0842177

UMA ALTERNATIVA À VARIANCIA DE KRIGAGEM: VARIANCIA DE INTERPOLAÇÃO

Jorge Kazuo Yamamoto *

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um método de cálculo da variância de interpolação, a partir da krigagem ordinária como uma alternativa à tradicional variância de krigagem ou de estimação. Os métodos geoestatísticos de estimação foram os primeiros que permitiram o cálculo da variância de estimação e, por isso tem sido extensivamente utilizados para conferir a qualidade da estimativa, bem como em alguns casos para classificação de reservas. Contudo, sabe-se hoje que esse tipo de variância mede somente a configuração espacial dos pontos mais próximos utilizados para fazer a estimação. Assim, para a mesma configuração de dados, indepedentemente dos valores locais dos dados, as variâncias de krigagem terão o mesmo valor.

A variância de interpolação proposta é computada como uma combinação linear das diferenças ao quadrado entre os valores de dados originais e o valor estimado, usando os ponderadores da krigagem ordinária. Ao contrário da variância de krigagem, a variância de interpolação leva em consideração tanto a dispersão local dos dados na vizinhança e sua configuração espacial.

CONCEITOS BASICOS

É importante introduzir a notação corrente utilizada em Geoestatística para designação das variâncias de extensão, estimação e de dispersão.

Segundo Kim (1990), a variância de estimação é a variância dos erros entre o verdadeiro teor Z e o teor estimado Z* de um bloco do depósito mineral. Certamente os verdadeiros valores de teor Z nunca podem ser conhecidos na prática, a menos que os blocos sejam completamente lavrados (Kim, 1990). Conseqüentemente, segundo este autor, o erro exato de estimação nunca pode ser determinado, contudo, pode-se determinar o valor esperado desses erros, se se assumir algumas suposições probabilísticas considerando a distribuição dos teores desses blocos.

Em avaliação de reservas, uma pequena amostra de teor Z(x) é estendida para uma área vizinha a fim de obter o teor estimado de um volume maior chamado bloco (Kim, 1990). Ainda, segundo Kim (1990), se somente uma amostra é usada para estimar o teor do bloco, o erro que se comete pela extensão do teor dessa amostra para o bloco inteiro é chamado variância de extensão, mas se mais amostras forem utilizadas para estimar o teor do bloco, o erro das múltiplas extensões dos teores é definido como variância de estimação, como é calculado pela krigagem ordinária.

Na prática, o valor esperado da variância de estimação, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 306), é determinado como:

* Geólogo, formado em 1976 pelo Instituto de Geociências-USP; Mestre em Geologia Geral e de Aplicação em 1986 pelo IG-USP e Doutor em Recursos Minerais em 1991 pelo IG-USP. Professor Assistente Doutor do Departamento de Geol. Econômica-IG USP.

- Seminário Nacional - Coletânea de trabalhos técnicos 5º 1992

$$\sigma_E^2 = E\left\{[Z_v - Z_v^*]^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \bar{\gamma}(v_i, V) + \mu - \bar{\gamma}(V, V) \qquad (1)$$

Portanto, a variância de estimação ou de krigagem é calculada assumindo a informação estatística subjacente dos dados, ou seja, a função $\gamma(h)$, válida no domínio do depósito.

A variância de dispersão tem definição semelhante àquela dada na Estatística Clássica e refere-se a medida de dispersão de uma variável aleatória de suporte v, dentro do volume maior V, que pode ser calculada como, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 63):

$$D^2(v, V) = E\{S^2(x)\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [Z_V(x) - Z_v(x_i)]^2\right\} \qquad (2)$$

onde: $Z_v(xi)$ são os teores unitário de suporte v;

$Z_V(x)$ é o teor médio no volume V,

que é determinado como:

$$Z_V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_v(x_i) \qquad (3)$$

Para ilustrar o significado da terminologia introduzida, reproduz-se a seguir um caso hipotético criado por Journel (1988, apud Kim, 1990). Assim, segundo este autor, considere o caso com cinco blocos, nos quais são conhecidos os teores reais e os teores estimados por alguma técnica de estimação tal como krigagem ou método dos polígonos, que encontram-se reproduzidos na Tabela 1, juntamente com o cálculo das variâncias de estimação e dispersão.

Tabela 1: Dados de teores verdadeiro e estimado em cinco blocos e variâncias de estimação e dispersão associadas.

BLOCO	TEORES		VARIÂNCIA DE DISPERSÃO		VAR. EST.
	VERDADEIRO $Z_v(x_i)$	ESTIMADO $Z^*_v(x_i)$	$(Z_v - m)^2$	$(Z^*_v - m^*)^2$	$(Z_v - Z^*_v)^2$
1	5	6	0	1	1
2	7	6	4	1	1
3	6	4	1	1	4
4	2	4	9	1	4
5	5	5	0	0	0
MÉDIAS	m = 5	m*= 5	2,8	0,8	2

VARIANCIA DE INTERPOLAÇÃO

A variância de krigagem como exposta na seção anterior, é uma medida do valor esperado da variância de estimação, assumindo válida a informação estatística subjacente dos dados, expressa pela função variograma $\gamma(h)$.

Analisando-se a equação (1), observa-se que esta não depende dos valores dos pontos de dados, mas tão somente da configuração espacial dos mesmos. Para ilustrar esse problema considere o caso de avaliação de pontos usando a mesma configuração espacial dos dados, supondo válida a função variograma $\gamma(h)$ conhecida, como mostra a Figura 1.

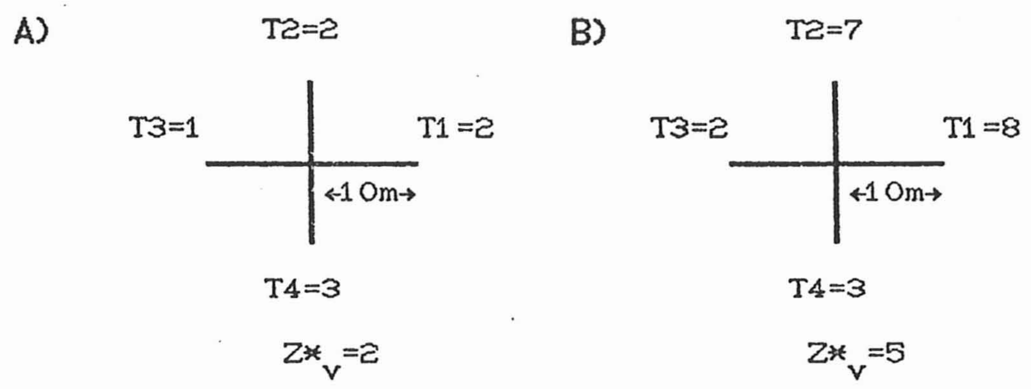

Figura 1: Desenho mostrando o caso de avaliações pontuais por krigagem ordinária, usando a mesma configuração espacial dos dados, mas com diferentes dispersões: baixa (A) e alta (B)

Para o caso dessa figura é suposta válida a equação de um modelo transitivo, dada por:

$$\begin{cases} \gamma(h) = 0{,}1 . h & \text{para } h < 30\text{m}; \\ \gamma(h) = 3 & \text{para } h \geq 30\text{m}. \end{cases}$$

Para calcular a variância de estimação resolveu-se o sistema de equações de krigagem, que resultou nos seguintes valores:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0{,}25$$

$$\mu = -0{,}207,$$

que substituídos na equação (1), forneceu:

$$\sigma_E^2 = 1{,}793$$

Assim, a variância de krigagem resultou para os dois casos em valores exatamente iguais, pois não depende dos valores dos dados do subconjunto e sim da informação estatística média dada pela função variograma $\gamma(h)$.

A variância de interpolação, proposta neste trabalho, é calculada como:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . [Z(x_i) - Z^*_v]^2 \qquad (4)$$

onde: $Z(x_i)$ é o teor do i-ésimo ponto de amostragem;

Z^*_v é o valor estimado de teor.

Calculando-se a variância de interpolação para os dados da Figura 1, obtém-se:

$$\varepsilon_A^2 = 0,50 \qquad\qquad \varepsilon_B^2 = 6,50$$

que são compatíveis com a dispersão dos dados utilizados na interpolação dos pontos nos casos (A) e (B). E, neste caso, as variâncias de interpolação são exatamente iguais às variâncias amostrais, pois todos os pesos foram iguais entre si. Portanto, a variância de interpolação segundo a proposta que se apresenta é uma variância de dispersão e não de estimação, como é a variância de krigagem.

A equação (4) foi utilizada pela primeira vez por Yamamoto (1989) para cálculo da variância de interpolação. Segundo este autor, a variância de interpolação deve ser proporcional à diferença ao quadrado entre o valor de um ponto de dado $Z(x_i)$ e o valor estimado Z^*_v. Assim, ainda de acordo com Yamamoto (1989), estendendo este raciocínio a todos os pontos de dados utilizados, tem-se a variância de interpolação como a somatória das diferenças ao quadrado entre os valores dos pontos de dados e o valor interpolado, multiplicada pelas contribuições efetivas dos pontos de dados, ou seja, pelos respectivos ponderadores λ_i. A variância calculada dessa maneira, segundo Yamamoto (1991), é mais representativa que aquela da krigagem, pois, enquanto, este método leva em consideração tanto a distribuição espacial dos dados e sua dispersão, a variância de krigagem considera tão somente a disposição espacial dos dados, ou seja, é independente dos valores específicos das amostras utilizadas.

A equação (4), pode ser utilizada para cálculo da variância de interpolação associada a avaliação de um ponto como também para o bloco, se os sub-blocos forem avaliados com base no mesmo conjunto de pontos de dados e os ponderadores forem compostos usando o teorema da combinação das estimativas de krigagem (para referência ao teorema citado vide Journel & Huijbregts, 1978, págs. 321-322).

Segundo Journel (1990), a expressão (4) para cálculo da variância de krigagem é atrativamente simples, pois:

a) confirma a exatidão da krigagem, isto é, quando uma amostra coincide com algum ponto a ser estimado, o peso desta amostra será igual a um com todos os outros iguais a zero e, conseqüentemente, $\varepsilon^2 = 0$;
b) aumenta com a dispersão dos valores das amostras utilizadas;

c) usa indiretamente a distância estrutural h do variograma através dos pesos λ da krigagem ordinária. Quanto mais influente a amostra maior o peso, como deveria seria.

A variância de interpolação como calculada pela equação (4), segundo Yamamoto (1991, pág. 39), poderá resultar em valores negativos, visto que se os pesos λ forem negativos, quando multiplicados pela diferença ao quadrado entre o valor da amostra e o ponto interpolado, resultarão num valor negativo e, dependendo dos valores de outros termos da somatória, a soma final poderá ser negativa. O problema da krigagem com pesos negativos, segundo esse autor, tem sido tratado por muitos pesquisadores, os quais admitem a origem do problema quando a krigagem é feita com muitas informações, onde somente alguns poucos pontos contribuem com muita informação em detrimento de outros.

Dentre as propostas apresentadas para solução do problema dos pesos negativos, aquela apresentada por Baafi et al. (1986) é interessante e de fácil implementação. Segundo estes autores, dado um conjunto de {1..n} amostras gera-se todos os subconjuntos possíveis de {1..r} amostras. Para cada subconjunto obtido resolve-se o sistema de krigagem e verifica-se os pesos, se todos os pesos forem positivos, aceita-se o subconjunto e todos os pesos obtidos como a solução ótima, caso contrário, o procedimento é repetido até encontrar um que satisfaça a condição imposta.

Recentemente, Campos (1992, em preparação), apresenta uma solução para eliminação dos pesos negativos, denominada krigagem positiva, cujo algorítmo é um procedimento a duas etapas: na primeira resolve-se o sistema de krigagem e se todos os pesos forem positivos aceita-os como solução, mas se algum peso for negativo reescreve-se o sistema de equações juntamente com as condições de desigualdade, que garantam a krigagem positiva, que é resolvida por programação linear.

Acredita-se que resolvido o problema dos pesos negativos por algum dos métodos citados, a variância de interpolação proposta será uma boa alternativa à variância de krigagem, como medida real de dispersão local dos dados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi proposta a variância de interpolação como alternativa à variância de krigagem, tradicionalmente utilizada em mineração, como medida do erro de estimação, sendo empregada inclusive para classificação de reservas.

Como foi exposto neste artigo a variância de interpolação é uma medida de dispersão dos dados e, nesse sentido, ela deve ser experimentada em depósitos em lavra como parâmetro de controle de minério na usina, possibilitando inclusive prever flutuações possíveis em função do nível de dispersão medido.

Resta ainda como tema de pesquisa futura, a utilização da distribuição da variância de interpolação para classificação de reservas. Para esse fim, a classificação de reservas deve levar em consideração a variabilidade natural do depósito, pois as classificações atualmente existentes consideram como reservas inferidas erros maiores que 50%, o que é relativamente baixo se se considerar que a variabilidade natural do depósito pode atingir, em alguns casos de geometria e distribuição complexas, valores de até 300% para teores medidos pelo coeficiente de variação, que é diretamente proporcional à medida de dispersão fornecida pela variância de interpolação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPOS, A.C.A. Krigagem positiva. 1992. (em preparação).

JOURNEL, A.G. Fundamentals of geostatistics in five lessons, a short course notes for Stanford Center for Reservoir Forecasting. Stanford University. California, 1988.

JOURNEL, A.G. Comunicação pessoal enviado ao Prof. Y.C. KIM sobre a alternativa ao cálculo da variância de krigagem. 1990.

JOURNEL, A.G. & HUIJBREGTS, C.J. Mining geostatistics. London, Academic Press. 1978. 600p.

KIM, Y.C. Introductory geostatistics and mine planning. University of Arizona, Tucson. 212p.

YAMAMOTO, J.K. Novo método para modelagem de jazidas e avaliação de reservas. Brasil Mineral, 1989, v.47, p.52-56.

YAMAMOTO, J.K. Comparação de métodos computacionais para avaliação de reservas: um estudo de caso na Jazida de Cobre de Chapada, GO. São Paulo, 1991. (tese de doutoramento IG-USP).