

O universo construtível de Gödel

Leandro Fiorini Aurichi*

Orientadora: Professora Zara Issa Abud

24 de novembro de 2003

1 O que é um conjunto?

Quando trabalhamos em matemática, tudo o que fazemos está baseado em conjuntos. Alguns são “famosos”: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$. Outros, no nosso cotidiano, muitas vezes nem notamos que são conjuntos: por exemplo, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ela nada mais é do que o conjunto dos pares (x, y) , onde $y = f(x)$. Mas o que caracteriza um conjunto? Uma visão ingênua sobre isso poderia levar a algo como: “qualquer coleção de coisas é um conjunto”. E, em matemática, o que representa uma coleção é uma fórmula, isto é, uma coleção é dada pelas coisas que satisfazem uma dada fórmula. Por exemplo, a coleção dos números maiores que 0 é dada pela fórmula $x > 0$. Mas essa definição, embora simples, logo apresenta problemas. Se qualquer coleção é um conjunto, então a coleção de todos os conjuntos também é um conjunto. Vamos chamá-lo de V . Uma pergunta natural é se $V \in V$. Como V contém todos os conjuntos e V também é um conjunto, temos que $V \in V$. Ou seja, um conjunto pode pertencer a si mesmo. Daí, uma segunda pergunta natural seria, quais são os conjuntos que não pertencem a si mesmos, ou seja, qual é o conjunto dado pela fórmula $x \notin x$. Vamos chamar tal conjunto de S . Daí, poderíamos perguntar se $S \in S$. Mas se $S \in S$, temos que, pela definição de S , que $S \notin S$: contradição. Então só nos resta que $S \notin S$. Mas então, S é um conjunto que não contém a si mesmo, logo satisfaz a fórmula $x \notin x$, e portanto, pertence a S : contradição novamente. Assim, temos que uma definição simples como a acima, de que em matemática, qualquer coleção representa um conjunto, leva a uma contradição.

Para contornar este problema, ao invés de tentarmos definir o que é um conjunto, damos alguns axiomas que esperamos que um conjunto satisfaça, e daí, a qualquer coisa que satisfaça tais axiomas, daremos o nome de conjunto. Existem vários grupos de axiomas que normalmente são usados para descrever conjuntos. Um dos mais utilizados, e que adotaremos a seguir, é o grupo chamado “Axiomas de Zermelo-Fraenkel”, comumente chamado de ZF . Os axiomas são:

*Bolsista CNPq de iniciação científica de 08/2002 a 07/2003

do vazio	$\exists x \forall y (y \notin x)$
da extensionalidade	$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y))$
do par	$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall t (t \in z \rightarrow (t = x \vee t = y))))$
da união	$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge t \in w))$
da separação (esquema)	Dada $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos, o seguinte é um axioma: $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall u \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow (y \in u \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, y)))$
da substituição (esquema)	Dada $\varphi(u_1, \dots, u_n, x, y)$ uma fórmula da teoria dos conjuntos, então o seguinte é um axioma: $\forall u_1 \dots \forall u_n [\forall x \forall y \forall y' ((\varphi(u_1, \dots, u_n, x, y) \wedge \varphi(u_1, \dots, u_n, x, y')) \rightarrow y = y') \rightarrow \forall s \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x \in s \varphi(u_1, \dots, u_n, x, y))]$
das partes	$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \forall z (z \in t \rightarrow z \in x))$
do infinito	$\exists x [\exists y (y \in x \wedge \forall z (z \notin y) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \in y \vee t = y)))))]$
da regularidade	$\forall x (\exists z (z \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall y \in z y \notin x)))$

Com o último axioma, é possível mostrar que não existe um conjunto que contém a si mesmo, portanto, não existe o conjunto de todos os conjuntos (pois se existisse, ele deveria conter a si mesmo, pois ele próprio é um conjunto).

2 É possível dizer quem são todos os conjuntos?

Já vimos que não é possível que todos os conjuntos formem um conjunto. Mas podemos tentar representar tal coleção de conjuntos por uma fórmula (já vimos que nem sempre uma coleção dada por uma fórmula pode resultar num conjunto, assim, podemos tentar). Obviamente, a fórmula $x = x$ nos dá todos os conjuntos, mas também não nos dá mais qualquer outra informação sobre eles. Podemos então criar uma fórmula que nos dê algo mais. Por exemplo, partindo do conjunto $\emptyset$, podemos criar o conjunto $\{\emptyset\}$. E, a partir deste, podemos criar o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Note que “criamos” o primeiro conjunto em um passo e o segundo com dois passos. A idéia seria criar uma fórmula que, além de nos dar todos os conjuntos, também nos desse sua “complexidade”, isto é, o número de passos necessários para se criar tal conjunto.

Para isso, usaremos o seguinte resultado, que não demonstraremos aqui:

Teorema 1. *Seja $F : V^* \rightarrow V^*$ um termo de classe e $a \in V^*$. Então existe um único termo de classe $G : On \rightarrow V^*$ tal que:*

- (i) $G(0) = a$;
- (ii) $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$;
- (iii) $G(\delta) = \bigcup_{\alpha < \delta} G(\alpha)$, se δ é um ordinal limite.

Neste enunciado, V^* representa todos os conjuntos (pode ser representado pelos conjuntos que satisfazem a fórmula $x = x$) e On representa a classe dos ordinais¹. A expressão “ F é um termo de classe” informalmente quer dizer que F é uma “função” cujo domínio e imagem não são necessariamente conjuntos². Usaremos este resultado da seguinte forma: tomaremos $a = \emptyset$ e $F(x) = \wp(x)$ onde $\wp(x)$ é o conjunto das partes de x , ou seja, o conjunto que contém todos os subconjuntos de x . Assim construímos, para cada α ordinal, a seguinte coleção de conjuntos:

$$G(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha = 0 \\ \wp(G(\beta)) & \text{se } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta < \alpha} G(\beta) & \text{se } \alpha \text{ é ordinal limite} \end{cases}$$

onde “ α é um ordinal limite” quer dizer α não é da forma $\beta + 1$ para algum β ordinal.

Denotaremos por V_α cada $G(\alpha)$. Pode-se mostrar o seguinte resultado sobre os V_α :

Proposição 2. *Dados α e β ordinais, vale:*

1. V_α é transitivo, isto é, $\forall x \in V_\alpha (x \subset V_\alpha)$;
2. V_α é um conjunto;
3. se $\alpha < \beta$ então $V_\alpha \subset V_\beta$;
4. $\alpha \in V_\alpha$;

Com isso, pode-se mostrar que $V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ contém todos os conjuntos, ou seja, dado x um conjunto, existe α ordinal tal que $x \in V_\alpha$. E esse α representa a “complexidade” do conjunto x .

3 O Universo Construtível

No processo descrito, podemos nos perguntar se é possível “diminuir” a quantidade de conjuntos. Quer dizer, a cada passo da nossa construção de V , digamos que tenhamos V_α já construído. Então acrescentamos todos os conjuntos pertencentes à $\wp(V_\alpha)$, ou seja, *todos* os subconjuntos de V_α . Mas quem são esses subconjuntos? Existe uma maneira de identificar cada um deles? Por exemplo, dado um conjunto A , podemos identificar um subconjunto B de A como $B = \{a \in A : \varphi(a)\}$, onde φ é uma fórmula, como no axioma da separação. Ou seja, identificamos o subconjunto B como aquele formado pelos $a \in A$ que satisfazem a fórmula φ . Com essa idéia em mente, podemos nos fazer duas perguntas: a primeira seria “existem subconjuntos que não são dados por uma fórmula?”. E, em caso afirmativo, uma segunda pergunta seria “podemos ignorar esses conjuntos e simplesmente trabalhar com os dados por fórmulas?”. O que faremos a seguir é construir um universo “menor” que V , usando uma construção parecida com a anterior, mas com o diferencial de que só utilizaremos conjuntos definíveis por fórmulas. Tal universo, veremos, também satisfaz os axiomas de ZF , ou seja, poderíamos muito bem assumir que os conjuntos com os quais trabalhamos “vivem” neste universo. Veremos também que este universo é “menor” que o anterior, isto é, existem conjuntos no universo V que não estão neste novo.

¹Os ordinais são alguns conjuntos especiais que servem para ordenar coisas. Com eles, pode-se mostrar que podemos ordenar quantidades de qualquer tamanho (cardinalidade)

²Ou seja, eles são coleções de conjuntos, mas não necessariamente formam um conjunto

Antes de mostrarmos como construir tal universo, vamos a mais um comentário. Ao dizer que queremos admitir apenas subconjuntos definíveis por fórmulas, queremos admitir também subconjuntos definíveis por fórmulas com parâmetros dentro do conjunto. Por exemplo, vamos imaginar que o nosso conjunto seja $\mathbb{R}$ e queremos definir o subconjunto dos números reais positivos. Para isso, usamos a fórmula $x \geq 0$. Note que usamos um parâmetro pertencente ao conjunto, o elemento 0.

Vamos mostrar, de um jeito informal, como contruir o Universo Construtível, que denotaremos a partir de agora por L . Fazendo uma analogia com a construção de V , lá utilizamos o Teorema 1, com $\wp(x)$ sendo o termo de classe $F(x)$ do enunciado. Note que é esse F que dá quais são os novos subconjuntos a serem considerados. No nosso caso, precisamos apenas conseguir uma maneira de construir um termo de classe, (vamos chamá-lo de $Def(x)$) tal que, dado x , ele nos fornece o conjunto de todos os subconjuntos de x que podem ser definidos por fórmulas. Daí, nossa construção para L fica:

$$G(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha = 0 \\ Def(G(\beta)) & \text{se } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta < \alpha} G(\beta) & \text{se } \alpha \text{ é ordinal limite} \end{cases}$$

Denotamos por L_α cada $G(\alpha)$ e chamamos de L a classe $\bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$. Note que ainda não falamos como este termo de classe Def pode ser definido.

Vamos examinar o que precisamos para definir Def . Dado a um conjunto, temos que $Def(a)$ precisa ser o conjunto de todos os subconjuntos de a que podem ser definidos por fórmulas. Então, poderíamos tentar definir Def como algo parecido com $Def(a) = \{G(a, \varphi) : \varphi \in LTC\}$, onde $\varphi \in LTC$ indica “ φ é uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos” e $G(a, \varphi) = \{b \in a : \varphi(b)\}$. Um problema que temos aqui é que a linguagem da teoria dos conjuntos não consegue falar sobre “fórmulas”. Então não podemos escrever formalmente esta definição de Def . Mas podemos usar um pequeno truque: suponha que consigamos um método de associar, a cada fórmula φ , um número natural n indicado por $\ulcorner \varphi \urcorner$; assim, para definirmos Def , fazemos $Def(a) = \{G(a, n) : n \in \omega\}$, isto é, ao indicarmos $G(a, n)$, estamos nos referindo ao subconjunto de a dado pela fórmula φ tal que $n = \ulcorner \varphi \urcorner$, ou seja, $G(a, n) = \{b \in a : \varphi(b)\}$. Ainda fica faltando podermos incluir parâmetros a φ . Para isso, usaremos um outro truque. Note que, dado um conjunto a , os parâmetros que uma fórmula pode receber nada mais são do que subconjuntos finitos de a , por exemplo $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é a fórmula φ com parâmetros no conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset a$. Note também que não basta dar o conjunto dos parâmetros; também precisamos dar a ordem em que estes parâmetros são usados na fórmula. Basta notar que a fórmula $x < 10 \wedge x > 20$ é diferente da fórmula $x > 20 \wedge x < 10$ e a única coisa que fizemos foi inverter a ordem em que os parâmetros 10 e 20 ocorreram. Assim, o que precisamos é fixar uma seqüência finita de elementos de a . Uma seqüência finita é da forma $s : n \rightarrow a$ tal que, dado $m < n$, $s(m) \in a$. Seja $Seq(a)$ o conjunto de todas as seqüências finitas de a . Então, podemos definir Def da seguinte maneira: $Def(a) = \{G(a, n, s) : n \in \omega \wedge s \in Seq(a)\}$, onde, $G(a, n, s)$ é o subconjunto de a dado pela fórmula $\varphi(s(0), \dots, s(m), b)$ tal que $n = \ulcorner \varphi \urcorner$ e s é uma seqüência finita com domínio maior ou igual a m , ou seja, $G(a, n, s) = \{b \in a : \varphi(s(0), \dots, s(m), b)\}$. Veremos a seguir como contruir G .

Primeiramente, vamos mostrar como, dada uma fórmula φ , associar a ela um número $\ulcorner \varphi \urcorner$. Para isso, definimos uma função $F : \omega^2 \rightarrow \omega$ como $F(n, m) = (2n + 1) \cdot 2^m$. Note que essa

função é injetora. Vamos denotar por $[n, m]$ o número $F(n, m)$ e por $[n, m, k]$ o número $[n, [m, k]]$. Agora, dada uma fórmula φ associamos o número $\ulcorner \varphi \urcorner$ dado por:

$$\ulcorner \varphi \urcorner = \begin{cases} [0, i, j] & \text{se } \varphi \text{ é da forma } v_i = v_j; \\ [1, i, j] & \text{se } \varphi \text{ é da forma } v_i \in v_j; \\ [2, \ulcorner \psi_1 \urcorner, \ulcorner \psi_2 \urcorner] & \text{se } \varphi \text{ é da forma } \psi_1 \vee \psi_2; \\ [3, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner] & \text{se } \varphi \text{ é da forma } \neg \psi; \\ [4, i, \ulcorner \psi \urcorner] & \text{se } \varphi \text{ é da forma } \exists v_i \psi; \end{cases}$$

Para $f \in \text{Seq}(a)$, definimos também $f(c|i)$ como:

$$f(c|i)(j) = \begin{cases} f(j) & \text{se } j \in \text{dom}(f) \text{ e } j \neq i \\ c & \text{se } j \in \text{dom}(f) \text{ e } j = i \end{cases}$$

Observe que $f(c|i) \in \text{Seq}(a)$ e $\text{dom}(f(c|i)) = \text{dom}(f)$. Vamos agora definir um termo de classe $\text{Sat} : \omega \times V \rightarrow \omega$ tal que:

$$\text{Sat}(n, a) = \begin{cases} \{f \in \text{Seq}(a) : j, k \in \text{dom}(f) \wedge f(j) = f(k)\} & \text{se } n = [0, j, k]; \\ \{f \in \text{Seq}(a) : j, k \in \text{dom}(f) \wedge f(j) \in f(k)\} & \text{se } n = [1, j, k]; \\ \text{Sat}(j, a) \cup \text{Sat}(k, a) & \text{se } n = [2, j, k]; \\ \text{Seq}(a) \setminus \text{Sat}(j, a) & \text{se } n = [3, j, j]; \\ \{f \in \text{Seq}(a) : j \in \text{dom}(f) \wedge \exists x \in a (f(x|j) \in \text{Sat}(k, a))\} & \text{se } n = [4, j, k]; \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definimos também $Lv : \omega \rightarrow \wp(\omega)$ (que nos dá os índices das variáveis livres da fórmula cujo número é dado) como:

$$Lv(n) = \begin{cases} \{i, j\} & \text{se } n = [0, i, j] \text{ ou } n = [1, i, j]; \\ Lv(i) \cup Lv(j) & \text{se } n = [2, i, j]; \\ Lv(i) & \text{se } n = [3, i, i]; \\ Lv(j) \setminus \{i\} & \text{se } n = [4, i, j]; \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, definimos $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{G}(a, m, s) = \begin{cases} \{b \in a : s \cup \{(n, b)\} \in \text{Sat}(m, a)\} & \text{se } s \in \text{Seq}(a), m \in \omega \text{ e, se } n \text{ é minimal tal que} \\ & Lv(m) \subset n + 1, \text{ então } n = \text{dom}(s); \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso, teríamos o suficiente para provar o seguinte:

Proposição 3. *Seja $a \in V$, $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos tal que n é o maior índice de suas variáveis livres. Suponha $s \in \text{Seq}(a)$ com $\text{dom}(s) = n$. Seja $m = \ulcorner \varphi \urcorner$. Então $\mathcal{G}(a, m, s) = \{b \in a : a \models \varphi(s(0), \dots, s(n-1), b)\}$.*

4 Propriedades de L

Pode-se mostrar o seguinte resultado que não provaremos aqui:

Proposição 4. Para todo α e β ordinais, vale:

- $\alpha < \beta \Rightarrow L_\alpha \subset L_\beta$
- $\alpha < \beta \Rightarrow L_\alpha \in L_\beta$
- L_α é transitivo
- $L_\alpha \subset V_\alpha$
- $On \cap L_\alpha = \alpha$
- $\forall n \in \omega (L_n = V_n)$

Queremos mostrar que L satisfaz os axiomas de ZF . Antes de fazermos isso, vamos formalizar o conceito de uma classe satisfazer uma fórmula, com as seguintes definições:

Definição 5. Dada uma fórmula φ , e uma classe A , a **relativizada** de φ em relação à A , denotada por φ_A , é a fórmula:

- φ se φ é atômica;
- $\neg\psi_A$ se φ é da forma $\neg\psi$;
- $\psi_{1A} \vee \psi_{2A}$ se φ é da forma $\psi_1 \vee \psi_2$;
- $\forall v(v \in A \rightarrow \psi_A)$ se φ é da forma $\forall v \psi$;

Definição 6. Dizemos que uma classe A **satisfaz** uma sentença φ , e denotamos por $A \models \varphi$, se φ_A é verdadeira.

Note que $A \models \forall v \varphi$ se, e somente se, $\varphi(a)_A$ é verdadeira para todo $a \in A$. Também podemos mostrar que $A \models \exists v \varphi$ se, e somente se, existe $a \in A$ tal que $\varphi_A(a)$ é verdadeira.

Agora, para mostrarmos que L satisfaz ZF , ou seja, que dado φ axioma de ZF , $L \models \varphi$, a próxima proposição será bastante útil:

Proposição 7. Sejam $a, b \in L$. Então:

- (i) $\{a, b\} \in L$;
- (ii) $\bigcup a \in L$;
- (iii) $\wp(a) \cap L \in L$;

Demonstração. (i) Como $a, b \in L$, existe, pela proposição anterior, $\alpha \in On$ tal que $a, b \in L_\alpha$. Definimos $s : 2 \rightarrow L_\alpha$ tal que $s(0) = a$ e $s(1) = b$. Assim, $\{a, b\} = \{v_2 \in L_\alpha : v_2 = a \vee v_2 = b\} = \mathcal{G}(L_\alpha, \ulcorner v_2 = v_0 \vee v_2 = v_1 \urcorner, s) \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$. Logo, $\{a, b\} \in L$.

(ii) Seja α tal que $a \in L_\alpha$, e considere o seguinte conjunto $A = \mathcal{G}(a, \ulcorner \exists v_2 \in v_0(v_1 \in v_2) \urcorner, s)$, onde $s : 1 \rightarrow L_\alpha$ com $s(0) = a$. Então A é o conjunto $\{b \in a : \exists v_2 \in a(b \in v_2)\}$. Pela definição de A temos que $A \in \text{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ e, portanto, $A \in L$. Vamos agora provar que $\bigcup a = A$.

Seja $b \in \bigcup a$. Então existe $c \in a$ tal que $b \in c$. Mas note que temos que L_α é transitivo, portanto, $c \in L_\alpha$. Assim, vale que existe $c \in L$ tal que $b \in c \wedge c \in a$. Logo $L \models \exists v_2 \in a(b \in v_2)$, e $b \in A$, ou seja, $\bigcup a \subset A$.

Agora seja $b \in A$. Então $L \models \exists v_2 \in a(b \in v_2)$. Mas então existe $d \in L$ tal que $L \models d \in a \wedge b \in d$. Consequentemente $d \in a$ e $b \in d$ e portanto $b \in \bigcup a$. Assim, $A \subset \bigcup a$.

(iii) Temos que $a \in L$. Definimos $f : \wp(a) \rightarrow On$ tal que $f(b) = \text{"o menor ordinal } \alpha \text{ tal que } b \in L_\alpha$, caso exista algum, ou $\emptyset$ caso contrário". Pelo axioma da substituição, que sabemos valer em V , temos que a imagem de f é um conjunto ($Im(f)$). Logo, existe β ordinal tal que $\forall \alpha \in Im(f) (\alpha < \beta)$. Assim, temos que L_β contém todos os elementos de $\wp(a) \cap L$, isto é, $\wp(a) \cap L \subset L_\beta$. Note também que $a \in L_\beta$. Considere agora o conjunto $A = \{b \in L_\beta : \forall v_2 \in b(v_2 \in a)\} = \mathcal{G}(L_\beta, \ulcorner \forall v_2 \in v_1(v_2 \in v_0) \urcorner, s)$, onde $s \in Seq(L_\beta)$ e $s(0) = a$. Basta mostrarmos que $A = \wp(a) \cap L$. Esta demonstração é análoga à do item (ii). $\square$

Corolário 8. L satisfaz os axiomas da extensionalidade, do vazio, do par, da união e das partes.

A seguinte propriedade, que apresentaremos sem demonstração, é útil para provar os dois resultados seguintes:

Teorema 9. Seja $W : On \rightarrow V$ um termo de classe satisfazendo (i) $\forall \alpha < \beta (W(\alpha) \subset W(\beta))$; (ii) $W(\delta) = \bigcup_{\alpha < \delta} W(\alpha)$ para δ ordinal limite.

Então, dada uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ sem parâmetros, vale que, para qualquer $\alpha \in On$, existe um ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que, para qualquer $a_1, \dots, a_n \in W(\beta)$, temos

$$W \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow W_\beta \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Note que L satisfaz as condições para W do enunciado. Com isso, podemos provar os seguintes resultados:

Lema 10. L satisfaz o axioma da separação.

Lema 11. L satisfaz o axioma da substituição.

Lema 12. L satisfaz o axioma da regularidade.

Demonstração. Seja $a \in L$. Temos que existe $b \in V$ tal que $b \in a \wedge b \cap a = \emptyset$, já que V satisfaz o axioma da regularidade. Então, como L é transitivo, temos que $b \in L$, assim, $L \models b \in a \wedge b \cap a = \emptyset$. Portanto, L satisfaz o axioma da regularidade. $\square$

Com isso, concluímos o seguinte resultado:

Teorema 13. L satisfaz ZF.

5 Outros resultados

Aqui enunciaremos, sem demonstração, outros resultados para L . Mas antes, vamos a algumas definições:

Definição 14. Dadas duas classes U_1, U_2 , tais que $U_1 \subset U_2$, e dada $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos, dizemos que φ é:

- **absoluta** entre U_1 e U_2 se, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in U_1$, $U_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow U_2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.
- **preservada acima** de U_1 para U_2 se, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in U_1$, $U_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow U_2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.
- **preservada abaixo** de U_1 para U_2 se para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in U_1$, $U_2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow U_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Definição 15. Chamamos de **axioma** $(V = L)$ a fórmula $\forall x \exists \alpha (\alpha \in On \wedge x \in L_\alpha)$.

Lema 16. A fórmula $x = L_\alpha$ é equivalente a uma fórmula absoluta entre L e V .

Proposição 17. $L \models (V = L)$

Uma observação importante aqui é que apesar de parecer “óbvio” que $L \models (V = L)$, já que $V = L$ quer dizer que “todo mundo pertence a L ”, há um certo cuidado a ser tomado. Precisamos provar que $(V = L)_L$, isto é, precisamos provar que $V = L$ relativizado a L é verdadeiro, ou seja, que, ao repetirmos a definição de L dentro de L , não vamos encontrar uma nova classe L' tal que $L' \neq L$. Para isso, usa-se, entre outras coisas, o Lema 16.

Teorema 18. Se ZF é consistente, então $ZF + (V = L)$ também é.

Teorema 19. Seja W uma classe transitiva tal que $W \models ZF$ e que $On \subset W$. Então $L \subset W$.

Para esse resultado, usa-se, basicamente, absolutividade de $x = L_\alpha$ entre classe transitivas.

Definição 20. Chamamos de **Axioma da Escolha** e denotamos por AE a sentença que diz “todo conjunto admite uma boa ordem”, onde boa ordem é uma ordem em que qualquer subconjunto admite menor elemento.

A idéia para se provar o resultado de que, em L , todo conjunto pode ser bem ordenado, é a seguinte: suponha que já definimos uma boa ordem para todos os L_β tais que $\beta \in \alpha$ e agora queremos estender essa ordem para L_α , ou seja, dados $x, y \in L_\alpha$, $x \neq y$, precisamos dizer qual dos dois é menor. Podemos dividir em três casos:

- $x, y \in L_\beta$ para algum $\beta \in \alpha$. Então eles já estavam na ordem previamente definida e usamos essa mesmo para decidir quem é o maior (do jeito que estava, é o jeito que fica).
- $x \in L_\beta$ para algum $\beta \in \alpha$ e $y \notin L_\beta$ para todo $\beta \in \alpha$. Então dizemos que y é maior que x (qualquer conjunto novo é maior que todos os antigos).

- $x, y \notin L_\beta$ para todo $\beta \in L_\alpha$. Então os dois conjuntos são novos e portanto, foram definidos a partir de velhos por fórmulas. Assim, diremos que o que é definido por uma fórmula de número maior, é o maior dos dois. Se as fórmulas tiverem mesmo número, então os parâmetros utilizados foram diferentes. Mas note que esses parâmetros são conjuntos “velhos”, assim, já estão ordenados. Sejam s_x e s_y as seqüências finitas que definem x e y . Daí, se $s_x(0) \neq s_y(0)$, o maior define seu correspondente como o maior. Se não, passamos para o próximo, ou seja $s_x(1), s_y(1)$ e assim por diante, até encontrarmos um índice que eles sejam diferentes, ou o domínio de uma das seqüências finitas “acabar” (daí diremos que a que o domínio não acabou é o maior).

Teorema 21. $ZF + (V = L) \vdash AE$, isto é, em L , todo conjunto pode ser bem ordenado.

Demonstração. Primeiramente, queremos definir um termo de classe $H : V \rightarrow V$ tal que dado $(a, R) \in V$ tal que R é uma boa ordem para a , então $H((a, R)) = (\omega \times Seq(0), R')$, onde R' é uma boa ordem para $\omega \times Seq(a)$.

Definimos então $H(x) = y$, da seguinte forma: $H(x) = y$ se, e somente se $(x$ não é da forma descrita acima e $y = \emptyset)$ ou $(x$ é daquela forma, y é um par ordenado, cuja primeira coordenada é $\omega \times Seq(a)$ e a segunda é R' , onde $R' \subset (\omega \times Seq(a))^2$ e satisfaz “ $\forall n, n' \in \omega \forall s, s' \in Seq(a) ((n, s), (n', s')) \in R'$ se, e somente se $(n < n')$, ou $(n = n'$ e $dom(s) < dom(s'))$ ou $(n = n, dom(s) = dom(s') = k$ e $\exists j < k$ tal que $\forall l < j$ $s(l) = s'(l)$ e $(s(j), s'(j)) \in R)$ ”).

Agora, é fácil provar que $ZF \vdash \forall x \exists! y (H(x) = y)$ e $ZF \vdash \forall x \forall a \forall R ((x = (a, R) \wedge R \text{ bem ordena } a) \rightarrow \exists b, R' (y = (b, R') \wedge b = \omega \times Seq(a) \wedge R' \text{ bem ordena } b))$.

Definimos então $J : On \rightarrow V$ tal que $J(\emptyset) = \emptyset$, $J(\alpha + 1) =$ “a única relação binária S em $L_{\alpha+1}$ que satisfaz $\forall x, y \in L_{\alpha+1}$: (a) se $x \in L_\alpha$ e $y \notin L_\alpha$ então $(x, y) \in S$; (b) se $x, y \in L_\alpha$ então $(x, y) \in S$ se, e somente se, $(x, y) \in J(\alpha)$; (c) se $x, y \notin L_\alpha$ e $H((L_\alpha, J(\alpha))) = (\omega \times Seq(L_\alpha), R)$ e $(m, s) \in \omega \times Seq(L_\alpha)$ é R -minimal tal que $\mathcal{G}(L_\alpha, m, s) = x$ e $(m', s') \in \omega \times Seq(L_\alpha)$ é R -minimal tal que $\mathcal{G}(L_\alpha, m', s') = y$, então $(x, y) \in S$ se, e somente se, $((m, s), (m', s')) \in R$. Para δ ordinal limite, definimos $J(\delta) = \bigcup_{\alpha < \delta} J(\alpha)$.

Pode-se mostrar que $J(\alpha)$ é uma boa ordem para L_α para todo ordinal α . Assim, a fórmula $\Phi(x, y)$ dada por $\exists \alpha \in On (x, y) \in J(\alpha)$ é uma boa ordem para L . Em particular, dado um conjunto $a \in L$, temos que $\{(x, y) \in a \times a : \Phi(x, y)\}$ é uma boa ordem para a . $\square$

Teorema 22. Se ZF é consistente, então $ZF + AE$ (ZFC) é consistente.

6 A hipótese generalizada do contínuo (GCH)

Nesta seção, estamos interessados em mostrar que em L vale GCH , isto é, que vale a afirmação que $|\wp(\alpha)| = \alpha^+$, para todo α cardinal infinito³. Esta afirmação diz que dado um cardinal α se consideramos o tamanho do conjunto M de todos os subconjuntos α , então o tamanho de M é o primeiro cardinal maior que α , ou seja, ao considerar o conjunto M , aumentamos de tamanho em relação a α mas da menor maneira possível. Em ZFC , pode-se mostrar que $|\wp(\alpha)| \geq \alpha^+$ para todo α cardinal infinito. Mas apenas a desigualdade⁴. Esse problema, já no caso $|\wp(\omega)| = |\mathbb{R}|$,

³Cardinais são conjuntos especiais que servem para medir o tamanho de conjuntos. Pode-se mostrar que, dado um conjunto qualquer, por maior que seja, existe um cardinal que representa o seu tamanho. Na verdade, o cardinal terá o mesmo tamanho que o conjunto dado.

⁴Pode-se mostrar que, apenas supondo ZFC , sem o axioma $V = L$ portanto, não dá para provar a igualdade.

mostra como, ao tomarmos o conjunto das partes, não temos, em *ZFC* controle sobre quais subconjuntos estamos tomando. Por exemplo, apenas supondo *ZFC* não conseguimos decidir, dado um subconjunto A de $\mathbb{R}$, tal que $|A| > \omega$, se o tamanho de A é algo menor que o tamanho de $\mathbb{R}$. Em *L*, com o resultado que veremos, temos que $|A| = |\mathbb{R}|$.

Antes de provarmos o resultado, vamos a mais uma definição.

Definição 23. *Seja A uma classe e $B \subset A$ conjunto. E seja $\varphi(\vec{x})$ fórmula cujas constantes estão em B . Então:*

- Dizemos que B **reflete** A em relação à fórmula φ se para todo $\vec{b}$ em B , temos $B \models \varphi(\vec{b}) \Leftrightarrow A \models \varphi(\vec{b})$.
- B **reflete completamente** A em relação à fórmula φ se B reflete A em relação à toda subfórmula de φ (incluindo φ).
- B é **A -fechado** em relação a φ se para toda subfórmula de φ do tipo $\exists y \Gamma(y, \vec{x})$ e todo $\vec{v}$ de B e se existe $a \in A$ tal que $A \models \Gamma(a, \vec{b})$, então temos que existe $b' \in B$ tal que $A \models \Gamma(b', \vec{b})$.
- Dizemos que B é **A -fechado** (ou **Henkin fechado**) se B é A -fechado em relação a toda fórmula com constantes em B .

Lema 24. *Seja φ uma fórmula cujas constantes estão em $B \subset A$. Se B é A -fechado em relação a φ , então B reflete completamente A em relação a φ .*

Demonstração. Seja Γ uma subfórmula de φ . Vamos provar o resultado por indução sobre o grau de complexidade de Γ . Seja $\vec{b}$ em B .

- Se Γ é da forma $x_1 \in x_2$ ou $x_1 = x_2$, onde x_1, x_2 são variáveis ou elementos de B , então claramente temos $A \models \Gamma(\vec{b}) \Leftrightarrow B \models \Gamma(\vec{b})$.
- Γ é da forma $\neg \Gamma_1$. Por hipótese de indução, temos que $A \models \Gamma_1(\vec{b}) \Leftrightarrow B \models \Gamma_1(\vec{b})$. Então, claramente temos $A \models \neg \Gamma_1(\vec{b}) \Leftrightarrow B \models \neg \Gamma_1(\vec{b})$.
- Γ é da forma $\Gamma_1 \wedge \Gamma_2$. Análogo ao anterior.
- Γ é da forma $\exists x \Gamma_1(x, \vec{v})$. Então, $B \models \exists x \Gamma_1(x, \vec{b}) \Rightarrow$ existe $b' \in B$ tal que $B \models \Gamma_1(b', \vec{b}) \Rightarrow b' \in A$ e $A \models \Gamma_1(b', \vec{b}) \Rightarrow A \models \exists x \Gamma_1(x, \vec{b})$.

Reciprocamente, $A \models \exists x \Gamma_1(x, \vec{b}) \Rightarrow$ existe $a \in A$ tal que $A \models \Gamma_1(a, \vec{b})$. Como B é A fechado, existe $b' \in B$ tal que $A \models \Gamma_1(b', \vec{b}) \Rightarrow B \models \Gamma_1(b', \vec{b}) \Rightarrow B \models \exists x \Gamma_1(x, \vec{b})$.

□

Lema 25. *Seja A uma classe infinita bem ordenável e seja $A_0 \subset A$, A_0 conjunto infinito. Então existe um conjunto B tal que $A_0 \subset B \subset A$ tal que $|A_0| = |B|$ e B reflete A .*

Demonstração. Para todo conjunto $S \subset A$, definimos S' da seguinte maneira: consideramos todas as fórmulas do tipo $\exists x \varphi(x)$ com constantes em S tais que $A \models \exists x \varphi(x)$ e definimos para cada uma delas o elemento $a_\varphi = \min\{a \in A : A \models \varphi(a)\}$. Tomamos como $S' = S \cup \{a_\varphi : A \models \exists x \varphi(x)\}$. Note que, como S é infinito, $|S'| = |S| + \omega|S| = |S|$.

Considere agora $(A_n)_{n \in \omega}$, onde $A_{n+1} = A'_n$. Seja $B = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Então $A_0 \subset B \subset A$ e $|B| = \omega|A_0| = |A_0|$. Assim, pelo lema anterior, só precisamos mostrar que B é Henkin fechado em relação a A . Mas dada uma fórmula do tipo $\exists x \varphi(x)$, existe $n \in \omega$ tal que todas as constantes de φ estão em A_n . Daí, temos que $A \models \exists x \varphi(x)$ se, e somente se, existe $a_\varphi \in A_{n+1}$ tal que $A \models \varphi(a_\varphi)$, como $a_\varphi \in B$, temos o resultado. $\square$

Lema 26. *Seja T uma classe transitiva tal que $T \models \forall x L(x)$, onde $L(x)$ é a fórmula $\exists \alpha \exists y (On(\alpha) \wedge (y = L_\alpha) \wedge (x \in y))$. Então dado $a \in T$, temos que o L -rank de a pertence a T .*

Demonstração. Seja $a \in T$. Então $T \models L(a)$, isto é, $T \models \exists \alpha \exists y (On(\alpha) \wedge (y = L_\alpha) \wedge (a \in y))$. Então existe $\alpha \in T$ tal que $T \models \exists y (On(\alpha) \wedge (y = L_\alpha) \wedge (a \in y))$. Note que esta fórmula é preservada acima entre T e V . Logo, para o mesmo $\alpha \in T$ temos que $V \models \exists y (On(\alpha) \wedge (y = L_\alpha) \wedge (a \in y))$. Em particular temos que α é um ordinal e que $a \in L_\alpha$. Logo se β é o L -rank de a , temos que $\beta \leq \alpha$, isto é, $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$. Como $\alpha \in T$ e T é transitivo, temos que $\alpha \subset T$. Logo, $\beta \in T$. $\square$

Teorema 27. *Seja α um cardinal infinito. Então todo subconjunto construtível de L_α é um elemento de L_{α^+} .*

Demonstração. Considere, no lema 25, $A = L$. Observe que L é bem ordenável. Temos também que L é transitivo, assim, a fórmula

$$\forall x L(x) \wedge \forall x \forall y ((x \in y) \rightarrow (\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)))$$

é verdadeira em L . Chamemos tal fórmula de φ . Seja α um cardinal e seja $D \subset L_\alpha$ um conjunto construtível qualquer, isto é, vale $L(D)$. Como $|L_\alpha| = \alpha$ temos que $|L_\alpha \cup \{D\}| = \alpha$. Observe que $L_\alpha \cup \{D\}$ é transitivo. Vamos chamar $A_0 = L_\alpha \cup \{D\}$. Então, pelo lema 25, existe $B \subset L$ tal que $A_0 \subset B$, $\alpha = |A_0| = |B|$ e $B \models \varphi$, em particular, B é transitivo e $B \models \forall x L(x)$. Como temos que $D \in A_0 \subset B$ temos que $D \in B$ e portanto, pelo lema 26, o seu L -rank está em B . Seja γ tal L -rank. Assim, $\gamma \in B$ e então $\gamma \subset B$. Como $|B| = \alpha$, $|\gamma| \leq \alpha$. Portanto, $\gamma < \alpha^+$ e assim temos que $D \in L_{\alpha^+}$. $\square$

Teorema 28. $ZF + (V = L) \vdash GCH$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, $\wp(L_\alpha) \subset L_{\alpha^+}$. Como $|L_{\alpha^+}| = \alpha^+$, temos que $|\wp(L_\alpha)| \leq \alpha^+$ e como $|\wp(L_\alpha)| = |\wp(\alpha)|$, temos que $|\wp(\alpha)| \leq \alpha^+$.

Por outro lado, temos que $\alpha < |\wp(\alpha)|$ e; portanto, $\alpha^+ \leq |\wp(\alpha)|$. Assim, $\alpha^+ = |\wp(\alpha)|$. $\square$

Bibliografia

Notas de aula do Professor Ricardo Bianconi

Smullyan, Raymond M.; *M. Fitting Set Theory and the Continuum Problem*