Resolvendo Fisicamente

Ana Catarina P. Hellmeister
Maria Elisa E. L. Galvão
IME – USP

Introdução

O objetivo deste artigo é relatar nossa experiência trabalhando com professores de Matemática do Ensino Fundamental II da rede pública, envolvidos no Programa de Educação Continuada (PEC), um projeto conjunto da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e da Universidade de São Paulo – USP, além de nossa experiência em oficinas do Centro de Ensino de Matemática da USP.

A aceitação e envolvimento dos professores participantes e a decisão de aplicação do material concreto na sala de aula nos estimularam a divulgar mais amplamente o trabalho.

O objetivo das atividades propostas é, inicialmente, a modelagem, através de peças coloridas de cartolina, de expressões algébricas do primeiro e segundo graus. A seguir, usa-se esse material para modelar a resolução de equações do primeiro grau e fatoração de trinômios do segundo grau.

Uma observação deve sempre ser feita quando se trabalha com material concreto. O professor precisa estar atento quanto à necessidade dos alunos em usá-lo, pois, para aqueles que não necessitam de atividades com esse material para compreensão do processo algébrico, a insistência pode ser desmotivadora.

Material utilizado

Um conjunto de fichas de cartolina em duas cores (que representaremos aqui em branco e cinza) constituído por:

Quadrados pequenos (1×1) – que representarão a unidade: **1**. Os quadrados brancos representarão as unidades positivas e os cinza as unidades negativas.

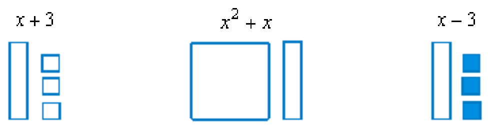
Retângulos – com um dos lados com a mesma medida **1** dos quadrados pequenos e o outro lado com uma medida qualquer, que não seja um múltiplo inteiro da unidade escolhida. Os retângulos brancos corresponderão à incógnita x e os cinza, ao seu oposto $-x$.

Quadrados grandes – cujos lados devem ter a mesma medida escolhida para o lado não unitário do retângulo anterior; também em duas cores, o branco representando x^2 e o cinza o seu oposto $-x^2$.

Para as atividades propostas neste artigo, é necessário que os alunos dominem as operações com números inteiros, de preferência com representação concreta de modo análogo ao aqui utilizado.

Atividade 1

Trabalhamos inicialmente com a modelagem para expressões algébricas, ou seja, vamos escolher o conjunto de peças que representará cada uma dessas expressões como nos exemplos a seguir.



Podemos efetuar **adição** $(-3x+4)+(2x^2+3x-5)$ observando que as peças de cores diferentes representam quantidades opostas e "se anulam" aos pares.

O resultado, portanto, será $2x^2-1$:

Para efetuar a **diferença** $(-3x+4)-(2x^2+3x-5)$, uma das formas de trabalhar pode ser somando a expressão oposta, ou seja, usando que

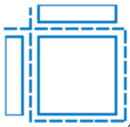
$$(-3x+4)-(2x^2+3x-5)=(-3x+4)+(-2x^2-3x+5)$$

e teremos $(-3x+4)-(2x^2+3x-5)=-2x^2-6x+9$:

Podemos também modelar as várias possibilidades para o **produto**, usando as representações:

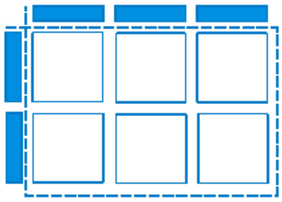
$1 \times x = x$

$x \times x = x^2$



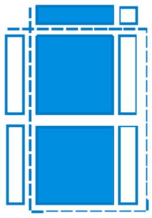
$(-x) \times 3x = -3x^2$

$(-2x) \times (-3x) = 6x^2$



$3 \times 3x = 9x$

$(2x) \times (-x+1) = -2x^2 + 2x$



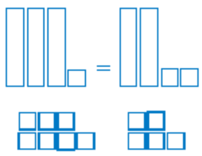
Atividade 2

Usando a propriedade *uma igualdade se mantém se efetuamos operações iguais em ambos os lados*, modelamos a solução de uma equação do 1º grau, como nos exemplos a seguir.

É importante que cada operação efetuada em ambos os lados da igualdade seja acompanhada de sua representação simbólica para que, após muitos exemplos, o estudante participante apreenda as propriedades usadas e se liberte do material concreto, passando a resolver as equações algebricamente. Vários professores que aplicaram a atividade em sala de aula relatam que, de fato, é isso que acontece.

Exemplo 1.

$3x + 1 = 2x + 2$



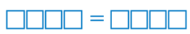
- Substituir cada tira branca por 2 quadradinhos brancos e verificar se existe igualdade. A negação significa que $x = 2$ não é a solução da equação.
- Voltando à representação original, retirar duas tiras brancas de cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo:

$3x + 1 - 2x = 2x + 2 - 2x$ ou

$x + 1 = 2$.

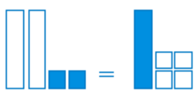
- Retirar um quadradinho branco de cada lado obtendo $x = 1$, que é a solução da equação.

- Voltar à configuração inicial e substituir cada tira branca por um quadradinho branco e verificar a igualdade.



Exemplo 2.

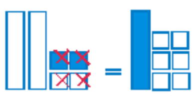
$2x - 2 = -x + 4$



- Acrescentar duas unidades positivas em cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo:

$2x - 2 + 2 = -x + 4 + 2$ ou

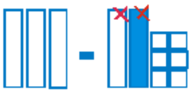
$2x = -x + 6$.



- Acrescentar uma tira branca em cada lado, obtendo:

$2x + x = -x + 6 + x$ ou $3x = 6$ ou

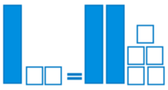
$x = 2$, que é então a solução.



· Voltar à configuração inicial e substituir cada tira branca (cinza) por dois quadradinhos brancos (cinza) e verificar a igualdade.

Exemplo 3.

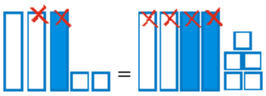
$2 - x = 5 - 2x$



· Acrescentar 2 tiras brancas em cada lado, obtendo:

$2 - x + 2x = 5 - 2x + 2x$ ou

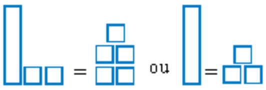
$2 + x = 5$.



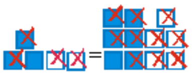
· Retirar 2 quadradinhos brancos de cada lado, obtendo:

$2 + x - 2 = 5 - 2$ ou

$x = 3$, que é a solução.



· Voltar à configuração inicial e substituir as tiras representando $-x$ por 3 quadradinhos cinza (por quê?) e verificar a igualdade.



Sugerimos ao leitor que resolva, modelando como nos exemplos, outras equações do 1º grau cujas soluções são números inteiros.

Atividade 3

Nesta atividade, observando um modelo físico, os participantes podem investigar a fatoração de um trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, com a, b e c inteiros cuja decomposição resulta em uma expressão do tipo $(ax + p)(x + q)$ com p e q inteiros. O objetivo é levar à percepção das propriedades que permitam fatorar tais expressões no nível simbólico.

Para realizar a atividade estabelecemos o seguinte:

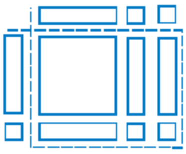
Um trinômio do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c$ *com* a, b *e* c

inteiros e $a > 0$ *pode ser fatorado se, e somente se, for possível formar um retângulo com as peças que o representam. As dimensões do retângulo formado representam os fatores do trinômio.*

Dessa forma, voltamos à estrutura do produto modelado nos exemplos 1, 2 e 3 da Atividade 1.

Por exemplo, os fatores de $x^2 + 3x + 2$ podem ser encontrados construindo-se um retângulo com uma peça que representa x^2, três peças que representam x e duas peças que representam as unidades positivas.

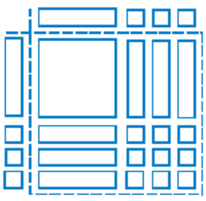
$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$



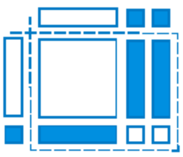
Vejamos mais alguns exemplos.

1. O trinômio $x^2 + 6x + 9$ pode ser fatorado construindo-se o quadrado ao lado. Observe que trinômios quadrados perfeitos podem sempre ser representados por peças que formam um quadrado. Logo,

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$



2. O trinômio $x^2 - 3x + 2$ pode ser fatorado construindo-se o retângulo:

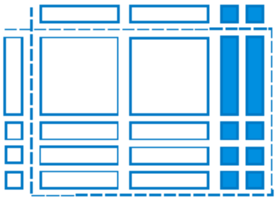


Logo, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

3. $2x^2 + 4x - 6 = (2x - 2)(x + 3)$

·

Neste exemplo, usamos, para formar o retângulo, a convenção de que peças de cores diferentes se “anulam”: $4x$ foi representado por $6x + (-2)$.



Depois de muitos exemplos, os alunos que participam da atividade devem estar aptos para responder à questão:

Se $ax^2 + bx + c = (ax + p)(x + q)$, quais as relações que existem entre os números p, q e c? E p, q e b?

Em seguida devem usar essas relações para fatorar algebricamente outros trinômios e estarão prontos para resolver equações do segundo grau usando a fatoração para recair em equações do primeiro grau.

Por exemplo, para resolver a equação $2x^2 + 4x - 6 = 0$ (exemplo 3) fazemos $2x^2 + 4x - 6 = (2x - 2)(x + 3) = 0$ e então $2x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$; logo, $x = 1$ ou $x = -3$.

Referências Bibliográficas:

[1] J. K. Bidwell. A physical model for factoring quadratic polynomials, *Math Teacher,* March, 1972.

[2] A. A. Gibb. More on physical models for factoring polynomials, *Math Teacher*, Feb, 1972.

[3] C. R. Hirsch. Finding factors physically, *Math Teacher*, May, 1982.

[4] B. Kinach. Solving linear equations physically, *Math Teacher*, September, 1985.