Exemplo de equação neutra no espaço L_2 que é sistema gradiente com atrator global

LUIZ FICHMANN
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
01498 - São Paulo SP - Brasil

1. Introdução

Em [1] e [2] estudamos, dado $r > 0$ e X espaço de Banach, a equação diferencial funcional neutra (EDFN):

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}E(x(t),\ x(t-r)) = f(x(t),\ x(t-r)) + \int_{-r}^{0} a(\theta)g(x(t+\theta))d\theta$$

onde assuminos:

(H1) $E, f : X \times X \to X,\ g : X \to X$ funções de classe C^1 no sentido de Fréchét, com derivadas limitadas.

(H2) Existem operadores lineares continuos injetivos L_o e L_r, de X em X, e uma constante real c, $0 \leq c < 1$ tal que

$$\| I - L_o \frac{dE}{dp_o}(p_o, p_r) \| \leq c \quad \text{e} \quad \| I - L_r \frac{dE}{dp_r}(p_o, p_r) \| \leq c$$

para todo $(p_o, p_r) \in X \times X$, onde I é a identidade.

(H3) $a \in L_2([-r, 0], \mathcal{L}(X))$.

Dizemos que $x \in L_2^{loc}(\mathbb{R}, X)$ é solução de (1) se existe $\xi \in X$ tal que a relação

$$(2) \qquad E(x(t), x(t-r)) = \xi + \int_o^t f(x(s), x(s-r))ds + \\ + \int_0^t \int_{-r}^0 a(\theta)g(x(s+\theta))d\theta ds$$

vale quase sempre (q.s.) para $-\infty < t < \infty$.

Seja $L_2 = L_2([-r, 0], X)$. Vimos que êsse problema é bem-pôsto no contexto $X \times L_2$, conforme teorema 2.1 de [1], ou seja, para cada $(\xi, \varphi) \in X \times L_2$, existe uma única solução $x \in L_2^{loc}(\mathbb{R}, X)$ da equação (2) tal que $x_o = \varphi$ e ainda a aplicação $(t, \xi, \varphi) \in \mathbb{R} \times X \times L_2 \to x_t \in L_2$ é contínua.

Isso define o C^0-grupo $\{S(t)\}_{t\in R}$, $S(t) : X \times L_2 \to X \times L_2$, fluxo da equação (1), dado por
$S(t)(\xi,\varphi) = (\xi + \int_o^t [f(x(s), x(s-r) + \int_{-r}^o a(\theta)g(x(s+\theta))d\theta]ds \ , \ x_t)$.
Tomando $X = I\!R^n$ ou $\mathbb{C}^n$, vamos aqui ver condições suficientes para que (1) admita atrator global em $X \times L_2$ (teorema 3). Em seguida veremos um exemplo numérico ($X = I\!R$) de equação (1) nessas condições.

2. Preliminares e resultado principal

Para a equação linear a diferenças

(3) $\qquad A_o y(t) + A_r y(t-r) = 0$

com $A_o, A_r, A_o^{-1}, A_r^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, temos bem definido o fluxo de (3), o C^o-grupo $\{T_o(t)\}_{t\in R}$, $T_o(t) : L_2 \to L_2$ linear contínua, $T_o(t)\varphi = y_t$ (ver [1] ou [2]). Para $X = I\!R^n$ ou $\mathbb{C}^n$, a equação característica de (3) é

$$det\ H(\lambda) = 0 \ \text{ onde } \ H(\lambda) = A_o + A_r e^{-\lambda r}$$

Proposição 1. Definindo $a_E = sup\{Re\lambda : detH(\lambda) = 0\}$ temos, se $w > a_E$, então $\exists K > 0 \mid \| T_o(t) \| \leq Ke^{wt}, \forall t \geq 0$.

Prova: segue imediatamente do teorema 3.1 (iii) de [1].

Corolário 1: Se $a_E < 0$ então $\varphi \equiv 0$ é assintóticamente estável para a equação (3). Dizemos neste caso ($a_E < 0$) que o operador E é estável, (aqui $E(p_o, p_r) = A_o p_o + A_r p_r$).

Teorema 1. Considerando a equação (2) com fluxo $\{S(t)\}_{t\in R}$, onde $E : X \times X \to X$ é linear ($E(p_o, p_r) = A_o p_o + A_r p_r$) e tal que $\bigcup_{0\leq s\leq t} S(s)B$ é limitado quando $B \subset X \times L_2$ é limitado, $\forall t \geq 0$ temos:

$$S(t) = T_o(t) \circ \pi_2 + \mathsf{U}(t), \qquad t \geq 0$$

onde π_2 é a projeção conônica $X \times L_2 \to L_2$ e $\mathsf{U}(t)$ é completamente contínuo, $\forall t \geq 0$.

Prova: segue os passos da demonstração do lema 3.2 de [1], apesar de $S(t)$ não ser linear. Temos $S(t) - T_o(t).\pi_2 = (Q(t), K(t,0)Q)$ com

$Q \in C([0,t],X) \subset L_2([0,t],X)$, $Q(t) = \pi_1 S(t)(\xi,\varphi)$ (π_1 é a projeção canônica $X \times L_2 \to X$) e $K(t,0) \in \mathcal{L}(L_2([0,t],X),L_2)$, operador definido em [1] § 3 para equações lineares não homogêneas. Usamos o Teorema de Arzelá-Ascoli para mostrar que a aplicação

$(\xi,\varphi) \in X \times L_2 \to Q \in C([0,t],X)$ é completamente contínua. Δ

Observações: 1) É fundamental aqui que $dim X < \infty (X = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n)$

2) Quando $S(t)$ é linear (como no lema 3.2 de [1]), a hipótese $\bigcup_{0 \leq s \leq t} S(s)B$ limitado para B limitado é consequência do Princípio da Limitação Uniforme.

Para um semi-grupo de classe C^m, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $m \geq 0$, num espaço de Banach Y, temos as seguintes definições:

Definição 1: Dados A, B em Y dizemos que A atrai B se $S(t)B \to A$ quando $t \to \infty$, ou seja, $\lim_{t \to \infty}$ dist (S(t)B,A)=0 onde dist (C,A)=
$= sup\{inf\{\| c - a \|, a \in A\}, c \in C\}$.

Definição 2: $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é ponto-dissipativo $\Longleftrightarrow$ $\exists$ B$\subset$Y limitado | B atrai $\{y\}$, $\forall y \in Y$ (ou seja, existe um conjunto limitado que atrai pontos).

Definição 3: $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintòticamente-liso $\Longleftrightarrow$ Para todo B$\subset$Y, B$\neq \phi$, fechado, limitado e positivamente invariante ($S(t)B \subset B$, $\forall t \geq 0$), temos que existe J$\subset$B, compacto, que atrai B.

Definição 4: A é atrator global de $\{S(t)\}_{t \geq 0} \Longleftrightarrow$
(i) A é invariante, ou seja, $S(t)A = A$, $\forall t \geq 0$.
(ii) A é compacto não vazio.
(iii) A é maximal com relação a (i) e (ii).
(iv) A atrai todos os conjuntos limitados de Y.

Temorema 2. (Teorema 3.4.6 de [3]). Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintòticamente-liso, ponto-dissipativo e tal que $\bigcup_{t \geq 0} S(t)B$ é limitado quando B$\subset$Y é limitado, então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tem um atrator global A que é conexo. Mais ainda, se $S(t)$ é injetor em A, $\forall t \geq 0$, então $\{S(t)_{|A}\}$ é um C^m - grupo (ou seja, podemos definir $S(t)$ em A para $t \leq 0$).

Para $y \in Y$, chamemos $\gamma^+(y) = \bigcup_{t\geq 0} S(t)y$ a órbita positiva de y.
Do mesmo modo definimos a órbita positiva de um conjunto $B \subset Y$:
$\gamma^+(B) = \bigcup_{t\geq 0} S(t)B$.

Seja $\mathcal{E} = \{y \in Y \mid \gamma^+(y) = \{y\}\}$. $\mathcal{E}$ é o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{S(t)\}$.

Definição 5. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um sistema gradiente $\iff$

(i) Se $\gamma^+(y)$ é limitada então $\gamma^+(y)$ é pré-compacta.

(ii) Existe uma função de Liapunoff para $\{S(t)\}$, isto é, uma função contínua $V : Y \to \mathbb{R}$ tal que:

(ii$_1$) $V(y)$ é limitada inferiormente.

(ii$_2$) $B \subset Y$ limitado $\Longrightarrow$ V(B) limitado.

(ii$_3$) $\gamma^+(y)$ não limitada. $\Longrightarrow$ $V(\gamma^+(y))$ não limitado.

(ii$_4$) $V(S(t)y)$ é decrescente em t para cada $y \in Y$.

(ii$_5$) Se y é tal que $S(t)y$ está definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(S(t)y) = V(y)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então $y \in \mathcal{E}$.

A seguinte proposição é um corolário imediato do lema 3.8.2 de [3]:

Proposição 2. Para um sistema gradiente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ são equivalentes:

(i) $S(t)$ é ponto-dissipativo.

(ii) $\mathcal{E}$ é limitado.

Com a proposição 2 e o teorema 2, demonstra-se a

Proposição 3. (Teorema 3.8.5 de [3]). Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é sistema gradiente, assintòticamente-liso, com $\mathcal{E}$ limitado, então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tem um atrator global $A = W^u(\mathcal{E})$, onde $W^u(\mathcal{E}) = \{y \in Y \mid S(t)y$ é definido para $t \leq 0$ e $S(t)y \to \mathcal{E}$ quando $t \to -\infty\}$.

Proposição 4. Se $S(t) = T(t) + U(t) : Y \to Y$, $t \geq 0$, com $U(t)$ completamente contínuo e $\| T(t)y \| \leq k(t,l)$ para $\| y \| \leq l$, $\forall t \geq 0$, com $k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ contínua e $\lim_{t\to\infty} k(t,l) = 0$ $\forall l > 0$; então:

1º) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintòticamente-liso.

2º) $\gamma^+(y)$ limitada $\Longrightarrow$ $\gamma^+(y)$ pré-compacta.

Prova: o 1º) é o lema 3.2.3 de [3] e o 2º) é a proposição 3.1 de [5].

Do corolário 1, teorema 1 e proposição 4, concluimos o

Corolário 2. Para a equação (2) com fluxo $\{S(t)\}_{t\in \mathbb{R}}$, como no teorema 1, se E é estável então:
1º) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintòticamente-liso e
2º) $\gamma^+(\xi,\varphi)$ limitada $\Longrightarrow \gamma^+(\xi,\varphi)$ pré-compacta, $\forall(\xi,\varphi)\in X\times L_2$.

Nessas condições, se tivermos uma função de Liapunoff para o fluxo da equação (2), teremos que ele será um sistema-gradiente.

Do corolário 2 e da proposição 3, segue imediatamente o

Teorema 3. Para a equação (2) com fluxo $\{S(t)\}_{t\in \mathbb{R}}$, se E é linear estável, se $\mathcal{E}$ é limitado e se temos uma função de Liapunoff para $\{S(t)\}$, então $\{S(t)\}$ tem atrator global A que é conexo e ainda $A = W^u(\mathcal{E})$.

Observação: Convém lembrar que para a equação (2) temos:

$\mathcal{E} = \{(E(c,c),\varphi_c)\in X\times L_2 \mid c\in X, f(c,c) + (\int_{-r}^{0} a(\theta)d\theta)g(c) =$
$= 0, \varphi_c \equiv c\}$.

3. Exemplo Numérico

Para $X = \mathbb{R}$, considere a equação

(4) $\qquad \frac{d}{dt}(x(t)-qx(t-r)) = -\alpha x(t) - \alpha q x(t-r) - h(x(t)-qx(t-r))$

com $q\in \mathbb{R}^*$, $|q|<1$, $\alpha>0$ e $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua com $h(0)=0$ e $inf\frac{h(x)}{x} > -\alpha\frac{1-|q|}{1+|q|}$.

Admitindo aqui que o problema é bem posto no contexto $L_2 =$ $= L_2([-r,0])$, (por exemplo, se h é de classe C^1 com derivada limitada teremos satisfeitas (H1), (H2) e (H3), com $E(p_o,p_r) = p_o - qp_r$, $f(p_o,p_r) = -\alpha p_o - \alpha q p_r - h(p_o - qp_r)$, $g\equiv 0$ e $a\equiv 0, \forall\, p_o,\ p_r\in \mathbb{R}$); vamos mostrar que as hipóteses do teorema 3 estão satisfeitas:

1. E é estável pois $det[1-qe^{-\lambda r}] = 1-qe^{-\lambda r} = 0 \Longrightarrow Re\lambda < 0$.
2. $\mathcal{E} = \{(0,0)\}\subset \mathbb{R}\times L_2$, pois se $x\equiv c$ é solução constante de (4) então $0 = -\alpha c - \alpha q c - h(c-qc)$; se $c\neq 0$ temos $\frac{h(c(1-q))}{c(1-q)} = -\alpha.\frac{1+q}{1-q}$ e assim $-\alpha.\frac{1-|q|}{1+|q|} < inf\frac{h(x)}{x} \leq -\alpha.\frac{1+q}{1-q}$, absurdo! Logo $c=0$.

3. Vamos mostrar que $V : \mathbb{R} \times L_2 \to \mathbb{R}$ dado por $V(\xi,\varphi) = \frac{1}{2}\xi^2 + \alpha \mid q \mid \ . \ \| \varphi \|_2^2$ é função de Liapunoff para $\{S(t)\}$.

3.1. V é limitada inferiormente pois $V(\xi,\varphi) \geq 0 \ \ \forall(\xi,\varphi) \in \mathbb{R} \times L_2$.

3.2. Se $B \subset \mathbb{R} \times L_2$ é limitado, $\exists M > 0 \mid (\xi,\varphi) \in B \Longrightarrow \mid \xi \mid < M$ e $\| \varphi \|_2 < M$ e então $0 \leq V(\xi,\varphi) \leq (\frac{1}{2} + \alpha \mid q \mid)M^2$ para $(\xi,\varphi) \in B$. ou seja, V(B) é limitado.

3.3. Se $\gamma^+(\xi,\varphi)$ não é limitada, temos $\forall M > 0, \ \exists(\zeta,\psi) \in \gamma^+(\xi,\varphi) \mid$ $\mid \zeta \mid > M$ ou $\| \psi \|_2 > M$ então $V(\zeta,\psi) > max\{\frac{1}{2}, \alpha \mid q \mid\}.M$, ou seja, $V(\gamma^+(\xi,\varphi))$ não é limitado.

3.4. Seja $S(t)(\xi,\varphi) = (\xi + \int_o^t f(x(s),x(s-r))ds, \ x_t)$. Temos:

$V(S(t)(\xi,\varphi)) = \frac{1}{2}[\xi + \int_o^t f(x(s),x(s-r))ds]^2 + \alpha \mid q \mid \int_{t-r}^t x^2(\tau)d\tau$.

$V(S(t)(\xi,\varphi))$ é absolutamente contínua em t e

$\frac{d}{dt}V(S(t)(\xi,\varphi)) =^{qs} (\xi + \int_0^t f(x(s),x(s-r))ds).f(x(t),x(t-r)) +$
$+\alpha \mid q \mid (x^2(t) - x^2(t-r)) =$
$=^{qs} \ (x(t) - qx(t-r)).(-\alpha x(t) - \alpha q x(t-r) \ - h(x(t) - qx(t-r)) +$
$+\alpha \mid q \mid (x^2(t) - x^2(t-r))$.

Chamando $w(t) = x(t) - qx(t-r)$, somando e subtraindo $\gamma w^2(t)$ com $-\alpha.\frac{1-|q|}{1+|q|} < \gamma < inf \frac{h(x)}{x}$ e $\gamma < 0$, temos:

$\frac{d}{dt}V(S(t)(\xi,\varphi)) =^{qs} -\gamma w^2(t) - w^2(t)[\frac{h(w(t))}{w(t)} - \gamma] +$
$+w(t)[-\alpha x(t) - \alpha q x(t-r)] + \alpha \mid q \mid (x^2(t) - x^2(t-r)) \leq$
$\leq -\gamma w^2(t) + w(t)[-\alpha x(t) - \alpha q x(t-r)] + \alpha \mid q \mid (x^2(t) - x^2(t-r)) =$
$= -(\gamma + \alpha - \alpha \mid q \mid)x^2(t) + 2\gamma q x(t)x(t-r) - (\gamma q^2 - \alpha q^2 + \alpha \mid q \mid)x^2(t-r) <$
$< \gamma \mid q \mid x^2(t) + 2\gamma q x(t)x(t-r) + \gamma \mid q \mid x^2(t-r) = \gamma \mid q \mid (x(t) \pm x(t-r))^2$
se $x(t) \neq 0$ ou $x(t-r) \neq 0$ pois $\gamma + \gamma \mid q \mid + \alpha - \alpha \mid q \mid > 0$.

Assim $\frac{d}{dt}V(S(t)(\xi,\varphi) \leq 0 \ q.s.$ e
$\frac{d}{dt}V(S(t)(\xi,\varphi)) = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$ e $x(t-r) = 0$.
Logo $V(S(t)(\xi,\varphi))$ é decrescente em t.

3.5. Se (ξ,φ) é tal que $V(S(t)(\xi,\varphi)) = V(\xi,\varphi), \forall t \in \mathbb{R}$. então

$\frac{d}{dt}V(S(t)(\xi,\varphi)) \equiv 0$ e do que vimos acima temos $x(t) =^{qs} 0$. logo $\varphi \equiv 0$ e então $(\xi,\varphi) = (0,0) \in \mathcal{E}$.

Proposição 5. A equação (4) tem como atrator global $A = \{(0,0)\}$.

Prova: concluimos do teorema 3, que $A = W^u(0,0)$. Resta mostrar que $W^u(0,0) = \{(0,0)\}$. Se $(\xi,\varphi) \in W^u(0,0)$ temos $S(t)(\xi,\varphi) \to (0,0)$ quando $t \to -\infty$, assim $\forall \epsilon > 0, \exists t_\epsilon \mid t \leq t_\epsilon \Longrightarrow V(S(t)(\xi,\varphi)) < \epsilon$, pois $V(S(t)(\xi,\varphi)) \to V(0,0) = 0$. Logo $V(S(\tau)(\xi,\varphi)) < \epsilon$, $\forall \tau \in I\!R$, pois para $\tau > t_\epsilon$ temos que $V(S(\tau)(\xi,\varphi)) = V(S(\tau - t_\epsilon).S(t_\epsilon)(\xi,\varphi)) \leq V(S(t_\epsilon)(\xi,\varphi)) < \epsilon$. Como ϵ é arbitrário temos que $V(S(t)(\xi,\varphi)) \equiv 0$ mas isso implica que $(\xi,\varphi) \in \mathcal{E} = \{(0,0)\}$.

Referências

[1] - Oliveira, J.C.F. and Fichmann, L., *Neutral Functional Differential Equations in L_p-space*. 37º Seminário Brasileiro de Análise. 1993, SBM, 403-410.

[2] - Oliveira, J.C.F. and Fichmann, L., *Discontinuous Solutions of Neutral Functional Differential Equations*, 1993, to appear in Publ. Mat. UAB (Universitat Autônoma de Barcelona), Bellaterra.

[3] - Hale, J.K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, nº 25, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[4] - Hale, J.K., *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] - Webb, G.F., *Compactness of Bounded Trajectories of Dynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 84 (1979 a), 19-33.