

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Relatório Técnico

RT-MAP-0903

**A FUNÇÃO PERÍODO PARA UMA
CLASSE DE SISTEMAS
HAMILTONIANOS ANALÍTICOS**

Garcia S.R. L. & Silva, E. F. da

MAIO, 2009



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

SÃO PAULO — BRASIL

A FUNÇÃO PERÍODO PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS ANALÍTICOS *

GARCIA, S. R. L. [†] & SILVA, E. F. DA [‡]

Resumo

Este trabalho é uma generalização do artigo [1]. Aqui caracterizamos todos os sistemas hamiltonianos analíticos que apresentam centro na origem e têm uma dada função período T e uma dada energia cinética F . Tratamos inicialmente o caso clássico em que F tem mínimo estrito não degenerado em zero, e depois o caso não clássico em que esse mínimo estrito é degenerado.

1 Introdução

Em todo o trabalho, consideraremos sistemas hamiltonianos

$$\begin{cases} \dot{x} = -G'(y) = -g(y) \\ \dot{y} = F'(x) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

em que a energia cinética $F(x) = ax^{2M} + O(x^{2M+1})$, $a > 0$, é analítica numa vizinhança Ω da origem e a energia potencial $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, $b > 0$, é analítica numa vizinhança $\tilde{\Omega}$ da origem.

Tais sistemas hamiltonianos são clássicos no caso em que $M = 1$, e a eles daremos nossa atenção nas seções 3 e 4. Na seção 5 trataremos o caso não clássico, em que $M > 1$.

Tais sistemas têm um centro na origem, e nosso interesse é estudar a função período desses centros e caracterizar as energias potenciais que compartilham uma mesma função período.

* *Mathematics Subject Classifications*: 35L55, 35L15

Key words: Função período, hamiltoniana analítica, sistema hamiltoniano

[†]IME-USP, São Paulo, SP, Brasil, sonia@ime.usp.br

[‡]UNEMAT, Barra do Bugre, MT, Brasil, emivan@unemat.br

Para $h > 0$ suficientemente pequeno, a função período $T(h)$ é definida como o período da órbita periódica que está próxima da origem cuja energia total é h .

O caso em que $M = N = 1$ foi estudado por Anna Cima, Armengol Gasull e Francesc Mañosas [1]. Nesse caso, para cada energia cinética F e cada função T analítica em zero com $T(0) > 0$, caracterizaram as energias potenciais G analíticas em zero que admitem tal função T como função período. Também nesse caso, para cada função T analítica em zero com $T(0) > 0$, caracterizaram as funções η analíticas com mínimo não degenerado na origem tais que o centro de (1) com $F(x) = \eta(x)$ e $G(y) = \eta(y)$ têm tal função período.

Na seção 4 estenderemos os resultados de [1] para o sistema (1) no caso em que a energia potencial é degenerada na origem ($N > 1$), e na seção 59 estenderemos os resultados de [1] para o sistema (1) no caso em que a hamiltoniana é não clássica, isto é, a energia cinética é degenerada na origem ($M > 1$).

2 Preliminares

Sejam $F(x) = ax^{2M} + O(x^{2M+1})$, $a > 0$, e $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, $b > 0$, analíticas respectivamente em vizinhanças $\Omega = \Omega_F$ e $\tilde{\Omega} = \Omega_G$ da origem.

Então existem $\bar{x}_- < 0 < \bar{x}_+$ e $\bar{y}_- < 0 < \bar{y}_+$ tais que

- (i) $[\bar{x}_-, \bar{x}_+] \subset \Omega$,
- (ii) $[\bar{y}_-, \bar{y}_+] \subset \tilde{\Omega}$,
- (iii) $F' < 0$ em $[\bar{x}_-, 0)$ e $F' > 0$ em $(0, \bar{x}_+]$,
- (iv) $G' < 0$ em $[\bar{y}_-, 0)$ e $G' > 0$ em $(0, \bar{y}_+]$,
- (v) existe $\bar{h} > 0$ tal que $\bar{h} = F(\bar{x}_-) = F(\bar{x}_+) = G(\bar{y}_-) = G(\bar{y}_+)$.

Seja $H(x, y) = F(x) + G(y)$, $(x, y) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$, a hamiltoniana (ou função energia) do sistema (1).

Sejam $D_{\bar{h}} \subset \Omega \times \tilde{\Omega}$ a região delimitada pela curva de nível $H(x, y) = \bar{h}$, e $\gamma_h = (x_h, y_h)$ a órbita periódica contida em $D_{\bar{h}}$ correspondendo à curva de nível $H(x, y) = h$, $h \in (0, \bar{h})$. Esta órbita cruza o eixo x (respectivamente o eixo y) nos pontos determinados por

$$H(x_h, 0) = F(x_h) + G(0) = F(x_h) = h$$

(resp. $H(0, y_h) = F(0) + G(y_h) = G(y_h) = h$).

Já que F tem um único ponto crítico em $[x_-, x_+]$, que é a origem, e $F(\bar{x}_+) = F(\bar{x}_-) = \bar{h}$, então para $h \in (0, \bar{h})$ a equação $F(x_h) = h$ tem duas soluções em (x_-, x_+) , a saber, uma solução $x_{h-} \in (\bar{x}_-, 0)$ e outra solução $x_{h+} \in (0, \bar{x}_+)$.

Note que

$$F_+ = F|_{(0, \bar{x}_+)} : (0, \bar{x}_+) \rightarrow (0, \bar{h}) \text{ e } F_- = F|_{(\bar{x}_-, 0)} : (\bar{x}_-, 0) \rightarrow (0, \bar{h}) \quad (2)$$

são inversíveis e que $x_{h-} = F_-^{-1}(h)$ e $x_{h+} = F_+^{-1}(h)$.

Analogamente,

$$G_+ = G|_{(0, \bar{y}_+)} : (0, \bar{y}_+) \rightarrow (0, \bar{h}) \text{ e } G_- = G|_{(\bar{y}_-, 0)} : (\bar{y}_-, 0) \rightarrow (0, \bar{h}) \quad (3)$$

são inversíveis e a equação $G(y_h) = h$ tem exatamente duas soluções em (y_-, y_+) quando $h \in (0, \bar{h})$, que são $y_{h-} = G_-^{-1}(h)$ e $y_{h+} = G_+^{-1}(h)$.

Quando $M = N = 1$, a função período do sistema (1) resulta analítica em $[0, \bar{h}]$, mas no caso em que $N > 1$, mesmo com $M = 1$, o período das soluções tendem a infinito quando a energia total h tende a zero. Então, antes de mais nada, precisamos determinar a classe das funções que são funções período para o sistema (1) nesse caso.

Os próximos resultados encontram-se em [1] e não dependem dos valores de $N, M \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 2.1 *Seja T a função período associada ao sistema (1). Então*

$$T(h) = (l'_F * l'_G)(h) = \frac{d}{dh}(l'_F * l_G)(h) = \frac{d^2}{dh^2}(l_F * l_G)(h), \quad (4)$$

onde l_F e l_G são definidas por

$$\begin{cases} l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h), \\ l_G(h) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h). \end{cases} \quad (5)$$

Proposição 2.2 *Sejam T a função período associada ao sistema (1), e l_F e l_G definidas em (5).*

Então

$$hT'(h) = (\psi_F * l'_G)(h) + (l'_F * \psi_G)(h), \quad (6)$$

onde ψ_F e ψ_G são definidas por

$$\begin{cases} \psi_F(h) = \frac{l'_F(h) + 2hl''_F(h)}{2}, \\ \psi_G(h) = \frac{l'_G(h) + 2hl''_G(h)}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Como consequência da Proposição 2.1, prova-se em [1] o seguinte resultado no caso em que $M = 1$:

Lema 2.1 *Seja $F(x) = a_2x^2 + O(x^3)$ com $a_2 > 0$, analítica em Ω . Para $h \in (0, \bar{h})$ considere a função l_F dada por (5). Então $l_F(h) = \sqrt{h}\mathcal{F}(h)$, onde $\mathcal{F}$ é analítica em zero e $\mathcal{F}(0) > 0$.*

De modo análogo, conclui-se em [1] que se $N = 1$ então $l_G(h) = \sqrt{h}\mathcal{G}(h)$, onde $\mathcal{G}$ é analítica em zero e $\mathcal{G}(0) > 0$.

3 Um exemplo ilustrativo

Nesta seção procuraremos uma conveniente classe de funções onde estarão as funções período para sistemas hamiltonianos analíticos com energia cinética $F(x) = ax^2 + O(x^3)$ e energia potencial $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, $a > 0$ e $b > 0$, nos casos em que $N = 2$ e $N = 3$.

Observação 3.1 *Se $\tilde{\Omega}$ é uma vizinhança da origem e $G(y) = by^4 + O(y^5)$, é analítica em $\tilde{\Omega}$, com $b > 0$, então K definida por $K(y) = \frac{G(y)}{y^4}$, se $y \neq 0$, e $K(0) = b$, é também analítica em $\tilde{\Omega}$. Além disso, para $y \in [\bar{y}_-, \bar{y}_+]$ tem-se $K(y) > 0$, e portanto $\psi(y) = \sqrt[4]{K(y)}$ é analítica em $(\bar{y}_-, \bar{y}_+)$.*

Fato 3.1 *Seja $G(y) = by^4 + O(y^5)$, com $b > 0$, analítica em $\tilde{\Omega}$. Então, para $h \in (0, \bar{h})$, tem-se $l_G(h) = \sqrt[4]{h}(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{G}_2(h))$, onde $\mathcal{G}_1(h)$ e $\mathcal{G}_2(h)$ são analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) = \frac{2}{\sqrt[4]{b}} > 0$.*

Dem. Sejam K e ψ as funções definidas na observação 3.1. A função $\phi : (\bar{y}_-, \bar{y}_+) \rightarrow (-\sqrt[4]{h}, \sqrt[4]{h})$, definida por

$$\phi(y) = \text{sgn}(y) \sqrt[4]{G(y)} = y\psi(y), \quad y \in (\bar{y}_-, \bar{y}_+) \quad (8)$$

é analítica e $\phi'(0) = \sqrt[4]{b} > 0$.

Também $\phi'(y) = \frac{\text{sgn}(y)G'(y)}{4\sqrt[4]{(G(y))^3}} > 0$ em $(\bar{y}_-, 0) \cup (0, \bar{y}_+)$, logo $\phi'(y) > 0$

em $(\bar{y}_-, \bar{y}_+)$. Assim, ϕ é inversível e sua inversa é analítica em $(-\sqrt[4]{h}, \sqrt[4]{h})$.

Se $y_+ \in (0, \bar{y}_+)$ e $h \in (0, \bar{h})$ são tais que $G_+(y_+) = G(y_+) = h$ então $\phi(y_+) = \sqrt[4]{h}$ e portanto $G_+^{-1}(h) = y_+ = \phi^{-1}(\sqrt[4]{h})$.

Analogamente $G_-^{-1}(h) = y_- = \phi^{-1}(-\sqrt[4]{h})$.

Logo $l_G(h) = \phi^{-1}(\sqrt[4]{h}) - \phi^{-1}(-\sqrt[4]{h})$.

Além disso a função $I(h) = \phi^{-1}(h) - \phi^{-1}(-h)$ é ímpar e analítica em $(-\sqrt[4]{h}, \sqrt[4]{h})$. Para s suficientemente pequeno, temos

$I(s) = \phi^{-1}(s) - \phi^{-1}(-s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} s^{2n+1}$,
onde $b_1 = I'(0) = \frac{2}{\sqrt[4]{b}}$. Portanto, para $h > 0$ suficiente pequeno

$l_G(h) = \sqrt[4]{h} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sqrt{h^n} = \sqrt[4]{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{4n+1} h^n + \sqrt{h} \sum_{n=0}^{\infty} b_{4n+3} h^n \right)$,
como queríamos. ■

Fato 3.2 *Sejam $F(x) = ax^2 + O(x^3)$ analítica em Ω e $G(y) = by^4 + O(y^5)$ analítica em $\tilde{\Omega}$ com $a > 0$ e $b > 0$. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) $l'_F(h) = \frac{A(h)}{\sqrt[4]{h}}$, com A analítica em zero e $A(0) > 0$.

(b) $l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[4]{h}}$, com B_1 e B_2 analíticas em zero e
 $B_1(h) = \frac{G_1(h) + 4hG'_1(h)}{4}$, $B_2(h) = \frac{3G_2(h) + 4hG'_2(h)}{4}$, $B_1(0) = \frac{2}{4\sqrt[4]{b}} > 0$.

(c) *Existem T_1 e T_2 analíticas em zero com $T_1(0) > 0$ tais que*
 $T(h) = \frac{1}{\sqrt[4]{h}}(T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h))$.

Dem. (a) e (b) Decorrem imediatamente do Lema 2.1 e do Fato 3.1. (c) Pela Proposição 2.1 temos:

$$T(h) = (l'_F * l'_G)(h) = \int_0^h \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{(z)^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) \frac{A(h-z)}{\sqrt{h-z}} dz. \quad (9)$$

Sejam

$$B_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 h^n, \quad B_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 h^n \quad \text{e} \quad A(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \quad (10)$$

as expansões em série de Taylor de B_1 , B_2 e A em uma vizinhança de zero.

Façamos em (9) a mudança de variável $z = h \cos^2 \theta$. Então

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{2}{\sqrt[4]{h}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} B_1(h \cos^2 \theta) \frac{A(h \sin^2 \theta)}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{h} \sqrt{\cos \theta} B_2(h \cos^2 \theta) A(h \sin^2 \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt[4]{h}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j^1 (h \cos^2 \theta)^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i (h \sin^2 \theta)^i}{\sqrt{\cos \theta}} \right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 (h \cos^2 \theta)^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (h \sin^2 \theta)^i \right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Como as séries (10) convergem uniformemente e absolutamente numa vizinhança de zero, segue que, para $h > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} b_j^1 a_i \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) \right) h^n \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} b_j^2 a_i \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \right) \right) h^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} b_j^1 a_i I_{i,j}^1 \right) h^n + \sqrt{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} b_j^2 a_i I_{i,j}^2 \right) h^n \right], \end{aligned} \quad (12)$$

onde

$$I_{i,j}^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta \sin^{2i} \theta d\theta \text{ e } I_{i,j}^2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta \sin^{2i} \theta d\theta. \quad (13)$$

Portanto, definindo

$$t_n^1 = \sum_{i+j=n} b_j^1 a_i I_{i,j}^1 \text{ e } t_n^2 = \sum_{i+j=n} b_j^2 a_i I_{i,j}^2, n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

temos que $T_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n$ e $T_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n$ convergem numa vizinhança de zero, e assim,

$$T(h) = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} (T_1(h) + \sqrt{h} T_2(h)) \text{ e } T_1(0) = b_0^1 a_0 I_{0,0}^1 = B_1(0) A(0) I_{0,0}^1 > 0. \quad \blacksquare$$

Observação 3.2 *Dos resultados anteriores segue que se F é analítica da forma $F(x) = ax^2 + O(x^3)$, $a > 0$, então*

- (i) $G(y) = by^2 + O(y^3)$, $b > 0 \implies l'_G(h) = \frac{B(h)}{\sqrt[3]{h}}$, com B analítica em zero e $B(0) > 0$, e T é analítica em zero com $T(0) > 0$.
- (ii) $G(y) = by^4 + O(y^5)$, $b > 0 \implies l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[3]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[3]{h}}$, com B_1 e B_2 analíticas em zero, $B_1(0) > 0$, e $T(h) = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} (T_1(h) + \sqrt{h} T_2(h))$, com T_1 e T_2 analíticas em zero e $T_1(0) > 0$.

De modo análogo, se $N = 3$,

- (iii) $G(y) = by^6 + O(y^7)$, $b > 0 \implies l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[3]{h^5}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[3]{h^3}} + \frac{B_3(h)}{\sqrt[3]{h}}$ e $T(h) = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} (T_1(h) + \sqrt[3]{h} T_2(h) + \sqrt[3]{h^2} T_3(h))$, com B_1, B_2, B_3, T_1, T_2 e T_3 analíticas em zero, $B_1(0) > 0$ e $T_1(0) > 0$.

4 Energias potenciais degeneradas

Nesta seção está nosso resultado principal, o Teorema 4.1. Nela estendemos os resultados de [1] para sistemas hamiltonianos com energia cinética $F(x) = ax^2 + O(x^3)$ e energia potencial $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, ambas analíticas em zero, com $a > 0$ e $b > 0$. Exceto por menção explícita em contrário, manteremos as notações das seções anteriores.

4.1 Função período para energias potenciais degeneradas

Observação 4.1 Se $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $b > 0$, é analítica em $\tilde{\Omega}$, então K definida por $K(y) = \frac{G(y)}{y^{2N}}$, se $y \neq 0$, e $K(0) = b$, é também analítica em $\tilde{\Omega}$. Além disso, para $y \in [\bar{y}_-, \bar{y}_+]$ temos $K(y) > 0$, e portanto $\psi(y) = {}^{2N}\sqrt{K(y)}$ é analítica em $(\bar{y}_-, \bar{y}_+)$.

O próximo resultado estende o Lema 2.1 e o Fato 3.1.

Lema 4.1 Seja $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ analítica em $\tilde{\Omega}$, com $b > 0$. Então

$$l_G(h) = {}^{2N}\sqrt{h} \left(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[2N]{h} \mathcal{G}_2(h) + \cdots + \sqrt[2N]{h^{N-1}} \mathcal{G}_N(h) \right), \quad h \in (0, \bar{h}),$$

onde $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ são funções analíticas e $\mathcal{G}_1(0) = \frac{2}{\sqrt[2N]{b}} > 0$.

Dem. A prova é análoga à do fato 3.1.

Sejam K e ψ as funções definidas na observação 4.1.

A função $\phi : (\bar{y}_-, \bar{y}_+) \rightarrow (-\sqrt[2N]{h}, \sqrt[2N]{h})$, definida por

$$\phi(y) = \text{sgn}(y) {}^{2N}\sqrt{G(y)} = y\psi(y), \quad y \in (\bar{y}_-, \bar{y}_+). \quad (15)$$

é analítica em zero, $\phi'(0) = {}^{2N}\sqrt{b} > 0$. Além disso, $\frac{\text{sgn}(y)G'(y)}{2N {}^{2N}\sqrt{(G(y))^{2N-1}}} > 0$ em $(\bar{y}_-, 0) \cup (0, \bar{y}_+)$, logo $\phi'(y) > 0$ em $(\bar{y}_-, \bar{y}_+)$. Assim, ϕ é inversível e sua inversa é analítica em $(-\sqrt[2N]{h}, \sqrt[2N]{h})$.

Se $y_+ \in (0, \bar{y}_+)$ e $h \in (0, \bar{h})$ são tais que $G_+(y_+) = G(y_+) = h$, então $\phi(y_+) = \sqrt[2N]{h}$, e portanto $G_+^{-1}(h) = y_+ = \phi^{-1}(\sqrt[2N]{h})$. Analogamente $G_-^{-1}(h) = \phi^{-1}(-\sqrt[2N]{h})$. Assim

$$l_G(h) = \phi^{-1}(\sqrt[2N]{h}) - \phi^{-1}(-\sqrt[2N]{h}).$$

A função $I(h) = \phi^{-1}(h) - \phi^{-1}(-h)$ é ímpar, analítica em $(-\sqrt[2N]{h}, \sqrt[2N]{h})$, então $I(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} h^{2n+1}$, donde, para $h > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}
l_G(h) &= {}^{2N}\sqrt{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} {}^N\sqrt{h^n} \\
&= {}^{2N}\sqrt{h} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{2Nn+1} h^n + \cdots + {}^N\sqrt{h^{N-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2Nn+(2N-1)} h^n \right] \\
&= {}^{2N}\sqrt{h} \left[\mathcal{G}_1(h) + {}^N\sqrt{h} \mathcal{G}_2(h) + \cdots + {}^N\sqrt{h^{N-1}} \mathcal{G}_N(h) \right],
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ são analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) = a_1 = I'(0) = \frac{2}{{}^{2N}\sqrt{b}} > 0$. ■

Lema 4.2 *Seja $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ analítica em $\tilde{\Omega}$, com $b > 0$, e seja $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l_G(G(y))$, $y \in (\bar{y}_-, \bar{y}_+)$.*

Então σ é uma involução estrita analítica tal que $G(y) = G(\sigma(y))$.

Dem. Usando $\phi(y) = \text{sgn}(y) {}^{2N}\sqrt{G(y)}$, dada em (15) e o Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= y - \text{sgn}(y) {}^{2N}\sqrt{G(y)} \left[\sum_{k=0}^{N-1} {}^N\sqrt{(G(y))^k} \mathcal{G}_{k+1}(G(y)) \right] \\
&= y - \phi(y) \sum_{k=0}^{N-1} {}^N\sqrt{(G(y))^k} \mathcal{G}_{k+1}(G(y)) \tag{16}
\end{aligned}$$

Sejam $\gamma_k(y) = {}^N\sqrt{G(y)^k}$, e $\beta_i(y) = (\mathcal{G}_i \circ G)(y)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Então γ_k é analítica em zero, pois $b > 0$ e

$\gamma_k(y) = {}^N\sqrt{by^{2Nk} + O(y^{2Nk+1})} = {}^N\sqrt{y^{2Nk}(b + O(y))} = y^{2k} {}^N\sqrt{b + O(y)}$,
e $\beta_i(y) = (\mathcal{G}_i \circ G)(y)$ é analítica em zero, pois é composição de funções analíticas.

Decorre que σ é analítica em zero.

Por outro lado,

$$\sigma(y) = \begin{cases} y - l_G(G(y)) < 0, & \text{se } 0 < y < \bar{y}_+, \\ 0 & \text{se } y = 0, \\ y + l_G(G(y)) > 0, & \text{se } \bar{y}_- < y < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Note que $\text{sgn}(\sigma(y)) = -\text{sgn}(y)$ e que

$$\sigma(y) = \begin{cases} y_{h-} = G_-^{-1}(h) < 0, & \text{quando } y = y_{h+} = G_+^{-1}(h) > 0, \\ y_{h+} = G_+^{-1}(h) > 0, & \text{quando } y = y_{h-} = G_-^{-1}(h) < 0, \end{cases}$$

portanto

$$G(\sigma(y)) = G(y), \forall y \in (\bar{y}_-, \bar{y}_+). \quad (18)$$

De (18) vem que $l_G(G(y)) = l_G(G(\sigma(y)))$, e como $\text{sgn}(\sigma(y)) = -\text{sgn}(y)$,

$$\sigma(\sigma(y)) = \sigma(y) - \text{sgn}(\sigma(y))l_G(G(\sigma(y))) = y.$$

Além disso, de (16) temos

$$\begin{aligned} \sigma'(y) &= 1 - \phi'(y) \left[\mathcal{G}_1(G(y)) + \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(y) \mathcal{G}_{k+1}(G(y)) \right] \\ &+ \phi(y) \left[\mathcal{G}_1(G(y)) + \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k(y) \mathcal{G}_{k+1}(G(y)) \right]', \end{aligned}$$

e portanto, como $\gamma_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, e $\phi(0) = 0$, obtemos

$$\sigma'(0) = 1 - \phi'(0) \mathcal{G}_1(0) = 1 - \sqrt[2N]{b} \frac{2}{\sqrt[2N]{b}} = -1.$$

Portanto σ é uma involução estrita. ■

Observação 4.2 Para l_G dada no Lema 4.1 temos, para $h > 0$,

$$l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[2N]{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[2N]{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{\sqrt[2N]{h}},$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_N$ são funções analíticas em zero, com

$$B_k(h) = \frac{(2k-1)\mathcal{G}_k(h) + 2Nh\mathcal{G}'_k(h)}{2N} \quad e \quad B_1(0) = \frac{\mathcal{G}_1(0)}{2N} = \frac{2}{2N\sqrt[2N]{b}} > 0.$$

Na prova do Lema 4.4 usaremos sem demonstrar o seguinte resultado:

Lema 4.3 Seja $\Gamma(y) = [\gamma(y)]^{2N}$, onde γ é analítica em zero com $\gamma(0) = 0$. Então $\Gamma'(0) = \Gamma''(0) = \dots = \Gamma^{(2N-1)}(0) = 0$ e $\Gamma^{(2N)}(0) = (2N)![\gamma'(0)]^{2N}$.

Lema 4.4 Sejam $l(h) = \sqrt[2N]{h}(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[2N]{h}\mathcal{G}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}}\mathcal{G}_N(h))$, com $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) > 0$, e σ uma involução estrita analítica.

Então existe uma única função G da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $b > 0$, analítica numa vizinhança W_0 da origem, satisfazendo

$l_G(h) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h) = l(h)$, para $h > 0$ suficientemente pequeno, e $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l(G(y))$, em W_0 .

Dem. A função $L(s) = s\mathcal{G}_1(s^{2N}) + s^3\mathcal{G}_2(s^{2N}) + \dots + s^{2N-1}\mathcal{G}_N(s^{2N})$, é analítica, pois é composição de funções analíticas.

Seja $\mathcal{L}(s^{2N}) = \mathcal{G}_1(s^{2N}) + s^2\mathcal{G}_2(s^{2N}) + \dots + s^{2N-2}\mathcal{G}_N(s^{2N})$.

Então $L(s) = s\mathcal{L}(s^{2N})$, com $\mathcal{L}(0) > 0$, e $L'(s) = \mathcal{L}(s^{2N}) + 2N\mathcal{L}'(s^{2N})s^{2N}$, donde $L'(0) = \mathcal{L}(0) > 0$. Assim, existe uma vizinhança $V = (-\sqrt[2N]{h}, \sqrt[2N]{h})$ de zero onde L é estritamente crescente e $L|_V$ possui uma inversa L^{-1} analítica definida em $W = L(V)$. Como $L^{-1}(0) = L(0) = 0$ e tanto L quanto L^{-1} são crescentes temos $\text{sgn}(L(s)) = \text{sgn}(s)$ e $\text{sgn}(L^{-1}(s)) = \text{sgn}(s)$.

Seja W_0 uma vizinhança aberta de zero tal que $y \in W_0$ se, e somente se, $y - \sigma(y) \in W$. Para $y \in W_0$ definimos $G(y) = (L^{-1}(y - \sigma(y)))^{2N}$. Claramente G é analítica e $G(y) \in [0, \bar{h})$, $\forall y \in W_0$.

Pelo Lema 4.3,

$$G'(0) = G''(0) = \dots = G^{2N-1}(0) = 0 \text{ e } G^{(2N)}(0) = (2N)! \left[\frac{1 - \sigma'(0)}{L'(0)} \right]^{2N} > 0.$$

Assim, G tem a forma pretendida. Portanto, como

$$l(k^{2N}) = |k|[\mathcal{G}_1(k^{2N}) + k^2\mathcal{G}_2(k^{2N}) + \dots + k^{2N-2}\mathcal{G}_N(k^{2N})] = \text{sgn}(k)L(k),$$

temos que

$$\begin{aligned} l(G(y)) &= l((L^{-1}(y - \sigma(y)))^{2N}) = \text{sgn}(y - \sigma(y))(y - \sigma(y)) \\ &= \text{sgn}(y)(y - \sigma(y)). \end{aligned} \quad (19)$$

Logo, $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l(G(y))$ em W_0 .

Usando que σ é uma involução e que $\text{sgn}(L^{-1}(s)) = \text{sgn}(s)$, temos que $G(\sigma(y)) = G(y)$.

Portanto, tomando $y_{h+} = G_+^{-1}(h)$ e $y_{h-} = G_-^{-1}(h)$ temos $\sigma(y_{h+}) = y_{h-}$, e usando (19) vem que

$$l(h) = l(G(y_{h+})) = y_{h+} - \sigma(y_{h+}) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h) = l_G(h).$$

Note que se $l(G(x)) = l(\tilde{G}(x))$, então $L(\sqrt[2N]{G(x)}) = L(\sqrt[2N]{\tilde{G}(x)})$, logo a unicidade de G decorre do fato de L ser estritamente crescente em V . ■

Lema 4.5 *Sejam $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}$ e $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{k-1}$ analíticas em $[0, \epsilon)$ (onde $\epsilon > 0$), tais que*

$$\phi(s) = \rho_0(s) + \sqrt[k]{s}\rho_1(s) + \sqrt[k]{s^2}\rho_2(s) + \dots + \sqrt[k]{s^{k-1}}\rho_{k-1}(s) \text{ e}$$

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\rho}_0(s) + \sqrt[k]{s}\tilde{\rho}_1(s) + \sqrt[k]{s^2}\tilde{\rho}_2(s) + \dots + \sqrt[k]{s^{k-1}}\tilde{\rho}_{k-1}(s)$$

coincidam em $[0, \epsilon)$. Então $\rho_j \equiv \tilde{\rho}_j$, em $[0, \epsilon)$, $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Dem. Para concluir que $\rho_j \equiv \tilde{\rho}_j$ numa vizinhança de zero, basta observar que $\Phi(s) = \phi(s^k) - \tilde{\phi}(s^k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n$ é analítica numa vizinhança de zero com $0 = C_{ki+j} = \alpha_i^j - \tilde{\alpha}_i^j$, $0 \leq j \leq k-1$, $i \in \mathbb{N}$.

Do princípio do prolongamento analítico segue que $\rho_j \equiv \tilde{\rho}_j$ onde ambas estiverem definidas. ■

Lema 4.6 *Sejam $F(x) = ax^2 + O(x^2)$ e $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $a > 0$ e $b > 0$, ambas analíticas em zero. Então existem $T_1, T_2, \dots, T_N$ funções analíticas em zero com $T_1(0) > 0$ tal que a função período para o sistema (1) é dada por*

$$T(h) = \frac{1}{2^N \sqrt{h^{N-1}}} [T_1(h) + 2^N \sqrt{h^2} T_2(h) + 2^N \sqrt{h^4} T_3(h) + \dots + 2^N \sqrt{h^{2N-2}} T_N(h)].$$

Dem. Usando o Lema 4.1 e a Observação 4.2, temos

$$l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{2^N \sqrt{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{2^N \sqrt{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{2^N \sqrt{h}},$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_N$ são funções analíticas em zero com $B_1(0) > 0$, e do Lema 2.1 temos $l'_F(h) = \frac{A(h)}{\sqrt{h}}$ com $A(0) > 0$, logo, pela Proposição 2.1,

$$T(h) = \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt{h-z}} \left(\frac{B_1(z)}{2^N \sqrt{z^{2N-1}}} + \frac{B_2(z)}{2^N \sqrt{z^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(z)}{2^N \sqrt{z}} \right) dz.$$

Daqui segue a tese de modo análogo ao item c) do Fato 3.2. ■

O resultado abaixo será usado na prova da proposição 4.1, da proposição 5.1 e da proposição 5.2.

Para $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, e $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{i,j}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(i+\alpha)\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(i+j+\alpha+\beta)}.$$

Lema 4.7 *Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$, satisfazendo*

$$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1, 0 < \delta < 1 \text{ e } \gamma + \delta \leq \alpha + \beta;$$

$$\beta \leq \delta \text{ ou } \alpha + \beta = \gamma + \delta + 1;$$

$$0 < \tilde{\alpha} < 1, 0 < \tilde{\beta} < 1, 0 < \tilde{\gamma} < 1, 0 < \tilde{\delta} < 1 \text{ e } \tilde{\gamma} + \tilde{\delta} \leq \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}; \text{ e}$$

$$\tilde{\beta} \leq \tilde{\delta} \text{ ou } \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} + \tilde{\delta} + 1.$$

Sejam $\tilde{I}_{i,j}^1 = I_{i,j}(\delta, \gamma)$, $\tilde{I}_{i,j}^2 = I_{i,j}(\alpha, \beta)$, $\tilde{I}_{i,j}^3 = I_{i,j}(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma})$, $\tilde{I}_{i,j}^4 = I_{i,j}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, e considere $\rho(\gamma, \delta)$, $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ e $\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\xi(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ definidos no Fato 6.1.

(a) Se existem $a > 0, \tau > 0$ e $C > 0$ tais que

$$(a_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

satisfazem

$a_0^1 = 1, |a_n^1| \leq C^n, |a_n^2| \leq aC^n, |t_n^1| \leq \tau C^n, |t_n^2| \leq \tau C^n, n \in \mathbb{N}$,
então existem $u > 0, v > 0, w > 0$ e $R > 0$ tais que as sequências
 $(b_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, definidas por

$$b_0^1 = \frac{t_0^1}{I_{0,0}^1}, \quad b_0^2 = \frac{t_0^2 - a_0^2 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^4}{\tilde{I}_{0,0}^2},$$

$$b_n^1 = \frac{t_n^1 - \left[\sum_{j=1}^n a_j^1 b_{n-j}^1 \tilde{I}_{j,n-j}^1 \right] - \left[\sum_{j=0}^{n-1} a_j^2 b_{n-j-1}^2 \tilde{I}_{j,n-j-1}^3 \right]}{\tilde{I}_{0,n}^1}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n^2 = \frac{t_n^2 - \left[\sum_{j=1}^n a_j^1 b_{n-j}^2 \tilde{I}_{j,n-j}^2 \right] - \left[\sum_{j=0}^n a_j^2 b_{n-j}^1 \tilde{I}_{j,n-j}^4 \right]}{\tilde{I}_{0,n}^2}, \quad n \geq 1,$$

satisfazem

$$|b_n^1| \leq (u + vn)R^n, \quad |b_n^2| \leq (u + wn)R^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Em particular, se existem $\tau > 0$ e $C > 0$ tais que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem

$$a_0 = 1, |a_n| \leq C^n, |t_n| \leq \tau C^n,$$

então existem $u > 0, v > 0$ e $R > 0$ tais que a sequência $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$d_0 = \frac{t_0}{I_{0,0}^1}, \quad d_n = \frac{t_n - \left[\sum_{j=1}^n a_j d_{n-j} \tilde{I}_{j,n-j}^1 \right]}{\tilde{I}_{0,n}^1}, \quad n \geq 1,$$

satisfaz

$$|d_n| \leq (u + vn)R^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dem.

(a) Sem perda de generalidade, suponhamos que $C \geq 1$.

Sejam $\xi = \max\{\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \xi(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})\}$ e $\rho = \min\{\rho(\gamma, \delta), \rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})\}$.

Sejam u, v e w tais que

$$|b_j^1| \leq uC^j, |b_j^2| \leq uC^j, \quad j = 0, 1, 2, \quad (20)$$

$$v = 4(1 + u), \quad w = \frac{1}{2}(1 + 13a\xi v). \quad (21)$$

Tomemos R satisfazendo

$$R \geq C, \quad R \geq \frac{12a\xi w}{v}. \quad (22)$$

$$R \geq 2C\gamma, \quad R \geq 2C\tilde{\gamma}, \quad R \geq \frac{\tau C}{\rho}, \quad (23)$$

$$R \geq C\left(\gamma + \frac{1}{\delta} + 3a\xi\right), \quad R \geq C\left(\tilde{\gamma} + \frac{1}{\delta} + 4a\xi\right), \quad (24)$$

A prova será feita por indução.

Claramente,

$$|b_j^1| \leq (u + vj)R^j, \quad |b_j^2| \leq (u + wj)R^j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (25)$$

Suponhamos que para algum $n \geq 3$ vale

$$|b_j^1| \leq (u + vj)R^j, \quad |b_j^2| \leq (u + wj)R^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (26)$$

Então, usando a hipótese de indução e os itens (ii), (iii), (iv), (xiii), (viii), (ix) e (x) do Fato 6.1 obtemos

$$\begin{aligned} |b_n^1| &\leq \frac{\tau C^n n}{\rho} + \left[\sum_{j=1}^{n-1} C^j (u + v(n-j)) R^{n-j} \frac{\gamma}{n-j} \right] + C^n u R^0 \frac{1}{\delta} n + \\ &\quad + aC^0 (u + w(n-1)) R^{n-1} \xi + aC (u + w(n-2)) R^{n-2} \xi + \\ &\quad + \left[\sum_{j=2}^{n-2} aC^j (u + w(n-j-1)) R^{n-j-1} \frac{\xi}{n-j-1} \right] + aC^{n-1} u R^0 \xi n. \end{aligned}$$

Majorando as somatórias e a seguir usando (22) obtemos

$$\begin{aligned} |b_n^1| &\leq \frac{\tau C^n n}{\rho} + C R^{n-1} (u + v)(n-1) \gamma + C^n R^0 \frac{u}{\delta} n + \\ &\quad + aC^0 R^{n-1} (u + w(n-1)) \xi + aC R^{n-2} (u + w(n-2)) \xi + \\ &\quad + aC^2 R^{n-3} (u + w)(n-3) \xi + aC^{n-1} R^0 u \xi n \\ &\leq nR^n \left[\frac{\tau C}{\rho R} + \left(\gamma + \frac{1}{\delta} + 4a\xi \right) \frac{C}{R} u + \gamma \frac{C}{R} v + 3a\xi \frac{1}{R} w \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, usando (22), (23) e (24) obtemos

$$|b_n^1| \leq nR^n \left[1 + u + \frac{v}{2} + \frac{v}{4} \right] = nR^n v \leq (u + vn)R^n.$$

Analogamente, usando a hipótese de indução, a majoração de $|b_n^1|$ e os itens (ii), (iii), (iv), (xii), (v), (vi) e (vii) do Fato 6.1 obtemos

$$\begin{aligned}
|b_n^2| &\leq \frac{\tau C^n}{\rho} n + \left[\sum_{j=1}^{n-1} C^j (u + w(n-j)) R^{n-j} \frac{\tilde{\gamma}}{n-j} \right] + C^n u \frac{1}{\delta} n + \\
&+ aC^0 (u + vn) R^n \xi + aC (u + v(n-1)) R^{n-1} \xi + \\
&+ \left[\sum_{j=2}^{n-1} aC^j (u + v(n-j)) R^{n-j} \frac{\xi}{n-j} \right] + aC^n u R^0 \xi n.
\end{aligned}$$

Então, majorando as somatórias e usando (22) obtemos

$$\begin{aligned}
|b_n^2| &\leq \frac{\tau C^n}{\rho} n + C R^{n-1} (u + w) (n-1) \tilde{\gamma} + C^n R^0 \frac{u}{\delta} n + aC^0 R^n (u + vn) \xi + \\
&+ aC R^{n-1} (u + v(n-1)) \xi + aC^2 R^{n-2} (u + v) (n-2) \xi + aC^n R^0 u \xi n \\
&\leq n R^n \left[\frac{\tau C}{\rho R} + \left(\tilde{\gamma} + \frac{1}{\delta} + 3a\xi \right) \frac{C}{R} u + a\xi u + 3a\xi v + \tilde{\gamma} \frac{C}{R} w \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (22), (23) e (24), e a seguir (21), obtemos

$$\begin{aligned}
|b_n^2| &\leq n R^n \left[1 + u + a\xi u + 3a\xi v + \frac{w}{2} \right] \leq n R^n \left[\frac{v}{4} + a\xi \frac{v}{4} + 3a\xi v + \frac{w}{2} \right] \\
&= n R^n \left[\frac{1}{4} (1 + 13a\xi) v + \frac{w}{2} \right] = n R^n w \leq (u + wn) R^n.
\end{aligned}$$

(b) Para obter a majoração de $|d_n|$ basta aplicar o item (a) com $a_n^1 = a_n$, $a_n^2 = 0$, $t_n^1 = t_n$, $t_n^2 = 0$, $n \in \mathbb{N}$, observando que nesse caso $b_n^1 = d_n$ e $b_n^2 = 0$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 4.1 *Seja*

$$T(h) = \frac{1}{2^N \sqrt{h^{2N-1}}} [T_1(h) + 2^N \sqrt{h^2} T_2(h) + 2^N \sqrt{h^4} T_3(h) + \dots + 2^N \sqrt{h^{2N-2}} T_N(h)],$$

onde $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$ são funções analíticas em zero e $T_1(0) > 0$. Seja A analítica em zero tal que $A(0) > 0$. Então a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt{h-z}} \left(\frac{B_1(h)}{2^N \sqrt{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{2^N \sqrt{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{2^N \sqrt{h}} \right) dz, \quad (27)$$

tem solução única dada por N funções analíticas $B_1, B_2, \dots, B_N$ com $B_1(0) > 0$.

Observação: A unicidade nesse enunciado acima significa que se $B_1, B_2, \dots, B_N$ são analíticas em $[0, r)$ satisfazendo (27) e $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_N$ são analíticas em $[0, \tilde{r})$ satisfazendo (27) então $B_k \equiv \tilde{B}_k$ em $[0, r) \cap [0, \tilde{r})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Dem. Seja $R > 0$ tal que para $h \in [0, R]$,

$$A(h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k, \quad T_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n, \quad T_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n, \dots, T_N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^N h^n.$$

Unicidade de solução:

Sejam $B_1, B_2, \dots, B_N$ analíticas em $[0, r]$ satisfazendo (27) e suponhamos que

$$B_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 h^n, B_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 h^n, \dots, B_N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^N h^n \text{ em } [0, \epsilon],$$

para algum $\epsilon > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade $\epsilon \leq R$.

Com operações análogas às usadas em (11) e (12) na prova do item (c) do Fato 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} T(h) &= \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt{h-z}} \left(\frac{B_1(h)}{2\sqrt[2N]{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{2\sqrt[2N]{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{2\sqrt[2N]{h}} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\sqrt[2N]{h^{N-1}}} \left[\sum_{m=1}^N \left(2\sqrt[2N]{h^{2m-2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j^m I_{i,j}^m \right) h^n \right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{onde } I_{i,j}^q = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \theta \cos^{2j} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

Agora usando o Lema 4.5, temos, para $q = 1, \dots, N$,

$$T_q(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j^q I_{i,j}^q \right) h^n, \text{ ou seja, } t_n^q = \sum_{i+j=n} a_i b_j^q I_{i,j}^q. \quad (29)$$

Observando que $a_0 = A(0) \neq 0$, a unicidade de b_j^q segue do fato de o sistema

$$t_n^q = \sum_{i+j=n} a_i b_j^q I_{i,j}^q \quad (30)$$

nas incógnitas $b_0^q, b_1^q, \dots, b_n^q, \dots$ ser triangular superior possível e determinado.

Disto segue a unicidade local de $B_1, B_2, \dots, B_N$.

A unicidade global segue então do princípio do prolongamento analítico.

Existência de solução:

Sejam $(b_j^q)_{j \in \mathbb{N}}$, $q = 1, 2, \dots, N$, definidos por (30).

Suponhamos sem perda de generalidade $a_0 = A(0) = 1$.

Já que as séries de potências $\sum a_n h^n$ e $\sum t_n^q h^n$ convergem numa vizinhança de zero, podemos tomar $C \geq 1$ e $\tau \geq 0$ de modo que

$$|a_n| \leq C^n \text{ e } |t_n^q| \leq \tau C^n, \forall n \in \mathbb{N}, q \in \{1, \dots, N\}.$$

Então, para cada $q \in \{1, \dots, N\}$, podemos usar o item (b) do Fato 4.7 com

$$\tilde{I}_{i,j}^1 = I_{i,j}^q = I_{i,j}(\gamma, \delta) = I_{i,j}\left(\frac{1}{2}, \frac{2q-1}{2N}\right),$$

e concluir que existem u_q, v_q, R_q tais que $R_q \geq C$ de modo que

$$|b_n^q| \leq (u_q + v_q n) R_q^n.$$

Isto prova a convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^q z^n$ numa vizinhança de zero.

Assim, $B_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^q z^n$, $q \in \{1, \dots, N\}$, satisfazem as passagens em (28), resolvem (27) para $z \geq 0$ suficientemente pequeno, e $B_1(0) = b_0^1 > 0$. ■

Lema 4.8 *Sejam $\tilde{l}(h) = {}^{2N}\sqrt{h}(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[2]{h}\mathcal{G}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}}\mathcal{G}_N(h))$ com $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) > 0$, e seja $L(y) = y\mathcal{G}_1(y^{2N}) + y^3\mathcal{G}_2(y^{2N}) + \dots + y^{2N-1}\mathcal{G}_N(y^{2N})$. Dadas G analítica em zero da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $b > 0$, tal que $l_G = l$, e $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l(G(y))$, então $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^{2N}$ numa vizinhança de zero.*

Dem. Pelo Lema 4.2, σ é uma involução estrita analítica. Então pelo Lema 4.4 decorre que existe uma única função analítica $\tilde{G}$ definida numa vizinhança W_0 da origem, da forma $\tilde{G}(y) = \tilde{b}y^{2N} + O(y^{2N+1})$ tal que $l(h) = \tilde{G}_+^{-1}(h) - \tilde{G}_-^{-1}(h) = l_{\tilde{G}}(h)$ para $h > 0$ suficientemente pequeno, e $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l(\tilde{G}(y))$ em W_0 .

Da unicidade de $\tilde{G}$ e de nossas hipóteses segue que $G = \tilde{G}$ onde ambas estiverem definidas.

Da construção de $\tilde{G}$ na prova do Lema 4.4 decorre que

$$G(y) = \tilde{G}(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^{2N}$$

numa vizinhança da origem. ■

4.2 Resultado principal

Nesta subseção apresentaremos a generalização de um dos principais resultados de [1], o Teorema A. O outro resultado importante de [1], o Teorema B, não faz sentido no contexto em que $M = 1$ e $N > 1$. Voltaremos a tratar disso na próxima seção.

Teorema 4.1 *Sejam*

$$T(h) = \frac{1}{2^N \sqrt[h]{h^{N-1}}} [T_1(h) + 2^N \sqrt[h]{h^2} T_2(h) + \dots + 2^N \sqrt[h]{h^{2N-2}} T_N(h)],$$

onde $T_1, T_2, \dots, T_N$ são analíticas em zero e $T_1(0) > 0$, e $F(x) = ax^2 + O(x^3)$ analítica em zero, com $a > 0$. Seja

$$l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h), h \in [0, \bar{h}].$$

Então as afirmações abaixo são verdadeiras:

(i) Existe uma única $l(h) = 2^N \sqrt[h]{h} [\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[h]{h} \mathcal{G}_2(h) + \dots + \sqrt[h]{h^{N-1}} \mathcal{G}_N(h)]$, com $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) > 0$ tal que, se G é analítica em zero da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $b > 0$, e satisfaz $l_G = l$, então a origem de (1) é um centro com função período T .

(ii) O conjunto das funções G da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, analíticas em zero, com $b > 0$, satisfazendo $l_G = l$, está em correspondência biunívoca com o conjunto Σ das involuções estritas analíticas. Mais concretamente, para cada $\sigma \in \Sigma$, a função correspondente G é dada por $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^{2N}$ onde

$$L(y) = y\mathcal{G}_1(y^{2N}) + y^3\mathcal{G}_2(y^{2N}) + \dots + y^{2N-1}\mathcal{G}_N(y^{2N}),$$

com $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ dadas em (i).

Dem.

(i) Pelo Fato 3.2, $l'_F(h) = \frac{A(h)}{h}$, com $A(0) > 0$. Pela Proposição 4.1, existem únicas funções analíticas $B_1, B_2, B_3, \dots, B_N$, com $B_1(0) > 0$ tais que

$$T(h) = \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt[h]{h-z}} \left(\frac{B_1(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{2^N \sqrt[h]{h}} \right) dz. \quad (31)$$

Mostremos que existe uma única maneira de escrever $B_k, k = 1, 2, \dots, N$, como

$$B_k(h) = \frac{(2k-1)\mathcal{G}_k(h)}{2N} + h\mathcal{G}'_k(h), \quad (32)$$

com $\mathcal{G}_k$ analítica em zero.

Como B_k é analítica em zero, $B_k(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^k h^n$ numa vizinhança $(-\epsilon, \epsilon)$

de zero, e $b_0^1 = B_1(0) > 0$.

Suponhamos que exista $\mathcal{G}_k$ analítica em zero, $\mathcal{G}_k(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n$ numa vizinhança de zero, que satisfaz (32).

Então

$$\begin{aligned}
B_k(h) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^k h^n = \frac{2k-1}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n + h \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1}^k h^n \\
&= \frac{2k-1}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^k h^n \\
&= \frac{(2k-1)c_0^k}{2N} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2N} + n \right) c_n^k h^n,
\end{aligned}$$

ou seja, $b_0^k = \frac{(2k-1)c_0^k}{2N}$ e $b_n^k = \left(\frac{2k-1}{2N} + n \right) c_n^k$, $n \geq 1$.

Isto mostra a unicidade de $\mathcal{G}_k$ analítica em zero satisfazendo (32) numa certa vizinhança de zero.

Provemos a existência de $\mathcal{G}_k$ analítica em zero satisfazendo (32).

A candidata a $\mathcal{G}_k$ é dada por:

$$\mathcal{G}_k(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n = c_0^k + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^k h^n = \frac{2N b_0^k}{2k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N b_n^k}{2k-1+2Nn} h^n.$$

Como $|c_n^k| = \left| \frac{2N b_n^k}{2k-1+2Nn} \right| \leq |b_n^k|$, $\forall n \geq 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n$ converge onde

a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^k h^n$ converge. Portanto $\mathcal{G}_k$ dada acima está bem definida e é analítica numa vizinhança da origem, e claramente satisfaz (32). Também $\mathcal{G}_1(0) = 2N b_0^1 = 2N B_1(0) > 0$.

Definamos $l(h) = \sqrt[2N]{h} [\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[2N]{h} \mathcal{G}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}} \mathcal{G}_N(h)]$.

Seja G analítica em zero da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $b > 0$, tal que $l_G = l$.

Claramente (1) tem centro na origem.

Pelo Lema 4.1 temos $l_G(h) = \sqrt[2N]{h} [\tilde{\mathcal{G}}_1(h) + \sqrt[2N]{h} \tilde{\mathcal{G}}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}} \tilde{\mathcal{G}}_N(h)]$, com $\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_N$ analíticas em zero e $\tilde{\mathcal{G}}_1(0) > 0$.

Como $l_G = l$ decorre do Lema 4.5 que $\tilde{\mathcal{G}}_k = \mathcal{G}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Pela Observação 4.2 decorre que

$$l'_G(h) = l'(h) = \frac{B_1(h)}{2N\sqrt[2N]{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{2N\sqrt[2N]{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_{N-1}(h)}{2N\sqrt[2N]{h^3}} + \frac{B_N(h)}{2N\sqrt[2N]{h}},$$

e segue da Proposição 2.1 que (1) tem centro de função período T .

Com isso mostramos a existência de l satisfazendo (i).

Suponhamos que $l_1(h) = \sqrt[2N]{h} [\tilde{\mathcal{G}}_1(h) + \sqrt[2N]{h} \tilde{\mathcal{G}}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}} \tilde{\mathcal{G}}_N(h)]$, com $\tilde{\mathcal{G}}_1(0) > 0$ e $\tilde{\mathcal{G}}_k, k = 1, 2, \dots, N$, analíticas em zero, seja tal que para

toda G analítica com mínimo na origem da forma $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ satisfazendo $l_G(h) = l_1(h)$, tenhamos em (1) um centro de função período T . Então pela Observação 4.2, temos

$$l'_G(h) = \frac{\tilde{B}_1(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-1}}} + \frac{\tilde{B}_2(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-3}}} + \cdots + \frac{\tilde{B}_N(h)}{2^N \sqrt[h]{h}}, \text{ com } \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_N$$

funções analíticas em zero, e $\tilde{B}_1(0) = \frac{\tilde{G}_1(0)}{2^N} > 0$. Pela Proposição 2.1,

$$T(h) = \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt[h]{h-z}} \left(\frac{\tilde{B}_1(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-1}}} + \frac{\tilde{B}_2(h)}{2^N \sqrt[h]{h^{2N-3}}} + \cdots + \frac{\tilde{B}_N(h)}{2^N \sqrt[h]{h}} \right) dz.$$

Então, pela unicidade dada na Proposição 4.1, $B_k = \tilde{B}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, e pela representação de B_k , $1 \leq k \leq N$, em termos de $\mathcal{G}_k$ apresentada na Observação 4.2, temos

$$B_k = \frac{(2k-1)\mathcal{G}_k(h)}{2^N} + h\mathcal{G}'_k(h) = \frac{(2k-1)\tilde{\mathcal{G}}_k(h)}{2^N} + h\tilde{\mathcal{G}}'_k(h).$$

Devido à unicidade de solução analítica em zero para a equação diferencial acima decorre que $\mathcal{G}_k = \tilde{\mathcal{G}}_k$, numa vizinhança da origem.

Portanto, $l_1 = l$ numa vizinhança da origem.

(ii) Seja $l(h) = 2^N \sqrt[h]{h} [\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[h]{h} \mathcal{G}_2(h) + \cdots + \sqrt[h]{h^{N-1}} \mathcal{G}_N(h)]$ satisfazendo o item (i).

Seja σ uma involução estrita analítica. O Lema 4.4 garante que existe uma única função G analítica em zero, $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ com $b > 0$ tal que

$$l_G(h) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h) = l(h) \text{ e } \sigma(y) = y - \operatorname{sgn}(y)l(G(y)).$$

Pelo Lema 4.8, $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^{2N}$.

Por outro lado, dada $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ com $b > 0$ analítica em zero, tal que $l_G = l$, segue do Lema 4.2 que $\sigma(y) = y - \operatorname{sgn}(y)l(G(y))$ é uma involução estrita analítica.

Novamente pelo Lema 4.8, $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^{2N}$. ■

4.3 Sistemas isócronos e comportamento da função período

Nesta subseção obteremos algumas consequências dos resultados anteriores sobre o comportamento da função período, ainda no caso em que $M = 1$.

Corolário 4.1 *Se em (1), F é analítica em zero com $l_F(h) = a\sqrt[h]{h}$ com $a > 0$ e $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ é analítica em zero com $b > 0$, então a origem de (1) é um centro isócrono se e somente se $N = 1$ e $l_G(h) = \beta\sqrt[h]{h}$ com $\beta > 0$.*

Dem. Se $N = 1$, está provado em [1] que a origem de (1) é um centro isócrono se e somente se $l_G(h) = \beta\sqrt[h]{h}$ com $\beta > 0$.

Se $N \geq 2$, pelo Lema 4.6, $T(h)$ não é limitada perto de $h = 0$, e assim não temos isocronismo. ■

O exemplo a seguir destaca uma propriedade que estudaremos no final desta seção.

Exemplo: Sejam $G(y) = \alpha y^{2N}$, com $\alpha > 0$, e $N \in \mathbb{N}$. Se $l_F(h) = a\sqrt{h}$ com $a > 0$ então ${}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}T(h)$ é constante. Além disso, $l_G(h) = b {}^{2N}\sqrt{h}$, onde $b = \frac{2}{{}^{2N}\sqrt{\alpha}} > 0$.

De fato, numa vizinhança da origem, $G(y) = \alpha y^{2N} = h$, se e somente se $y = \pm {}^{2N}\sqrt{\frac{h}{\alpha}} = \pm \frac{{}^{2N}\sqrt{h}}{{}^{2N}\sqrt{\alpha}}$. Assim,

$$l_G(h) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h) = \frac{{}^{2N}\sqrt{h}}{{}^{2N}\sqrt{\alpha}} - \left(-\frac{{}^{2N}\sqrt{h}}{{}^{2N}\sqrt{\alpha}} \right) = \frac{2}{{}^{2N}\sqrt{\alpha}} {}^{2N}\sqrt{h},$$

e deste modo, $l_G(h) = b {}^{2N}\sqrt{h}$, $b > 0$.

Fazendo a mudança de variáveis $z = h \sin^2 \theta$, obtemos

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{d^2}{dh^2} (l_F * l_G)(h) = \frac{d^2}{dh^2} \left[\int_0^h l_F(h-z) l_G(z) dz \right] \\ &= \frac{d^2}{dh^2} \left[2abh^{\frac{3N+1}{2N}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right] = \frac{d^2}{dh^2} \left[\frac{\pi}{8} abh^{\frac{3N+1}{2N}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, ${}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}T(h)$ é constante.

Usando a proposição 2.2 obtemos algumas condições para assegurar a monotonicidade de T quando $M = 1$ e $N = 1$. Nesse caso, como l_F e l_G são funções crescentes em $(0, \hat{h}) \subset (0, \bar{h})$ com $\hat{h} > 0$, ocorre que l'_F e l'_G são funções não negativas nesse intervalo. Sendo assim, se ψ_F e ψ_G definidas por

$$\psi_F(z) = \frac{l'_F(z) + 2zl''_F(z)}{2} \text{ e } \psi_G(z) = \frac{l'_G(z) + 2zl''_G(z)}{2}$$

são positivas [respectivamente, negativas] em $(0, \hat{h})$ então pela Proposição 2.2 resulta que T é monótona crescente [respectivamente, decrescente] nesse intervalo, pois pela Proposição 2.2 temos

$$hT'(h) = (\psi_F * l'_G)(h) + (l'_F * \psi_G)(h).$$

Não devemos esperar que ψ_F e ψ_G sejam ambas positivas, quando $M = 1$ e $N > 1$, em nenhum intervalo $(0, \hat{h}) \subset (0, \bar{h})$ com $\hat{h} > 0$, caso contrário teríamos T monótona crescente em $(0, \hat{h})$, o que é impossível, já que próximo da origem T não é limitada se $M = 1$ e $N \geq 2$.

Assim, próximo da origem nunca teremos T crescente se $M = 1$ e $N \geq 2$.

No entanto, podemos tentar estudar o comportamento de ${}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}T(h)$.

Corolário 4.2 *Seja T a função período para o sistema (1) no caso em que $F(x) = ax^2 + O(x^3)$ e $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$ são funções analíticas, $a > 0$ e $b > 0$. Suponhamos que ${}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}T(h)$ seja constante e que $l_F(h) = c\sqrt{h}$, com $c > 0$. Então $l_G(h) = d\sqrt[2N]{h}$, com $d > 0$.*

Dem. Temos $l'_F(h) = \frac{A(h)}{\sqrt{h}} = \frac{c}{2\sqrt{h}}$. Pelo Lema 4.1

$$l_G(h) = {}^{2N}\sqrt{h}(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt[2N]{h}\mathcal{G}_2(h) + \dots + \sqrt[2N]{h^{N-1}}\mathcal{G}_N(h)), \quad (33)$$

onde $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ são analíticas em zero e $\mathcal{G}_1(0) > 0$, e pela Observação 4.2,

$$l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{{}^{2N}\sqrt{h^{2N-1}}} + \frac{B_2(h)}{{}^{2N}\sqrt{h^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(h)}{{}^{2N}\sqrt{h}} \text{ onde}$$

$$B_q(h) = \frac{(2q-1)\mathcal{G}_q(h)}{2N} + h\mathcal{G}'_q(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^q h^n, \quad q = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Por hipótese, existe $\alpha > 0$ tal que $T(h) = \frac{\alpha}{{}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}}$, e pela Proposição 2.1,

$$\frac{\alpha}{{}^{2N}\sqrt{h^{N-1}}} = \int_0^h \frac{A(h-z)}{\sqrt{h-z}} \left[\frac{B_1(z)}{{}^{2N}\sqrt{z^{2N-1}}} + \frac{B_2(z)}{{}^{2N}\sqrt{z^{2N-3}}} + \dots + \frac{B_N(z)}{{}^{2N}\sqrt{z}} \right] dz. \quad (35)$$

Pela Proposição 4.1, $B_1, \dots, B_N$ analíticas em zero, com $B_1(0) > 0$, satisfazendo (35), são únicas, e podemos verificar diretamente que elas são dadas por

$$B_1(h) = \beta = \frac{64N^2\alpha}{(3N+1)(N+1)\pi c}, \quad B_q(h) = 0, \quad q = 2, \dots, N.$$

Pela Observação 4.2,

$$\frac{\mathcal{G}_1(h)}{2N} + h\mathcal{G}'_1(h) = \beta, \quad \frac{(2q-1)\mathcal{G}_q(h)}{2N} + h\mathcal{G}'_q(h) = 0, \quad q = 2, \dots, N.$$

Resolvendo as equações diferenciais ordinárias acima e lembrando que $\mathcal{G}_1(h), \mathcal{G}_2(h), \dots, \mathcal{G}_N(h)$ devem ser analíticas em zero obtemos obtemos $\mathcal{G}_1(h) = 2N\beta$, $\mathcal{G}_q(h) = 0$, $q = 2, \dots, N$. ■

5 Energia cinética não clássica

O nosso objetivo nesta seção é generalizar os resultados de [1] mudando principalmente a função F , que será da forma $F(x) = ax^4 + O(x^4)$, $a > 0$. Observe que, neste contexto, deixamos de trabalhar com sistemas hamiltonianos clássicos, em que a energia cinética $F(x)$ tem matriz hessiana

não degenerada numa vizinhança de zero (como ocorria no caso em que $F(x) = ax^2 + O(x^3)$, com $a > 0$). Trataremos o caso em que $M = 2$ com $N = 1$ e com $N = 2$.

Os domínios de analiticidade Ω e $\tilde{\Omega}$ das funções F e G aqui consideradas, bem como $\bar{x}_-$, $\bar{x}_+$, $\bar{y}_-$, $\bar{y}_+$ e $\bar{h}$, satisfarão, a menos de menção explícita em contrário, as mesmas propriedades destacadas na seção 2.

5.1 O caso em que G tem mínimo não degenerado

Seja $H(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$, isto é, $F(x) = \frac{x^4}{4}$ e $G(y) = \frac{y^2}{2}$.

Então $G(y) = h \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2h}$, e $F(x) = h \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{4h}$, donde

$$l_G(h) = G_+^{-1}(h) - G_-^{-1}(h) = \sqrt{2h} - (-\sqrt{2h}) = 2\sqrt{2h},$$

$$l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h) = \sqrt[4]{4h} - (-\sqrt[4]{4h}) = 2\sqrt[4]{4h}.$$

Assim obtemos $l'_G(h) = \sqrt{\frac{2}{h}}$ e $l'_F(h) = \frac{2}{\sqrt[4]{(4h)^3}}$. Logo

$$T(h) = (l'_F * l'_G)(h) = \int_0^h l'_G(z) l'_F(h-z) dz = \int_0^h \frac{1}{\sqrt{z} \sqrt[4]{(h-z)^3}} dz.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = h \cos^2 \theta$, obtemos

$$T(h) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{h \cos^2 \theta} \sqrt[4]{(h \sin^2 \theta)^3}} h \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{\sqrt[4]{h}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

Isto motivou o estudo do caso não clássico em que $F(x) = ax^4 + O(x^5)$.

Neste caso, podemos reescrever os resultados apresentados em Fato 3.1, Lema 4.2 e Lema 4.4 com F no lugar de G , obtendo os dois resultados abaixo:

Fato 5.1 Se $F(x) = ax^4 + O(x^5)$, é analítica em $\tilde{\Omega}$, com $a > 0$, então

(i) para $h \in (0, \bar{h})$ tem-se

$$l_F(h) = \sqrt[4]{h}(\mathcal{F}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{F}_2(h)),$$

onde $\mathcal{F}_1(h)$ e $\mathcal{F}_2(h)$ são analíticas em zero e $\mathcal{F}_1(0) = \frac{2}{\sqrt[4]{a}} > 0$.

(ii) $l'_F(h) = \frac{A_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{A_2(h)}{\sqrt[4]{h}}$, com A_1 e A_2 analíticas em zero, $A_1(0) > 0$.

(iii) $\sigma(x) = x - \text{sgn}(y)l_F(F(x))$, $x \in (\bar{x}_-, \bar{x}_+)$, é uma involução estrita analítica tal que $F(x) = F(\sigma(x))$.

Fato 5.2 Sejam $l(h) = \sqrt[4]{h}(\delta(h) + \sqrt{h}\beta(h))$, com δ e β analíticas em zero e $\delta(0) > 0$, e σ uma involução estrita analítica. Então existe uma única função F da forma $F(x) = ax^4 + O(y^5)$, com $a > 0$, analítica numa vizinhança

W_0 da origem, satisfazendo $l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h) = l(h)$, para $h > 0$ suficientemente pequeno, e $\sigma(x) = x - \text{sgn}(x)l(F(x))$, em W_0 .

Observação 5.1 Sejam $(a_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$, $(a_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$, $(t_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(t_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ seqüências reais com $a_0^1 > 0$ e $t_0^1 > 0$. Considere o sistema linear dado pelas equações a seguir

$$(a) \sum_{i+j=k} a_i^1 b_j \tilde{I}_{i,j} = t_k^1, \quad k \in \mathbb{N} \quad (b) \sum_{i+j=k} a_i^2 b_j \hat{I}_{i,j} = t_k^2, \quad k \in \mathbb{N} \text{ onde}$$

$$\begin{cases} \tilde{I}_{i,j} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{2j} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{4})\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+j+\frac{3}{4})} \\ \hat{I}_{i,j} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{2j} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{3}{4})\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+j+\frac{5}{4})} \end{cases} \quad (36)$$

Note que $\tilde{I}_{i,j} = I_{j,i}^1$ e $\hat{I}_{i,j} = I_{j,i}^2$ onde $I_{j,i}^q$, $q = 1, 2$, são dadas pela definição 6.2 com $N = 2$.

Considerando apenas $k = 0, 1, \dots, n$, (a) pode ser escrito como

$$\tilde{J}_n \mathbf{b}_n = \tilde{\mathbf{t}}_n$$

onde

$$\tilde{J}_n = \begin{bmatrix} a_0^1 \tilde{I}_{0,n} & a_1^1 \tilde{I}_{1,n-1} & a_2^1 \tilde{I}_{2,n-2} & \dots & a_n^1 \tilde{I}_{n,0} \\ 0 & a_0^1 \tilde{I}_{0,n-1} & a_1^1 \tilde{I}_{1,n-2} & \dots & a_{n-1}^1 \tilde{I}_{n-1,0} \\ 0 & 0 & a_0^1 \tilde{I}_{0,n-2} & \dots & a_{n-2}^1 \tilde{I}_{n-2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0^1 \tilde{I}_{0,0} \end{bmatrix}$$

é inversível,

$$\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{t}}_n = \begin{bmatrix} t_n^1 \\ t_{n-1}^1 \\ t_{n-2}^1 \\ \vdots \\ t_0^1 \end{bmatrix},$$

portanto $\mathbf{b}_n = (\tilde{J}_n)^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_n$.

Do mesmo modo, considerando apenas $k = 0, 1, \dots, n$, o sistema (b) pode ser reescrito como

$$\hat{J}_n \mathbf{b}_n = \hat{\mathbf{t}}_n,$$

onde $\hat{J}_n$ e $\hat{\mathbf{t}}_n$ são matrizes definidas analogamente a $\tilde{J}_n$ e $\tilde{\mathbf{t}}_n$ substituindo-se $\tilde{I}_{i,j}$ por $\hat{I}_{i,j}$, a_i^1 por a_i^2 , e t_i^1 por t_i^2 .

Assim, se olharmos para (a) e (b) com $0 \leq k \leq n$ como um sistema de $2n + 2$ equações com incógnitas $b_0, b_1, \dots, b_n$, para termos existência e unicidade de solução é necessário e suficiente que a relação $\hat{J}_n (\tilde{J}_n)^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_n = \hat{\mathbf{t}}_n$ seja satisfeita.

Na Proposição a seguir, $\tilde{\mathbf{J}}_n$ e $\hat{\mathbf{J}}_n$ serão as matrizes definidas na Observação 5.1.

Proposição 5.1 *Sejam $A_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 h^n$ e $A_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h^n$, $h \in [0, R)$, com $A_1(0) = a_0^1 > 0$, e seja também $T(h) = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}(T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h))$, onde*

$$T_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n \text{ e } T_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n, \text{ } h \in [0, R), \text{ com } T_1(0) = t_0^1 > 0,$$

tais que $\hat{\mathbf{J}}_n(\tilde{\mathbf{J}}_n)^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_n = \hat{\mathbf{t}}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[3]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[3]{h-z}} \right) \cdot \frac{B(z)}{\sqrt{z}} dz \quad (37)$$

tem uma única solução analítica B tal que $B(0) > 0$.

Observação: Essa unicidade significa que se $B: [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ e $B_1: [0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}$ são duas soluções analíticas de (37), então $B = B_1$ em $[0, r) \cap [0, r_1)$.

Dem.

Unicidade de solução:

Seja $B(z)$ uma solução analítica em $[0, r)$, $0 < r \leq R$, e suponhamos que $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ em $[0, \epsilon_0)$, para algum $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_0 \leq r$.

Com operações análogas às usadas em (11) e (12) na prova do item (c) do Fato 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} T(h) &= \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[3]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[3]{h-z}} \right) \cdot \frac{B(z)}{\sqrt{z}} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i^1 b_j \tilde{I}_{i,j} \right) h^n + \sqrt{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i^2 b_j \hat{I}_{i,j} \right) h^n, \end{aligned} \quad (38)$$

onde, $\tilde{I}_{i,j}$ e $\hat{I}_{i,j}$ são dados por (36).

Assim, usando o Lema 4.5 obtemos

$$t_n^1 = \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i^1 b_j \tilde{I}_{i,j}}_{(a)} \text{ e } t_n^2 = \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i^2 b_j \hat{I}_{i,j}}_{(b)}, \text{ } k \in \mathbb{N}.$$

O sistema (a) com $0 \leq k \leq n$, do qual $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ é solução, é possível e determinado. Isto prova a unicidade local de B .

A unicidade global segue do princípio do prolongamento analítico.

Existência de solução:

Seja $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ determinada por (a). Da hipótese $\hat{\mathbf{J}}_n(\tilde{\mathbf{J}}_n)^{-1} \tilde{\mathbf{t}}_n = \hat{\mathbf{t}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, segue imediatamente que tais b_j 's satisfazem também (b).

Podemos supor sem perda de generalidade $a_0^1 = A_1(0) = 1$.

Procedendo como na prova da Proposição 4.1, tomemos $C \geq 1$ e $\tau \geq 0$ de modo que

$$|a_n^1| \leq C^n \text{ e } |t_n^1| \leq \tau C^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, usando o item (b) do Fato 4.7 com

$$\tilde{I}_{i,j}^1 = \tilde{I}_{i,j} = I_{i,j}(\gamma, \delta) = I_{i,j}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}),$$

decorre que existem reais $u, v, \tilde{R}$ com $\tilde{R} \geq C$ tais que

$$|b_n| \leq (u + vn)\tilde{R}^n.$$

Isto prova a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ numa vizinhança de zero.

Assim, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ satisfaz (38) e portanto satisfaz (37) para $z \geq 0$ suficientemente pequeno, e $B(0) = b_0 > 0$. ■

Teorema 5.1 *Sejam F uma função da forma $F(x) = ax^4 + O(x^5)$ analítica em zero, com $a > 0$, e $l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h)$, $h \in [0, \bar{h}]$.*

Considere $A_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 h^n$ e $A_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h^n$, com $A_1(0) = a_0^1 > 0$, e seja $T(h) = \frac{1}{\sqrt[4]{h}}[T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h)]$, com T_1 e T_2 satisfazendo as hipóteses da Proposição 5.1.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) *Existe uma única $l(h) = \sqrt{h}\mathcal{L}(h)$ com $\mathcal{L}$ analítica em zero e $\mathcal{L}(0) > 0$ tal que se G é analítica em zero da forma $G(y) = by^2 + O(y^3)$ com $b > 0$ e satisfaz $l_G \equiv l$, então a origem de (1) é um centro com função período T .*
- (ii) *O conjunto das funções $G(y) = by^2 + O(y^3)$ analíticas em zero com $b > 0$, que satisfazem $l_G \equiv l$ está em correspondência biunívoca com o conjunto Σ das involuções estritas analíticas.*

Mais concretamente, para cada $\sigma \in \Sigma$ a função correspondente G é dada por $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^2$ onde $L(y) = y\mathcal{L}(y^2)$ com $\mathcal{L}$ dada em (i).

Dem. De fato, a Observação 5.1 nos garante que $l'_F(h) = \frac{A_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{A_2(h)}{\sqrt[4]{h}}$, com A_1 e A_2 analíticas em zero e $A_1(0) > 0$, e, das hipóteses sobre T , a Proposição 5.1 nos garante que a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \frac{B(z)}{\sqrt[4]{z}} dz$$

possui uma única solução analítica B tal que $B(0) > 0$.

A partir deste ponto a demonstração é análoga à do Teorema 4.1. ■

5.2 O caso em que G tem mínimo degenerado

Trataremos aqui apenas o caso em que G é da forma $G(y) = by^4 + O(y^5)$ com $b > 0$. O tratamento do caso geral $G(y) = by^{2N} + O(y^{2N+1})$, com $N \geq 3$, parece-nos ser análogo, apenas envolvendo muito mais contas.

Lema 5.1 *Sejam $F(x) = ax^4 + O(x^5)$ com $a > 0$ e $G(y) = by^4 + O(y^5)$ com $b > 0$ analíticas em zero. Então a função período associada a (1) é da forma:*

$$T(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}(T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h)) \quad (39)$$

com T_1 e T_2 analíticas em zero e $T_1(0) > 0$.

Dem. Pelo Lema 3.2 e do Fato 5.1,

$$l'_F(h) = \frac{A_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{A_2(h)}{\sqrt[4]{h}} \text{ e } l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[4]{h}},$$

onde A_1, A_2, B_1 e B_2 são analíticas em zero e $A_1(0) > 0, B_1(0) > 0$. Logo, pela Proposição 2.1, temos

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz. \quad (40)$$

Sejam

$$A_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 h^n, \quad A_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h^n, \quad B_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 h^n \text{ e } B_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 h^n$$

as expansões em série de Taylor de A_1, A_2, B_1 , e B_2 em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Substituindo essas expansões em (40) e fazendo a mudança de variáveis $z = h \cos^2 \theta$, podemos usar a convergência uniforme das séries numa vizinhança de zero, podemos concluir de modo análogo ao da prova do Fato 3.2

que

$$T(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 \right) h^k + h \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) h^k \right. \\ \left. + \sqrt{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 \right) h^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right) h^k \right) \right], \quad (41)$$

onde

$$\frac{\tilde{I}_{i,j}^1}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta d\theta, \quad \frac{\tilde{I}_{i,j}^2}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta d\theta, \\ \frac{\tilde{I}_{i,j}^3}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta d\theta, \quad \frac{\tilde{I}_{i,j}^4}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta d\theta. \quad (42)$$

Logo,

$$T_1(h) = a_0^1 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} a_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) h^k \quad (43)$$

$$T_2(h) = \sum_{k=0}^{\infty} t_n^2 h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right) h^k \quad (44)$$

satisfazem a tese. ■

Proposição 5.2 *Seja $T(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}(T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h))$, onde T_1 e T_2 são funções analíticas em zero com $T_1(0) > 0$. Sejam também A_1 e A_2 funções analíticas em zero com $A_1(0) > 0$. Então a equação integral*

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz. \quad (45)$$

possui uma única solução analítica (B_1, B_2) tal que $B_1(0) > 0$.

Observação: Como nos resultados anteriores, tal unicidade significa que se B_1, B_2 são analíticas definidas em $[0, r)$ satisfazendo (45) e $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ são analíticas em $[0, \tilde{r})$ satisfazendo (45) então $B_k \equiv \tilde{B}_k$ em $[0, r) \cap [0, \tilde{r})$, $k = 1, 2$.

Dem. Seja $r > 0$ tal que para $h \in [0, r)$,

$$A_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 h^n, \quad A_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 h^n, \quad (46)$$

$$T_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n \quad \text{e} \quad T_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n. \quad (47)$$

Unicidade de solução:

Seja (B_1, B_2) solução de (45). Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$B_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 h^n, \quad B_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 h^n, \quad h \in [0, \epsilon).$$

Com operações análogas às usadas em (11) e (12) na prova do item (c) do Fato 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} T(h) &= \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \left[a_0 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} a_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) h^k \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[4]{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right) h^k \right) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

onde $\tilde{I}_{i,j}^1$, $\tilde{I}_{i,j}^2$, $\tilde{I}_{i,j}^3$ e $\tilde{I}_{i,j}^4$ são dados por (42), e usando o Lema 4.5 obtemos

$$\begin{cases} t_0^1 = a_0^1 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^1, \\ t_k^1 = \left(\sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} a_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) \text{ se } k \geq 1. \end{cases} \quad (49)$$

$$t_k^2 = \left(\sum_{i+j=k} a_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} a_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right), \quad k \geq 0. \quad (50)$$

Observando que $a_0^1 = A_1(0) \neq 0$ decorre que o sistema (49)-(50) é possível e determinado em $(b_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$.

Disto decorre a unicidade local de B_1 e B_2 , e a unicidade global decorre do princípio do prolongamento analítico.

Existência de solução:

Sejam $(b_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por (49) e (50).

Suponhamos sem perda de generalidade que $a_0^1 = A_1(0) = 1$.

Notemos que

$$\begin{aligned} b_n^1 &= \frac{t_n^1 - a_1^1 b_{n-1}^1 \tilde{I}_{1,n-1}^1 - \dots - a_n^1 b_0^1 \tilde{I}_{n,0}^1 - a_0^2 b_{n-1}^2 \tilde{I}_{0,n-1}^3 - \dots - a_{n-1}^2 b_0^2 \tilde{I}_{n-1,0}^3}{\tilde{I}_{0,n}^1}, \\ b_n^2 &= \frac{t_n^2 - a_1^1 b_{n-1}^2 \tilde{I}_{1,n-1}^2 - \dots - a_n^1 b_0^2 \tilde{I}_{n,0}^2 - a_1^2 b_{n-1}^1 \tilde{I}_{1,n-1}^4 - \dots - a_n^2 b_0^1 \tilde{I}_{n,0}^4}{\tilde{I}_{0,n}^2}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{i,j}^1 &= I_{i,j}(\gamma, \delta) = I_{i,j}(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}), & \tilde{I}_{i,j}^3 &= I_{i,j}(\alpha, \beta) = I_{i,j}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}), \\ \tilde{I}_{i,j}^2 &= I_{i,j}(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = I_{i,j}(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}), & \tilde{I}_{i,j}^4 &= I_{i,j}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = I_{i,j}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}),\end{aligned}$$

são dados por (42).

Já que as séries (46) e (47) convergem, existem reais a, τ, C com ≥ 1 tais que

$$|a_n^1| \leq C^n, |a_n^2| \leq aC^n, |t_n^1| \leq \tau C^n, |t_n^2| \leq \tau C^n.$$

Então, usando o item (a) do Fato 4.7 decorre que existem reais u, v, w, R com $R \geq C$ tais que

$$|b_n^1| \leq (u + vn)R^n \text{ e } |b_n^2| \leq (u + wn)R^n.$$

Isto prova a convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 z^n$ numa vizinhança de zero.

Claramente, $B_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 z^n$ e $B_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 z^n$ satisfazem as passagens em (48) e portanto resolvem (45) para $z \geq 0$ suficientemente pequeno. Também, $B_1(0) = b_0^1 > 0$. ■

Observação 5.2 Se $l(h) = \sqrt[4]{h}(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{G}_2(h))$ com $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ analíticas em zero tal que $\mathcal{G}_1(0) > 0$, e $L(y) = y\mathcal{G}_1(y^4) + y^3\mathcal{G}_2(y^4)$, segue do Lema 4.8 que dadas G analítica em zero da forma $G(y) = by^4 + O(y^5)$, $b > 0$ tal que $l_G = l$, e $\sigma(y) = y - \text{sgn}(y)l(G(y))$, tem-se $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^4$ numa vizinhança de zero.

Teorema 5.2 Seja $T(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}[T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h)]$ onde T_1 e T_2 são funções analíticas em zero $T_1(0) > 0$. Sejam também $F(x) = ax^4 + O(x^5)$ função analítica em zero, com $a > 0$, e $l_F(h) = F_+^{-1}(h) - F_-^{-1}(h)$, $h \in [0, \bar{h}]$.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Existe uma única $l(h) = \sqrt[4]{h}[\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)]$, com $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ analíticas em zero e $\mathcal{L}_1(0) > 0$, tal que, se G é analítica em zero e tem a forma $G(y) = by^4 + O(x^5)$, com $b > 0$, e satisfaz $l_G \equiv l$, então a origem de (1) é um centro com função período T .
- (ii) O conjunto das funções analíticas em zero da forma $G(y) = by^4 + O(x^5)$, com $b > 0$, que satisfazem $l_G = l$, está em correspondência biunívoca com o conjunto Σ das involuções estritas analíticas.

Mais concretamente, para cada $\sigma \in \Sigma$ a função correspondente G é dada por $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^4$ onde $L(y) = y\mathcal{L}_1(y^4) + y^3\mathcal{L}_2(y^4)$ com $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dadas em (i).

Dem.

(i) Pelo Lema 3.2

$$l'_F(h) = \frac{A_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{A_2(h)}{\sqrt[4]{h}} \text{ com } A_1 \text{ e } A_2 \text{ analíticas em zero e } A_1(0) > 0.$$

Pela Proposição 5.2 a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz, \quad (51)$$

possui uma única solução (B_1, B_2) analítica em zero com $B_1(0) > 0$.

Como em (32) na demonstração do Teorema 4.1, B_k , $k = 1, 2$, pode ser escrita de modo único como

$$B_k(h) = \frac{(2k-1)\mathcal{L}_k(h)}{4} + h\mathcal{L}'_k(h), \quad (52)$$

com $\mathcal{L}_k$ analítica em zero, e nesse caso, $\mathcal{L}_1(0) = 4B_1(0) > 0$.

Definamos $l(h) = \sqrt[4]{h}[\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)]$.

Seja G analítica em zero da forma $G(y) = by^4 + O(x^5)$ com $b > 0$, verificando $l_G = l$.

Considere o sistema (1) com função de Hamilton $H(x, y) = F(x) + G(y)$. É claro que H tem mínimo na origem e portanto a origem é um centro para (1), e como

$$\begin{aligned} l'_G(h) &= l'(h) \\ &= \frac{1}{4\sqrt[4]{h^3}}(\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)) + \sqrt[4]{h}(\mathcal{L}'_1(h) + \frac{1}{2\sqrt{h}}\mathcal{L}_2(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}'_2(h)) \\ &= \frac{\mathcal{L}_1(h) + 4h\mathcal{L}'_1(h)}{4\sqrt[4]{h^3}} + \frac{3\mathcal{L}_2(h) + 4h\mathcal{L}'_2(h)}{4\sqrt[4]{h}} = \frac{B_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[4]{h}}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \int_0^h l'_F(h-z)l'_G(z)dz &= \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz \\ &= T(h), \end{aligned}$$

donde o centro do sistema tem função período $T(h)$.

Isto mostra a existência de l com as propriedades requeridas em (i).

Suponhamos que exista $l_1(h) = \sqrt[4]{h}[\bar{\mathcal{L}}_1(h) + \sqrt{h}\bar{\mathcal{L}}_2(h)]$, $\bar{\mathcal{L}}_1$ e $\bar{\mathcal{L}}_2$ analíticas com $\bar{\mathcal{L}}_1(0) > 0$, tal que para toda G analítica da forma $G(y) = by^4 + O(x^5)$ com $b > 0$ satisfazendo $l_G(h) = l_1(h)$, a origem de (1) seja um centro de período T .

Então, com cálculos análogos a (53) obtemos

$$l'_G(h) = l'_1(h) = \frac{\bar{\mathcal{L}}_1(h) + 4h\bar{\mathcal{L}}'_1(h)}{4\sqrt[4]{h^3}} + \frac{3\bar{\mathcal{L}}_2(h) + 4h\bar{\mathcal{L}}'_2(h)}{4\sqrt[4]{h}} = \frac{\bar{B}_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{\bar{B}_2(h)}{\sqrt[4]{h}},$$

$$\bar{B}_1(h) = \frac{1}{4}\bar{\mathcal{L}}_1(h) + h\bar{\mathcal{L}}'_1(h) \text{ e } \bar{B}_2(h) = \frac{3}{4}\bar{\mathcal{L}}_2(h) + h\bar{\mathcal{L}}'_2(h). \quad (54)$$

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{A_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{A_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{\bar{B}_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{\bar{B}_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz,$$

e da unicidade de solução de (51) segue que $\bar{B}_1 \equiv B_1$ e $\bar{B}_2 \equiv B_2$ numa vizinhança de zero.

Agora, da unicidade de representação de B_k na forma dada em (52) segue que $\bar{\mathcal{L}}_1 \equiv \mathcal{L}_1$ e $\bar{\mathcal{L}}_2 \equiv \mathcal{L}_2$ numa vizinhança da origem. A unicidade global segue então do princípio do prolongamento analítico [3], [5] e portanto, $l_1 \equiv l$.

(ii) Seja $l(h) = \sqrt[4]{h}[\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)]$ dada pelo item (i). Seja σ uma involução estrita analítica. A Observação 5.2 garante que existe uma única função G analítica em zero, $G(y) = by^4 + O(y^5)$ com $b > 0$ tal que

$$l_G(h) = G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h) = l(h) \text{ e } \sigma(y) = y - \operatorname{sgn}(y)l(G(y)).$$

Pela Observação 5.2, $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^4$.

Por outro lado, dada $G(y) = by^4 + O(y^5)$ com $b > 0$ função analítica em zero tal que $l_G = l$, segue da Observação 5.1 que $\sigma(y) = y - \operatorname{sgn}(y)l(G(y))$ é uma involução estrita analítica.

Novamente pela Observação 5.2, $G(y) = [L^{-1}(y - \sigma(y))]^4$. ■

Observação 5.3 Se $T, (B_1, B_2)$ satisfazem a igualdade (55) apresentada na próxima proposição, então $\alpha T, (\sqrt{\alpha}B_1, \sqrt{\alpha}B_2)$ também a satisfazem, qualquer que seja $\alpha > 0$.

Proposição 5.3 Seja $T(h) = \frac{1}{\sqrt[4]{h}}(T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h))$, onde T_1, T_2 são funções analíticas em zero com $T_1(0) > 0$. Então a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{B_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{B_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz. \quad (55)$$

tem uma única solução analítica (B_1, B_2) tal que $B_1(0) > 0$.

Observação: A unicidade no enunciado anterior tem o significado já mencionado antes em várias oportunidades.

Dem. Seja $R > 0$ tal que $T_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n$ e $T_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n$ em $[0, R)$.

Unicidade de solução

Suponhamos que $B_1(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 h^n$ e $B_2(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 h^n$, $h \in [0, \epsilon)$, seja solução de (55).

Com operações análogas às usadas em (11) e (12) na prova do item (c) do Fato 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} T(h) = & \frac{1}{\sqrt{h}} \left[b_0^1 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} b_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) h^k \right. \\ & \left. + \sqrt{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} b_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right) h^k \right) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

onde $\tilde{I}_{i,j}^1, \tilde{I}_{i,j}^2, \tilde{I}_{i,j}^3, \tilde{I}_{i,j}^4$ são dados por (42), e usando o Lema 4.5, obtemos

$$\begin{cases} t_0^1 = b_0^1 b_0^1 \tilde{I}_{0,0}^1 \\ t_k^1 = \left(\sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} b_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) \text{ se } k \geq 1. \end{cases} \quad (57)$$

$$t_k^2 = \left(\sum_{i+j=k} b_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right). \quad (58)$$

Como $t_0^1 = t_1(0) > 0$, segue de (57) que $b_0^1 = \left(\frac{t_0^1}{\tilde{I}_{0,0}^1} \right)^{\frac{1}{2}} > 0$. Com isto, o sistema (57)-(58) é possível e determinado em $(b_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, donde segue a unicidade local de B_1 e B_2 , e pelo princípio do prolongamento analítico segue a unicidade global.

Existência de solução

Sejam $(b_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas por (57) e (58).

Pela Observação 5.3, podemos supor sem perda de generalidade que $t_0^1 = \tilde{I}_{0,0}^1$ e portanto $b_0^1 = 1$.

Segundo o item (ii) do Fato 6.1 temos $\tilde{I}_{0,n}^1 \geq \frac{1}{n} \rho(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ e $\tilde{I}_{0,n}^2 \geq \frac{1}{n} \rho(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, para $n \geq 1$.

Como as séries $\sum_{n=0}^{\infty} t_n^1 h^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} t_n^2 h^n$ convergem numa vizinhança de zero, existe $C \geq 1$ tal que $|t_n^1| \leq \tilde{I}_{0,n}^1 C^n$ e $|t_n^2| \leq \frac{\tilde{I}_{0,n}^2}{8} C^{n+\frac{1}{2}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar por indução que $|b_k^1| \leq C^k$ e $|b_k^2| \leq \frac{C^{k+\frac{1}{2}}}{4}$, para todo $k \in \mathbb{N}$

Para $k = 0$, $|b_0^1| = 1 = C^0$ e $|b_0^2| \leq \frac{\tilde{I}_{0,0}^2}{16\tilde{I}_{0,0}^2} C^{\frac{1}{2}} < \frac{C^{\frac{1}{2}}}{4}$.

Para $k = 1$, usando os itens (ii) e (iv) do Fato 6.2 temos $\frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{\tilde{I}_{0,1}^1} \leq 2$ e $\frac{\tilde{I}_{1,0}^2}{\tilde{I}_{0,1}^2} \leq \frac{1}{3}$, portanto,

$$\begin{aligned} |b_1^1| &\leq \frac{|t_1^1|}{2\tilde{I}_{0,1}^1} + 2\frac{|b_0^2|^2 I_{0,0}^3}{2\tilde{I}_{0,1}^1} \leq \frac{\tilde{I}_{0,1}^1 C}{2\tilde{I}_{0,1}^1} + \frac{C}{8} \leq C, \\ |b_1^2| &\leq \frac{|t_1^2|}{2\tilde{I}_{0,1}^2} + \frac{2|b_0^2||b_1^1|\tilde{I}_{1,0}^2}{2\tilde{I}_{0,1}^2} \leq \frac{\tilde{I}_{0,1}^2 C^{1+\frac{1}{2}}}{16\tilde{I}_{0,1}^2} + \frac{C^{1+\frac{1}{2}}}{12} \leq \frac{C^{1+\frac{1}{2}}}{4}. \end{aligned}$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $k = 0, 1, \dots, n-1$, e provemos que ela é válida para $k = n$, onde $n \geq 2$.

Usando o item (iii) do Fato 6.2 e as igualdades $\tilde{I}_{i,j}^1 = \tilde{I}_{j,i}^1$ e $\tilde{I}_{i,j}^3 = \tilde{I}_{j,i}^3$ em (57), obtemos

$$\begin{aligned} |b_2^1| &\leq \frac{|t_2^1|}{2\tilde{I}_{0,2}^1} + \frac{2|b_1^1||b_1^1|\tilde{I}_{1,1}^1}{2\tilde{I}_{0,2}^1} + \frac{2|b_0^2||b_1^2|\tilde{I}_{0,1}^3}{2\tilde{I}_{0,2}^1} \leq C^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \right] < C^2 \\ |b_n^1| &\leq \frac{C^n}{2} + (n-1)C^n \frac{\tilde{I}_{1,n-1}^1}{2\tilde{I}_{0,n}^1} + \frac{(n-2)}{16} \frac{\tilde{I}_{1,n-2}^3}{2\tilde{I}_{0,n}^1} + \frac{C^n I_{0,n-1}^3}{16 I_{0,n}^1} \\ &\leq C^n \left[\frac{1}{2} + (n-1) \frac{1}{8(n-\frac{3}{4})} + \frac{(n-2)}{16} \frac{3}{8(n-\frac{3}{4})} + \frac{2}{16} \right] \leq C^n. \end{aligned}$$

Analogamente, usando o item (iv) do Fato 6.2 em (58) obtemos

$$\begin{aligned} |b_n^2| &\leq \frac{\tilde{I}_{0,n}^2 C^{n+\frac{1}{2}}}{16\tilde{I}_{0,n}^2} + (n-1) \frac{C^{n+\frac{1}{2}}}{4} + \frac{C^{n+\frac{1}{2}}}{4} \frac{1}{3} \\ &= \frac{C^{n+\frac{1}{2}}}{4} \left[\frac{1}{4} + (n-1) \frac{1}{4(n-\frac{1}{4})} + \frac{1}{3} \right] \leq \frac{C^{n+\frac{1}{2}}}{4} \frac{10}{12} < \frac{C^{n+\frac{1}{2}}}{4}. \end{aligned}$$

Isto prova a convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 z^n$ numa vizinhança de zero.

Claramente, $B_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 z^n$ e $B_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 z^n$ satisfazem as passagens feitas em (56) e portanto resolvem (55) para $z \geq 0$ suficientemente pequeno. Também, $B_1(0) = b_0^1 > 0$. $\blacksquare$

Teorema 5.3 Considere o sistema (1) com $f \equiv g$.

Seja $T(h) = \frac{1}{\sqrt[4]{h}}[T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h)]$, onde T_1 e T_2 são funções analíticas em zero satisfazendo $T_1(0) > 0$.

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Existe uma única $l(h) = \sqrt[4]{h}[\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)]$ com $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ analíticas em zero e $\mathcal{L}_1(0) > 0$ tal que se F e G são analíticas em zero, com a forma $F(u) = G(u) = au^4 + O(u^5)$ com $a > 0$ e satisfazem $l_F = l_G = l$, então a origem de (1) é um centro com função período T . Além disso se $T_2(0) > 0$ então $\mathcal{L}_2(0) > 0$.

(ii) O conjunto das funções analíticas em zero da forma $F(h) = ah^4 + O(h^5)$ com $a > 0$ que satisfazem $l_F = l$ está em correspondência biunívoca com o conjunto Σ das involuções estritas analíticas.

Mais concretamente, para cada $\sigma \in \Sigma$ a função correspondente F é dada por $F(x) = [L^{-1}(x - \sigma(x))]^4$ onde $L(x) = x\mathcal{L}_1(x^4) + x^3\mathcal{L}_2(x^4)$ com $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dadas em (i).

Dem.

(i) Pela Proposição 5.3 a equação integral

$$T(h) = \int_0^h \left(\frac{B_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{B_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz, \quad (59)$$

possui uma única solução (B_1, B_2) analítica em zero com $B_1(0) > 0$.

Como em (32) na demonstração do Teorema 4.1 (e como na demonstração do Teorema 5.2), conclui-se que $B_k, k = 1, 2$, pode ser escrita de modo único como

$$B_k(h) = \frac{(2k-1)\mathcal{L}_k(h)}{4} + h\mathcal{L}'_k(h), \quad (60)$$

com $\mathcal{L}_k$ analítica em zero e $k = 1, 2$ e $\mathcal{L}_1(0) = 4B_1(0) > 0$.

Também como na demonstração do Teorema 5.2 definimos

$$l(h) = \sqrt[4]{h}[\mathcal{L}_1(h) + \sqrt{h}\mathcal{L}_2(h)].$$

Sejam $F \equiv G$ analíticas em zero da forma $F(u) = G(u) = au^4 + O(u^5)$ com $a > 0$, verificando $l_F = l_G = l$.

Considere o sistema (1) com função de Hamilton $H(x, y) = F(x) + G(y)$. É claro que H tem mínimo na origem e portanto a origem é um centro para (1).

Também como na demonstração do Teorema 5.2 concluímos que

$$l'_F(h) = l'_G(h) = l'(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[4]{h}},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^h l'_F(h-z)l'_G(z)dz &= \int_0^h \left(\frac{B_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{B_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{B_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{B_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz \\ &= T(h), \end{aligned}$$

donde o centro do sistema tem função período $T(h)$.

Isto mostra a existência de l com as propriedades requeridas em (i).

Suponhamos que exista $l_1(h) = \sqrt[4]{h}[\bar{L}_1(h) + \sqrt{h}\bar{L}_2(h)]$, $\bar{L}_1$ e $\bar{L}_2$ analíticas com $\bar{L}_1(0) > 0$, tal que para todo par (F, G) de funções analíticas em zero e da forma $F(u) = G(u) = au^4 + O(u^5)$ com $a > 0$ satisfazendo $l_F(h) = l_G(h) = l_1(h)$, a origem de (1) seja um centro de período T . Então com cálculos análogos a (53) obtemos

$$l'_F(h) = l'_G(h) = \frac{\bar{L}_1(h) + 4h\bar{L}'_1(h)}{4\sqrt[4]{h^3}} + \frac{3\bar{L}_2(h) + 4h\bar{L}'_2(h)}{4\sqrt[4]{h}}.$$

e tomando $\bar{B}_1$ e $\bar{B}_2$ como em (54) segue que

$$\begin{aligned} T(h) &= \int_0^h l'_F(h-z)l'_G(z)dz \\ &= \int_0^h \left(\frac{\bar{B}_1(h-z)}{\sqrt[4]{(h-z)^3}} + \frac{\bar{B}_2(h-z)}{\sqrt[4]{h-z}} \right) \left(\frac{\bar{B}_1(z)}{\sqrt[4]{z^3}} + \frac{\bar{B}_2(z)}{\sqrt[4]{z}} \right) dz, \end{aligned}$$

e de modo análogo à demonstração do Teorema 5.2, da unicidade de solução de (59) e da unicidade de representação de B_k na forma dada em (60) decorrerá que $l_1 = l$.

(ii) A demonstração desta afirmação é exatamente igual à feita em (ii) no Teorema 5.2, bastando trocar G por F . ■

Corolário 5.1 *O sistema (1) não tem centro isócrono quando F e G são analíticas da forma $F(u) = G(u) = au^4 + O(u^5)$ com $a > 0$.*

Dem. Decorre imediatamente do Lema 5.1. ■

Corolário 5.2 *Seja T a função período de (1) quando F e G são analíticas em zero da forma $F(u) = G(u) = au^4 + O(u^5)$, com $a > 0$. Suponhamos que $\sqrt[4]{h}T(h)$ seja constante. Então $l_F(h) = l_G(h) = a\sqrt[4]{h}$ com $a > 0$.*

Dem. Pelo Lema 5.1

$$\sqrt{h}T(h) = T_1(h) + \sqrt{h}T_2(h)$$

com T_1 e T_2 analíticas em zero e $T_1(0) > 0$. Sendo assim, se $\sqrt{h}T(h)$ é constante então $T_1(h) \equiv T_1(0) > 0$ e $T_2(h) \equiv 0$.

Pelo Fato 5.1,

$$l_F(h) = l_G(h) = \sqrt[4]{h} \left(\mathcal{G}_1(h) + \sqrt{h} \mathcal{G}_2(h) \right), \text{ com } \mathcal{G}_1(0) = \frac{2}{\sqrt[4]{a}} > 0, \quad (61)$$

e $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ analíticas em zero. Além disso, $l'_F(h) = l'_G(h) = \frac{B_1(h)}{\sqrt[4]{h^3}} + \frac{B_2(h)}{\sqrt[4]{h}}$, onde B_1 e B_2 são analíticas em zero, com $B_1(0) > 0$, dadas por

$$B_k(h) = \frac{(2k-1)\mathcal{G}_k(h)}{4} + h\mathcal{G}'_k(h), k = 1, 2. \quad (62)$$

Como B_k e $\mathcal{G}_k$ são analíticas em zero, sejam $B_k(h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^k h^n$ e $\mathcal{G}_k(h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k h^n$.

Por (57) e (58) temos

$$\begin{aligned} 0 &< T_1(0) = T_1(h) \\ &= (b_0^1)^2 \tilde{I}_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^1 + \sum_{i+j=k-1} b_i^2 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^3 \right) h^k \\ 0 &= T_2(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} b_i^2 b_j^1 \tilde{I}_{i,j}^4 + \sum_{i+j=k} b_i^1 b_j^2 \tilde{I}_{i,j}^2 \right) h^k \end{aligned}$$

Concluimos com isso que $b_0^1 = \left(\frac{T_1(0)}{I_{0,0}^1} \right)^{\frac{1}{2}}$, $b_n^1 = 0, \forall n \geq 1$ e $b_n^2 = 0, \forall n \geq 1$.

Logo, $B_1(h) = b_0^1 = \left(\frac{T_1(0)}{I_{0,0}^1} \right)^{\frac{1}{2}}$ e $B_2(h) = 0$; disto e de (62) ter unicidade de solução decorre imediatamente que $\mathcal{G}_1(h) = a > 0$ e $\mathcal{G}_2(h) = 0$, e portanto voltando a (61) obtemos $l_F(h) = l_G(h) = a \sqrt[4]{h}, a > 0$. ■

6 Apêndice

Neste apêndice estão alguns resultados que foram usados na demonstração de diversas proposições deste trabalho. Omitiremos a demonstração de quase todos eles por serem bastante simples. Algumas fórmulas e relações da função Γ podem ser encontradas em [2], [7].

Definição 6.1 Para $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, e $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{i,j}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(i+\alpha)\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(i+j+\alpha+\beta)}.$$

Nota: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Definição 6.2 Para $N \in \mathbb{N}^*$, $q = 1, 2, \dots, N$, e $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{i,j}^q = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} t \cos^{2j - \frac{N-2q+1}{N}} t dt = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(j+\frac{2q-1}{2N})}{\Gamma(i+j+\frac{N+2q-1}{2N})}.$$

Definição 6.3 Para $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{i,j} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{2j} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{4})\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+j+\frac{3}{4})}, \\ \hat{I}_{i,j} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{2j} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{3}{4})\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+j+\frac{5}{4})}.\end{aligned}$$

Note que $\tilde{I}_{i,j} = I_{j,i}^1$ e $\hat{I}_{i,j} = I_{j,i}^2$, onde $I_{j,i}^q$ são dadas pela definição 6.2 com $N = 2$.

Definição 6.4 Para $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{i,j}^1 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{4})\Gamma(j+\frac{1}{4})}{\Gamma(i+j+\frac{1}{2})}, \\ \tilde{I}_{i,j}^2 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i-\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{4})\Gamma(j+\frac{3}{4})}{\Gamma(i+j+1)}, \\ \tilde{I}_{i,j}^3 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j+\frac{1}{2})} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{3}{4})\Gamma(j+\frac{3}{4})}{\Gamma(i+j+\frac{3}{2})}, \\ \tilde{I}_{i,j}^4 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(2i+\frac{1}{2})} \theta \cos^{(2j-\frac{1}{2})} \theta d\theta = \frac{\Gamma(i+\frac{3}{4})\Gamma(j+\frac{1}{4})}{\Gamma(i+j+1)}.\end{aligned}$$

Fato 6.1 Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$ e $0 < \delta < 1$ com $\gamma + \delta \leq \alpha + \beta$, e suponhamos que $\beta \leq \delta$ ou $\alpha + \beta = \gamma + \delta + 1$.

Sejam $\rho(\gamma, \delta) = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)}$ e

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \max \left\{ \frac{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+\delta)}{\delta\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta)}, \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+\delta)}{\gamma\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta)} \right\}.$$

Então

- (i) $I_{0,0}(\gamma, \delta) = \rho(\gamma, \delta)$.
- (ii) $I_{0,n}(\gamma, \delta) \geq \frac{1}{n}\rho(\gamma, \delta)$, $n \geq 1$.
- (iii) $\frac{I_{j,n-j}(\gamma, \delta)}{I_{0,n}(\gamma, \delta)} \leq \frac{\gamma}{(n-j)}$, $1 \leq j \leq n-1$.
- (iv) $\frac{I_{n,0}(\gamma, \delta)}{I_{0,n}(\gamma, \delta)} \leq \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.
- (v) $\frac{I_{1,n-1}(\alpha, \beta)}{I_{0,n}(\gamma, \delta)} \leq \xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, se $j = 1 \leq n-1$.

- (vi) $\frac{I_{j,n-j}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \frac{1}{(n-j)},$ se $2 \leq j \leq n-1$.
- (vii) $\frac{I_{n,0}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)n,$ se $0 < \gamma < 1, 0 < \delta < 1$ e $n \geq 1$.
- (viii) $\frac{I_{1,n-2}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$ se $j = 1 \leq n-2$.
- (ix) $\frac{I_{n-j-1}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \frac{1}{(n-j-1)},$ se $2 \leq j \leq n-2$.
- (x) $\frac{I_{n-1,0}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)n,$ se $n \geq 2$.
- (xi) $\frac{I_{1,0}(\alpha,\beta)}{I_{0,1}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta).$
- (xii) $\frac{I_{0,n}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$ se $n \geq 2$.
- (xiii) $\frac{I_{0,n-1}(\alpha,\beta)}{I_{0,n}(\gamma,\delta)} \leq \xi(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$ se $n \geq 2$.

Fato 6.2

- (i) $\frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{\tilde{I}_{0,0}^1} \leq 1.$
- (ii) $\frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{\tilde{I}_{0,1}^1} = \frac{4|\Gamma(\frac{3}{4})|^2}{|\Gamma(\frac{1}{4})|^2} = 2 \frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{\tilde{I}_{0,0}^1} \leq 2.$
- (iii) Temos
- (a) $\frac{\tilde{I}_{1,n-1}^1}{\tilde{I}_{1,n-1}^1} \leq 1$ para $1 \leq j \leq n-1$ (b) $\frac{\tilde{I}_{0,n-1}^3}{\tilde{I}_{0,n}^1} \leq 2$ para $n \geq 2$.
- (c) $\frac{\tilde{I}_{0,n-1}^1}{\tilde{I}_{0,n}^1} \leq \frac{1}{4(n-\frac{3}{4})}$ para $n \geq 1$. (d) $\frac{\tilde{I}_{1,n-2}^3}{\tilde{I}_{0,n}^1} < \frac{3}{4(n-\frac{3}{4})}$ para $n \geq 3$.
- (e) $\frac{\tilde{I}_{1,n-1-i}^3}{\tilde{I}_{1,n-2}^1} \leq 1$ para $n \geq 3$.
- (iv) Para $n \geq 1$, temos
- (a) $\frac{\tilde{I}_{n,0}^2}{\tilde{I}_{0,n}^2} \leq \frac{1}{3}.$ (b) $\frac{\tilde{I}_{1,n-1}^2}{\tilde{I}_{0,n}^2} = \frac{1}{4(n-\frac{1}{4})}.$
- Se $0 < j \leq n-1$ então
- (c) $\frac{\tilde{I}_{n-j-1}^2}{\tilde{I}_{1,n-1}^1} < 1.$

Dem. Faremos apenas a da afirmação (i), que é mais delicada.

$$(i) \frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta \cos^{\frac{1}{2}} \theta d\theta \leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{1}{2}} \theta)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\frac{1}{2}} \theta)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ = 1 \leq \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta = \frac{\tilde{I}_{0,0}^3}{2}.$$

Referências

- [1] Anna Cima, Armengol Gasull, and Francesc Mañosas. Period function for a class of Hamiltonian systems. *J. Differential Equations*, 168(1):180-199, 2000. Special issue in celebration of Jack K. Hale's 70th birthday, Part 1 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998).
- [2] Erwin Kreyszig. *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons Inc., New York, sixth edition, 1988.
- [3] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. Vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.
- [4] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [5] Walter Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999. Translated from the third English (1987) edition by Uwe Krieg.
- [6] Emivan Ferreira da Silva. *A função período para uma classe de sistemas hamiltonianos*. Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2002.
- [7] Murray R Spiegel. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. E.U.A. McGraw-Hill, Inc., São Paulo, 1974. Coleção Schaum, translated from the third English (1973) edition McGraw-Hill do Brasil Ltda.

RELATÓRIOS TÉCNICOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

2009

RT-MAP-0901 - Michael Forger and Bruno Learth Soares
"Local Symmetries in Gauge Theories in a Finite-Dimensional Setting"
Janeiro, 2009 - São Paulo - IME-USP - 23 pg.

RT-MAP-0902 - Ivan de Queiroz Barros
"On Equivalence and Reducibility of Generating Matrices of RK-Procedures"
Abril, 2009 - São Paulo - IME-USP - 17 pg.

RT-MAP-0903 - Garcia, S.R.L. & Silva, E.F. da
"A Função Período para uma Classe de Sistemas Hamiltonianos Analíticos"
Maio, 2009 - São Paulo - IME-USP - 39 pg.

RT-MAP-0904 - Julio Michael Stern
"The living Intelligent Universe"
Maio, 2009 - São Paulo - IME-USP - 52 pg.