

29 NOV • 01 DEZ • 1995  
NOV 29th • DEC 1st • 1995

## XVI CILAMCE -

Congresso Ibero Latino Americano Sobre Métodos  
Computacionais para Engenharia

---

**29/NOV - 01/DEZ - 1995**

**Curitiba - PR - Brasil**

**Universidade Federal do Paraná**

**cpgMNE - Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia**

**CESEC - Centro de Estudos de Engenharia Civil Professor Inaldo Ayres Vieira**

**AMC - Associação Latino Americana para Métodos Computacionais em Engenharia**

**ANAIS**

**Volume II**

---

48  
089-1898  
08 01 96

SYSNO	0891898
PROD	000528

ACERVO EESC



29 NOV • 01 DEZ • 1995  
NOV 29th • DEC 1st • 1995

CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS  
COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA  
IBERIAN LATIN AMERICAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL  
METHODS FOR ENGINEERING

MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES APLICADOS À ANÁLISE DE ESTRUTURAS.

A.R.Balbo (\*), S.P.B.Proença (\*\*), M.N.Arenales (\*\*\*)

(\*)Depto.de Matemática, UNESP,C.P.473,17033-000, Bauru,SP

(\*\*)Depto.Estruturas,EESC/USP,C.P.359,13560-250, S.Carlos,SP

(\*\*\*)Depto.C.Comp.Estat.ICMSC/USP,C.P.668,13560-250,S.Carlos,SP

e-mail : persival@bruspsce.bitnet

SUMÁRIO

Neste trabalho, apresentam-se extensões de um algoritmo de pontos interiores que minimiza funções lineares com restrições no formato  $Ax \leq b$ , para problemas com restrições canalizadas ( $b^- \leq Ax \leq b^+$ ) e para a minimização de funções quadráticas com restrições de desigualdade e restrições canalizadas. Uma aplicação destes algoritmos é feita em exemplo de análise estrutural.

1 - INTRODUÇÃO

Métodos de pontos interiores têm sido objeto de muita atenção nos últimos anos na Otimização. Em geral, estes métodos, a partir de um ponto interior ao convexo formado pelo conjunto de restrições, definem uma trajetória de caminhamento para o vértice solução, com a característica de que os pontos da trajetória mantêm-se no interior do convexo. Os métodos se baseiam em transformações mudança de escala que equivalem a resolver o problema de direções de busca em elipsóides, os quais não favorecem nenhuma direção particular, além de projeções do gradiente escalado da função objetivo, no espaço de direções factíveis contido neste convexo.

Um trabalho, em especial, que anunciou bons resultados computacionais é devido a (Adler et al, 1986), o qual explorou a estrutura das restrições no formato  $Ax \leq b$ .

Neste trabalho, na seção 2, apresentamos o algoritmo básico que explora este tipo de restrições. Uma interessante interpretação geométrica das direções de busca deste método, encontrada em (Arenales e Balbo, 1991), permitiu prontamente a extensão do método para o caso de restrições canalizadas, objeto da seção 3.

Na seção 3, mostra-se que, a estratégia de resolução de um problema com restrições canalizadas é análoga àquela de problemas com restrições do tipo  $Ax \leq b$ . A diferença está na definição da matriz mudança de escala e no tamanho do passo a ser dado em determinada direção, definido pelas condições de fronteira do problema (já que agora limitantes inferiores e superiores devem ser considerados).

Na seção 4, exploraremos o caso de minimização de funções quadráticas com restrições de desigualdade e com restrições canalizadas. Algoritmos análogos a aqueles vistos nas seções 2 e 3 são então definidos. Este caso possui ampla aplicação em problemas de engenharia estrutural, fato que motivou o seu estudo.

Finalmente na seção 5, um estudo da eficiência destes algoritmos é apresentado através de exemplo que trata do comportamento não linear de uma estrutura decorrente da vinculação.

## 2 - O ALGORITMO DE ADLER/KARMAKAR/RESENDE/VEIGA

Nesta seção revemos o método encontrado em (Adler et al, 1986) seguindo um procedimento basicamente algébrico. A partir dele é que deduziremos os algoritmos a serem vistos nas seções seguintes. Este, também é conhecido por método "Dual-Afim".

Consideremos o programa linear na seguinte formatação:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a: } Ax \leq b \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $A \in R^{m \times n}$ , posto  $(A) = n$ . Introduzindo-se as variáveis de folga temos:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a: } Ax + Iz = b, z \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Seja  $\bar{x}$  um ponto interior, ou seja,  $A\bar{x} < b$ . Logo,  $\bar{z} = b - A\bar{x} > 0$ . Considere a matriz diagonal formada pelas variáveis de folga:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{z}_m \end{bmatrix}$$

Note que se redefinirmos as variáveis de folga por:

$$w = \bar{Z}^{-1} z$$

a solução  $\bar{z}$  é então transformada em  $e = (1, \dots, 1)^T$ . Esta mudança de variável é particularmente interessante pois  $\bar{z}_1$  próximo a zero é transformado em 1, ou seja, a solução factível  $(\bar{x}, \bar{z})$  é transformada em  $(\bar{x}, e)$ . Assim teremos o seguinte problema equivalente a (2):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a: } Ax + \bar{Z} w = b \\ & w \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.1- DETERMINAÇÃO DA DIREÇÃO:

Para melhorarmos a solução  $\bar{x}$ , o problema (3) terá papel central na determinação da direcção adotada. Para isto, introduziremos agora as direcções factíveis a serem adotadas, as quais denotamos por:

$$d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_w \end{bmatrix}$$

Note que uma direcção factível para o problema (3) deve pertencer ao núcleo de  $(A, \bar{z})$ , ou seja,

$$Ad_x + \bar{z} d_w = 0 \Rightarrow d_w = -\bar{z}^{-1} Ad_x. \quad (4)$$

Note de (4) que  $d_w$  a ser escolhida adiante deve pertencer ao espaço imagem de  $\{\bar{z}^{-1}A\}$ , caso contrário uma direcção infactível seria gerada.

Admitindo que  $d_w \in \text{Im}\{\bar{z}^{-1}A\}$ , podemos expressar  $d_x$  em função de  $d_w$  usando-se a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned} \bar{z}^{-1} Ad_x + d_w &= 0 \Rightarrow \\ A^T \bar{z}^{-1} (\bar{z}^{-1} Ad_x + d_w) &= 0 \Rightarrow \\ d_x &= -[A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1} A^T \bar{z}^{-1} d_w. \end{aligned} \quad (5)$$

Mostra-se facilmente que a matriz  $[A^T \bar{z}^{-1} A]$  é definida positiva, uma vez que  $\text{posto}(A) = n$ .

Para que  $d_x$  seja uma direcção de descida, isto é,

$$c^T (\bar{x} + \epsilon d_x) < c^T \bar{x},$$

devemos ter  $c^T d_x < 0$ .

Então

$$c^T d_x = -\{c^T [A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1} A^T \bar{z}^{-1}\} d_w = -\{\bar{z}^{-1} A [A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1} c\}^T d_w$$

tem o valor mais negativo quando:

$$d_w = \bar{z}^{-1} A [A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1} c \quad (6)$$

Note que (6) é uma escolha possível para  $d_w$  pois pertence ao espaço imagem de  $\{\bar{z}^{-1}A\}$ . Substituindo (6) em (5) obtemos:

$$d_x = -[A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1} c. \quad (7)$$

a qual é a direcção a ser usada.

## 2.2- DETERMINAÇÃO DO PASSO.

A nova solução a ser adotada é dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} d_x \\ d_z \end{bmatrix}$$

onde  $d_z = -Ad_x$  ( direcção factível para o problema (2) ).

Para preservarmos  $\bar{x} + \epsilon d_x$  no interior da região de factibilidade, devemos ter:

$$\bar{z} + \epsilon d_z > 0 \Rightarrow \epsilon < - \{ \bar{z}_1 / (d_z)_1 \} \text{ se } (d_z)_1 < 0.$$

Portanto calculamos o valor limite:

$$\alpha = \min \{ - \{ z_1 / (d_z)_1 \} \text{ se } (d_z)_1 < 0 \}$$

e uma heurística adotada para a escolha do passo é:  $\epsilon = 0.95 \alpha$ .  
 Caso  $d_z \geq 0$ , então o problema (1) não tem solução ótima finita, uma vez que  $d_x$  é direção de descida ( a matriz  $[A^T \bar{z}^{-2} A]^{-1}$  é definida positiva ) e  $\epsilon$  pode ser arbitrariamente grande.

### 2.3- ALGORITMO:

Após as considerações anteriores podemos enunciar o seguinte algoritmo:

Encontre  $x^0$  tal que  $Ax^0 < b$  e  $z^0 = b - Ax^0$ ,  $k = 0$ .

Enquanto { critério de parada não satisfeito } faça:

Calcule a direção:

$$d_x = - [A^T Z_k^{-2} A]^{-1} c, \text{ onde } Z_k = \text{diag}\{z_1^k, \dots, z_n^k\}$$

$$d_z = -Ad_x.$$

Calcule o passo:

$$\alpha = \min \left\{ - \frac{z_1^k}{(d_z)_1}, (d_z)_1 < 0 \right\}$$

$$\epsilon = 0.95 \alpha.$$

Atualize a solução:

$$x^{k+1} = x^k + \epsilon d_x$$

$$z^{k+1} = z^k + \epsilon d_z$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Um processo para determinar uma solução inicial  $x^0$  é discutido em Adler e outros; e um critério de parada utilizado foi:

"Se  $|c^T x^{k+1} - c^T x^k| / \max\{1, |c^T x^k|\} < \text{tol}$

então o processo iterativo é interrompido, onde tol é uma tolerância positiva e pequena escolhida a priori."

### OBSERVAÇÃO:

Em (Arenales e Balbo, 1991), este método foi deduzido a partir de uma motivação basicamente geométrica.

A direção  $d_x = - [A^T Z_k^{-2} A]^{-1}$  (ou múltipla desta) é obtida resolvendo-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T (\bar{x} + d_x) \\ & \text{sujeito a: } d_x^T [A^T \bar{z}^{-2} A] d_x \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $d_x^T [A^T \bar{z}^{-2} A] d_x \leq 1$ , define um elipsóide centrado em  $\bar{x}$ , inteiramente contido na região de factibilidade. Veja a figura:

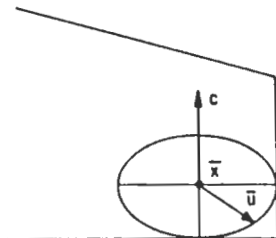


figura 2.1- Elipse centrada em  $\bar{x}$  inteiramente contida na região de factibilidade

### 3 - EXTENSÃO PARA RESTRIÇÕES CANALIZADAS

Na seção 2, um método de pontos interiores foi deduzido explorando-se a estrutura das restrições no formato  $Ax \leq b$ .

Aquele método, estendido para a estrutura de restrições canalizadas:  $b^- \leq Ax \leq b^+$ , foi também deduzido em (Arenales e Balbo, 1991) e será visto nesta seção,

Considere o programa linear com restrições canalizadas:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a: } b^- \leq Ax \leq b^+, \end{aligned}$$

com  $A \in R^{m \times n}$  e  $\text{posto}(A) = n$ .

Analogamente ao estudo anterior, a direção  $d_x$  pode ser obtida pela resolução do problema (8), onde  $\bar{z}$  agora é dado por:

$$\bar{z} = \text{diag} \{ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m \}$$

$$\bar{z}_i = \min \{ \bar{z}_i - b_i^-, b_i^+ - \bar{z}_i \}; \quad i = 1, \dots, m.$$

Assim, conforme (8), o elipsóide está inteiramente contido na região de factibilidade.

#### 3.1- TAMANHO DO PASSO

Para preservarmos  $\bar{x} + \epsilon d_x$  no interior da região de factibilidade, devemos ter  $\bar{z} + \epsilon d_z > 0$  e então  $\epsilon$  deve ser escolhido levando-se em conta limitantes inferiores e superiores do problema:

$$\alpha^1 = \min \{ - (z_i^- - b_i^-) / (d_z)_i, \text{ tal que } (d_z)_i < 0 \}.$$

$$\alpha^2 = \min \{ (b_i^+ - z_i^-) / (d_z)_i, \text{ tal que } (d_z)_i > 0 \}.$$

$$\epsilon = 0.95 \min \{ \alpha^1, \alpha^2 \}$$

### 3.2- ALGORITMO PARA RESTRIÇÕES CANALIZADAS:

Encontre  $x^0$  tal que  $b^- \leq Ax^0 \leq b^+$ ,  $z^0 = Ax^0$ ,  $k = 0$ .

Enquanto { critério de parada não satisfeito } faça:

Calcule a matriz  $\bar{Z}_k = \text{diag} \{ \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m \}$  onde

$$\bar{z}_i = \min \{ z_i^k - b_i^-, b_i^+ - z_i^k \}; i = 1, \dots, m.$$

Calcule a direção:

$$d_x = - [A^T \bar{Z}_k^{-2} A]^{-1} c$$

$$d_z = A d_x$$

Calcule o passo:

$$\alpha^1 = \min \{ - (z_i^k - b_i^-) / (d_z)_i, \text{ tal que } (d_z)_i < 0 \}.$$

$$\alpha^2 = \min \{ (b_i^+ - z_i^k) / (d_z)_i, \text{ tal que } (d_z)_i > 0 \}.$$

$$\epsilon = 0.95 \min \{ \alpha^1, \alpha^2 \}$$

Atualize a solução:

$$x^{k+1} = x^k + \epsilon d_x; \quad z^{k+1} = z^k + \epsilon d_z;$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

### 4- MÉTODO DUAL-AFIM PARA PROBLEMAS QUADRÁTICOS.

Nesta seção, pretendemos desenvolver o método dual-afim, explorando função objetivo quadrática e seguindo um procedimento análogo a aquele visto na seção 2. Veremos que a direção utilizada pelo método desenvolvido aqui é semelhante à direção utilizada pelo método dual-afim.

Vale observar que, funções objetivo quadráticas são frequentes em problemas de engenharia estrutural formulados via método da energia, por exemplo. Daí, a importância de estudar o método desta seção.

Considere o seguinte problema:

$$\text{minimizar } u(x) = 1/2 x^T Q x + c^T x$$

$$\text{sujeito a } Ax \leq b$$

onde  $Q$  é simétrica e definida positiva.

O problema acima é equivalente a:

$$\text{minimizar } u(x) = 1/2 x^T Q x + c^T x$$

$$\text{sujeito a } Ax + z = b, z \geq 0$$

Para este problema as condições de Karush-Kuhn-Tucker são:

$$\begin{aligned} Ax + z &= b, \quad z \geq 0 \\ A^T w &= Qx + c, \quad w \geq 0 \\ ZW &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $Z = \text{diag}(z_i)$  e  $W = \text{diag}(w_i)$ . Estas, serão importantes para se definir um critério de parada, a ser visto.

#### 4.1- A DIREÇÃO DE BUSCA.

Iniciando-se com uma solução interior  $\bar{x}$  e considerando-se a aproximação linear para a função objetivo em torno de  $\bar{x}$ ,

$$u(\bar{x} + d_x) = u(\bar{x}) + \nabla u(\bar{x})^T d_x,$$

uma direção de descida pode ser determinada resolvendo-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \nabla u(\bar{x})^T d_x \\ &\text{sujeito a } d_x^T [A^T \bar{Z}^{-2} A] d_x. \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\bar{z} = b - A\bar{x}$  e  $\bar{Z} = \text{diag}(\bar{z}_i)$ .

Note que, o problema (10) é um problema linear equivalente ao problema (8) da seção 2, sua solução então é dada por:

$$d_x = - [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} \nabla u(\bar{x}),$$

que explicitamente é:

$$d_x = - [A^T \bar{Z}^{-2} A]^{-1} (Q\bar{x} + c) \quad (11)$$

#### 4.2- NOVOS PONTOS.

Após determinada  $d_x$  em (11), numa iteração  $k$ :

$$\text{calcule } d_z = -Ad_x;$$

calcule  $w^k = \bar{z}_k^{-2} d_z$ . Esta definição de  $w^k$  (denominada estimador dual de (9)), encontrada em (Chandru e Kochar, 1986) serve para avaliar (9), definir  $W_k$  e nos será útil para a definição de um critério de parada.

Os novos pontos serão determinados por:

$$x^{k+1} = x^k + \epsilon d_x;$$

$$z^{k+1} = z^k + \epsilon d_z;$$

com  $\epsilon$  definido a seguir.

#### 4.3- TAMANHO DO PASSO.

Considerando-se  $0 < \alpha < 1$ , calcule:

$$\epsilon_1 = \alpha \min\{-z_1^k / (d_z)_1, \text{ tal que } (d_z)_1 < 0\};$$

$$\epsilon_2 = ( -(d_x)^T (Qx^k + c) / ( (d_x)^T Q d_x ) );$$

tome  $\epsilon = \min \{ \epsilon_1, \epsilon_2 \}$

#### 4.4- CRITÉRIO DE PARADA.

Um critério de parada semelhante a aquele encontrado em (Fang e Tsao, 1992) pode ser enunciado:

Se :

- i)  $\| z^k \| / \| b - Ax^k \| + 1 < \alpha_1$ ;
- ii)  $\| A^T w^k - Qx^k \| / \| c \| + 1 < \alpha_2$ ;
- iii)  $(z^k)^T w^k \leq \alpha_3$ ;

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são pequenas tolerâncias positivas, pode ser usado como critério de parada.

Seguindo-se estes procedimentos, um algoritmo análogo ao enunciado na seção 2 pode ser enunciado.

#### 4.5- EXTENÇÃO PARA RESTRIÇÕES CANALIZADAS.

Um método para se resolver o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } u(x) &= 1/2 x^T Qx + c^T x \\ \text{sujeito a } b^- &\leq Ax \leq b^+ \end{aligned}$$

onde  $Q$  é simétrica e definida positiva, pode ser enunciado explorando-se conjuntamente, todo o trabalho feito nas seções 2, 3 e 4, o que não faremos aqui.

#### 5- APLICAÇÃO EM UM EXEMPLO DE ANÁLISE ESTRUTURAL.

Uma das vantagens do algoritmo proposto para problemas quadráticos com restrições canalizadas é a resolução de problemas de análise do comportamento estrutural não-linear. Um exemplo consiste na não-linearidade introduzida pelas condições de vinculação, ou problemas de contato.

Neste ítem apresenta-se uma aplicação simples que consiste na análise estática de um pórtico plano (v.fig.5.1) sobre o qual impõe-se uma restrição ao deslocamento correspondente a um grau de liberdade.

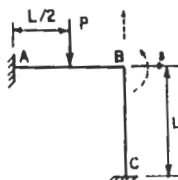


figura 5.1. Pórtico plano

Este problema pode ser colocado na seguinte forma:

$$\text{minimizar } 1/2 x^T Q x + c^T x$$

$$\text{sujeito a } b^- \leq Ax \leq b^+$$

onde:

- Q é a matriz de rigidez global do problema,  $Q \in R^{7 \times 7}$ ;
- c é o vetor de forças nodais equivalentes,  $c \in R^7$ ;
- x é o vetor de deslocamentos nodais,  $x \in R^7$ ;
- A  $\in R^{7 \times 7}$  é uma matriz de restrições para os deslocamentos;
- $b^-$ ,  $b^+$  são limitantes inferior e superior, respectivamente, para os deslocamentos,  $b^-$  e  $b^+ \in R^7$ .

As matrizes Q, A e os vetores c,  $b^-$  e  $b^+$  são dados a seguir:

$$c^T = (P/2, PL/8, 0, P/2, -PL/8, 0, 0);$$

$$(b^-)^T = (-1e5, -1e5, -1e5, -1e5, -PL/8, -1e5, -1e5);$$

$$(b^+)^T = (P/2, PL/8, 1e-5, P/2, 1e5, 1e-10, 1e-10);$$

A é a matriz identidade;

$$Q = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 6L & -12 & 6L \\ -12 & -6L & 0 & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 6L & -6L & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 0 & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Observe-se que a matriz Q foi montada desprezando-se as deformações axiais das barras e que neste primeiro caso a variável  $x_3$  tem deslocamento livre em sentido negativo.

Utilizando-se o método citado com a solução inicial

$$x^0 = (0, 0, -1, 0, 1, 0, 0)$$

a resposta obtida foi:

$$x_1 = 9.7599454369e-11$$

$$x_2 = 4.3399225830e-11$$

$$x_3 = -3.1250803943e-02$$

$$x_4 = 7.2916568051e-02$$

$$x_5 = 6.2500699306e-02$$

$$x_6 = -6.8468506686e-16$$

$$x_7 = 6.2678809136e-12$$

(12)

Acrescentando-se ao problema a restrição,  $-2e-2 \leq x_3 \leq 1e5$  e utilizando-se a solução inicial,

$$x^0 = (0, 0, -1e-3, 0, 1e-3, 0, 0),$$

a resposta encontrada foi:

$$\begin{aligned}x_1 &= 6.1697127633e-12 \\x_2 &= 2.5365751788e-12 \\x_3 &= -1.99999998843e-02 \\x_4 &= 5.4166661671e-02 \\x_5 &= 3.9999996993e-02 \\x_6 &= -1.5060760494e-18 \\x_7 &= 2.76091727447e-13\end{aligned}$$

Numa segunda situação, acrescentando-se ao problema a restrição,  $-3e-2 \leq x_3 \leq 1e5$  e utilizando-se a solução inicial,

$$x^0 = (0, 0, -1e-3, 0, 1e-3, 0, 0),$$

a resposta encontrada foi, naturalmente, mais próxima daquela obtida em (12), quando consideramos o deslocamento em  $x_3$  desimpedido.

## 7- CONCLUSÃO:

A extensão do algoritmo de pontos interiores com restrições canalizadas para o caso da minimização de funções quadráticas pode conduzir a bons resultados no campo da análise de estruturas. Em particular, a partir do exemplo estudado, o algoritmo apresenta-se como alternativa viável para o estudo do comportamento não-linear de estruturas devido à restrições limitantes de certos graus de liberdade.

## 6 - REFERÊNCIAS

- Adler, I., Karmarkar, N., Resende, M.G.C. and Veiga, G., 1986, (revised 1989), "An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming", Technical Report, University of California, Berkeley, USA.
- Arenales, M.N., Balbo A.R., 1991, "Métodos de pontos interiores com mudança de escala para Programação Linear", Dissertação de Mestrado, ICMSC, USP, São Carlos, Brasil.
- Chandru, V., Kochar, B., 1986, "Exploiting special structures using a variant of Karmarkar's algorithm", Research Memorandum 86-10, School of Industrial Engineering, Purdue University, W.Lafayette, Indiana, USA.
- Fang, S.C., Tsao, J.H.S., 1992, "An unconstrained convex programming approach to solving convex quadratic programming problems", OR Report 263, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA.
- Fancelló, E.A., Feijó, R.A., Zouain, N., 1990, "Formulação Variacional do Problema de Contato com Atrito: Resolução Via Regularização", Relat. de Pesquisa e Desenvolvimento, LNCC, Rio de Janeiro, Brasil.
- Weaver Jr.W., Gere, J.M., 1980, "Matrix Analysis of Framed Structures", 2nd.ed., D.Van Nostrand Co., pp.137-141.