagens são competitivas. Além disso, podemos também observar na Tabela 1 que os procedimentos apresentam melhores limitantes quando consideramos custos de transportes em curto longo prazo ($c_1 = 150$

e c_2 = 500). Ou seja, os procedimentos são sensíveis a estes parâmetros, bem como aos custos de estoque, conforme pode ser visto na Tabela 2.

Tabela 1: Resultados computacionais para diferentes parâmetros.

FR	h	c1	c2	GapLag	GapLsur	Mgap Lag	Mgap Lgsur	TcLag	TCLgsur	NMITLag	NMITLgsur	Tc	GapOLag	GapOLgsur
1 / 6	1	50	200	0,99	0,99	1,77	1,77	0,08	0,21	714,14	722,08	299,85	8,10	8,10
1 / 4	1	50	200	1,04	1,04	1,65	1,7	0,09	0,22	734,41	738,51	298,75	8,30	8,29
1 / 6	3	50	200	0,81	0,71	1,37	1,25	0,09	0,22	426,85	399,7	300,19	8,73	8.83
1 / 4	3	50	200	0,75	0,71	1,16	1,5	0,11	0,24	425,02	359,55	299,33	9,34	9,38
1 / 6	1	150	500	1,05	1,06	1,7	1,7	0,08	0,21	651,55	657,31	300,26	3,32	3,32
1 / 4	1	150	500	1,11	1,12	1,97	1,91	0,09	0,22	729,92	726,54	300,22	3,41	3,41
1 / 6	3	150	500	0,96	0,92	1,56	1,75	0,08	0,21	556,88	542,52	300,18	3,71	3,73
1 / 4	3	150	500	0,93	0,92	1,56	1,75	0,1	0,23	598,83	583,86	300,22	4,17	4,19
			Média	0,96	0,93	1,59	1,67	0,09	0,22	604,70	591,26	299,88	6,14	6,16

Na Tabela 2 apresentamos os resultados de ambos os procedimentos considerando vários valores dos custos de estoque. Em ambos os procedimentos observamos que quanto mais baixo o custo de estoque, maiores os desvios médios, sendo que o *Lagsur* apresenta resultados sensivelmente melhores que o Lagrangiano. O efeito dos custos de estoque já tinha sido destacado em Norden e Velde (2005). Ao considerarmos o custo de estoque nulo, na média, os procedimentos desenvolvidos determinaram soluções de melhor qualidade do que o CPLEX. No entanto, para os custos elevados de estoque, o CPLEX obtém soluções de melhor qualidade do que os procedimentos propostos.

Tabela 2. Resultados computacionais para diferentes valores de custos de estoque.

FR	h	c1	c2	GapLag	GapLsur	Mgap Lag	Mgap Lgsur	TcLag	TcLgsur	NMITLag	NMITLgsur	Tc	GapOLag	GapOLgsur
1 / 4	0	50	200	2,75	2,7	4,29	4,17	0,15	0,3	794,98	794,74	300,25	-0,51	-0.47
1 / 4	0.5	50	200	1,12	1,07	1,85	1,81	0,1	0,23	779,64	777,21	300,26	7,56	7,57
1 / 4	1	50	200	1,04	1,04	1,65	1,7	0,09	0,22	734,41	738,51	298,82	8,29	8,29
1 / 4	2	50	200	0,86	0,86	1,5	1,53	0,09	0,23	629,73	588,45	298,73	9,07	9,08
1 / 4	3	50	200	0,75	0,71	1,16	1,5	0,11	0.23	425,02	359,55	299,3	9,35	9,38
1 / 4	5	50	200	0,78	0,72	1,23	1,29	0,11	0,24	289,99	225,89	300,17	9,44	9,50
1 / 4	10	50	200	0,78	0,59	1,31	1,28	0,11	0,24	274,33	270,83	295,31	9,49	9,70
			Média	1,15	1,10	1,86	1,90	0,11	0,24	561,16	536,45	298,98	7,53	7,58

5. Conclusões e Perspectivas Futuras

Este estudo tem por objetivo avaliar a eficiência da abordagem lagrangeana surrogate (*lagsur*) para o problema integrado de dimensionamento de lotes e distribuição. O problema estudado envolve o planejamento da produção e transporte de vários itens em um horizonte de planejamento composto por T períodos. O objetivo é minimizar os custos de preparação, de produção, de estoque e de transporte dos itens. O transporte dos itens envolve um contrato com uma empresa logística que é firmado para todo o horizonte de planejamento, a esse contrato estão associados: um custo fixo; um custo reduzido para um número fixo de contêineres contratados; e a possibilidade de contratação de um número adicional de contêineres a um preço mais elevado. O número de contêineres contratados é estimado com base na previsão de demanda para o horizonte de planejamento.

Uma heurística baseada na relaxação lagrangeana/surrogate foi proposta para solução do problema. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados da heurística lagrangeana proposta em Norden e Velde (2005) para o problema estudado. As duas heurísticas apresentaram resultados semelhantes quanto ao desvio da solução ótima dos problemas, no entanto, a heurística baseada na relaxação lagrangeana surrogate apresentou uma convergência mais rápida para o limitante inferior das instâncias resolvidas. Concluímos, portanto, que a abordagem proposta é competitiva o que incentiva o estudo de sua aplicação a outros problemas de dimensionamento de lotes e de distribuição, como problemas com capacidade de produção limitada.

Agradecimentos

Agradecemos a FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências bibliográficas

BAUMOL, W.J. e VINOD, H. D., 1970. An inventory theoretic model of freight transport demand. *Management Science* 16, 413 -421.

BERTAZZI, L. e SPERANZA, M. G. (1999) Models and Algorithms for the Minimization of Inventory and Transportation Costs: A Survey, in *New Trends in Distribution Logistics* (Speranza, M.G. and Staehly, P., eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 480, pp. 137-157, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

BRAHIMI, N., DAUZERE-PERES, S., NAJID, N. M e NORDI A. (2006), Single Item Lot Sizing Problems, *European Journal of Operational Research*, 168, 1-16.

DIABY, M., BAHL H., KARWAN, M. H., ZIONT, S. (1992). Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation. *European Journal of Operational Research* 59, 444-458.

DREXL A. e KIMMS, A. (1997). Lot sizing and Scheduling – Survey and Extension. *European Journal of Operation Research* 99, 221-235.

ERENGUÇ, S. S., SIMPSON, N.C. e VAKHARIA, A. J. (1999). Integrated production/distribution planning in supply chains? An invited review. *European Journal of Operational Research* 115, 219-236.

FISHER, M. L. (1981). The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science, 27*, 1-18.

GEOFRION A. M.(1974). Lagrangian relaxation in integer programming. *Mathematical Programming* Study;2:82-114.

GLOVER, F. (1965). A multiphase dual algorithm for the zero-one integer programming problem. Operations Research, 13, 879-919.

GLOVER, F. (1968). Surrogate Constraints. Operations Research, 16(4), 741-749.

GLOVER, F. (1975). Surrogate Constraints duality in Mathematical Programming. Operations Research, 23, 434-451.

GREENBERG, H. J., PIERSKALLA, W. P. (1970) Surrogate Mathematical Programming. *Operations Research*, 18, 924-939.

GREENBERG, H. J., PIERSKALLA, W. P (1973). Quasi-conjugate Functions and Surrogate Duality, *Cahiers Centre Études de Rech. Oper.* 15, 437-448

HELD, M.; WOLFE, P. e CROWEDER, H. (1974). Validation of Subgradient Optimization. *Mathematical Programming*, 6, 62-68.

HELD, M e KARP, R. M. (1971), The Traveling salesman problem and minimum spanning tress: part II. *Mathematical Programming*, 1, 6-25.

KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F; WILSON, J. M. (2003), The Capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms, *OMEGA*, 31, 365-378.

KARWAN, M. L. e RARDIN, R. L. (1979). Some Relationships Between Lagrangean and Surrogate Duality in Integer Programming. Mathematical Programming, 17: 320-334.

LEE, C.Y. (1989). A solution to the multiple set-up problem with dynamic demand. IIE Transactions 21, 266-270.

LEE, W-S, HAN, J.H e CHO S.J. (2005). A Heuristic for a multi-product dynamic lot-sizing and shipping problem. *Int. J. Production Economics* 98, 204-214.

LORENA, L. A. N. e LOPES, F. B. (1994). A surrogate heuristic for set covering problems. *European Journal of Operational Research* 79, 138-150.

LORENA, L. A. N. e NARCISO, M. G. (1996) Relaxation heuristics for a generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research* 91, 600-610.

LORENA, L. A. N. e PEREIRA, M. A. (2002). A lagrangean/surrogate heuristic for the maximal covering problem using Hillsman's edition, aceito para publicação no *International Journal of Industrial Engineering*.

LOZANO, S., LARRANETA, J. e OLIVEIRA, L. (1991), Primal Dual Approach to the Single Level Capacitated Lot-Sizing Problem, *European Journal of Operational Research*, v. 51, p. 354-366.

NARCISO, M. G. (1998). A relaxação Lagrangena\Surrogate e algumas aplicações em otimização combinatória. Tese de Doutorado em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos.

NARCISO, M. G. e LORENA, L. A. N. (1999) Lagragean/Surrogate relaxation for generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research* 114, 165-177.

NORDEN, L. Van e VELDE, S. Van de, (2005). Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract. *European Journal of Operational Research* 165, 127-138.

OLIVEIRA, L. K. e MORÁBITO, R., (2006), Métodos Exatos Baseados em Relaxações Lagrangeana e *Surrogate* para o Problema de Carregamento de Paletes do Produtor, *Pesquisa Operacional* 26, 403-432.

RIZK, N. e MARTEL, A. (2001). Supply chain flow planning methods: a review of the lot-sizing literature. Working Paper DT-2001-AM-1, Université Laval, QC, Canada.

SENNE, E. L. F. e LORENA, L. A. N. (2000). Lagrangean/Surrogate Heuristics for p-Median Problems. In *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, M. Laguna and J. L. Gonzalez-Velarde (eds.) Kluwer Academic Publishers, 115-130.

TOLEDO, F.M.B. e ARMENTANO, V.A. (2006) A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research* 175, 1070–1083.

TRIGEIRO, W. W., THOMAS, L. J. e MCCLAIN, J. O. (1989), Capacitated Lot Sizing With Setup Times, *Management Science*, 35(3), 353-366.

VROBLEFSKI, M., RAMESH, R., ZIONTS, S. (2000). Efficient lot-sizing under a differential transportation cost structure for serially distributed ware-houses. *European Journal of Operational Research* 127, 574-593.

WAGNER, H. M. e WHITIN, T.M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science* 5, 89-96.

NOTAS DO ICMC

SÉRIE COMPUTAÇÃO

092/2007 LOPES, M.A.L.P.; ARENALES, M.N.; SANTOS, M.O. - Some extensions of dual cuts to one-dimensional cutting stock problems.

091/2007 ALEM JR., D.J.; MUNARI JR, P.A.; ARENALES, M.N.; FERREIRA, P.A.V. - On the cutting stock problem under stochastic demand.

090/2007 CHERRI, A.; ARENALES, M.N.; YANASSE, H. H. - The unidimensional cutting stock problem with usable leftover - a heuristic approach.

089/2007 TOLEDO, F.M.B.; ARMENTANO, V.A. - Branch-and-bound algorithms for capacitated lot-sizing in parallel machines

088/2007 TOLEDO, F.M.B.; SANTOS, M.O.; ARENALES, M.N.; SELEGHIM JR, P. - Logística de distribuição de água em redes urbanas - racionalização energética.

087/2005 GOIS, J.P; ESTÁCIO, K.C.; OISHI, C.M. BERTTONI,V.; BOTTA, V.A.; NAGAMINE, A.; KUROKAWA, F.A.; FEDERSON, F. - Aplicação de volumes finitos na simulação numérica de contaminação em lençóis freáticos.

086/2005 MARQUES, F.P.; ARENALES, M.N. - The constrained compartmentalized knapsack problem.

085/2005 POLDI, K.C.; ARENALES, M.N. - Dealing with small demand in integer cutting stock problems with limited different stock lengths.

084/2005 PRADO, T.A.S.; NUNES, M.G.V. - A statistical generative model for unsupervised learning of web argument structures.

083/2005 POLTRONIERE, S.C.; ARENALES, M.N.; TOLEDO, F.M.B.; POLDI, K.C. - Coupling cutting stock and dot sizing problems in the paper industry.