

RT-MAE 2008-09

TEMPO ÓTIMO DE GARANTIA USANDO UMA
REGRA DE PARADA MONÓTONA

by

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Palavras-Chave: Regra de parada ótima, modelo geral de falha, semimartingal regular ou SSM, política de garantia pro rata.

Classificação AMS: 90B25, 60G44.

Tempo ótimo de garantia usando uma regra de parada monótona

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

Resumo

Neste trabalho fazemos uso de uma regra de parada monótona através da representação semimartingal dos processos de contagem envolvidos nos processos de falha, para determinar o tempo ótimo de garantia que minimize o custo de garantia esperado por unidade de tempo assintótico, sob uma política tipo *pro rata*. Consideramos que o processo de falha do produto segue um modelo geral de falha como em Block, et. al. (1985), porém, os processos de falha do tipo I e II tem processos de intensidade estocásticos.

Palavras chaves: Regra de parada ótima, modelo geral de falha, semimartingal regular ou SSM, política de garantia *pro rata*.

1 Introdução

Na teoria clássica da confiabilidade o problema da otimização dos custos de garantia para um sistema coerente são analisados sem considerar o relacionamento entre o sistema e seus componentes, isto é, através de uma abordagem denominada na literatura existente de

caixa preta. Sob tal aproximação, Block, et. al. (1985) descreve o modelo geral de falha. Neste modelo o processo de falha do sistema apresenta dois possíveis tipos de falhas na idade t : falha do tipo I, reparável minimamente, isto é, reconstitui-se a sua taxa de falha à condição imediatamente anterior à falha, e falha do tipo II a qual é catastrófica e portanto não reparável. Os processos de falhas relacionados com os tipos de falhas são processos de Poisson não homogêneos com taxas de falhas determinísticas. Neste artigo analisamos uma generalização deste modelo, considerando que as taxas das falhas do tipo I e II são processos estocásticos. Esta aproximação permite-nos observar um sistema coerente ao nível de seus componentes, ou seja através da filtragem $\mathbf{G} = (G_t)_{t \geq 0}$,

$$G_t = \{1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, 0 \leq s \leq t\},$$

onde $T_i, i = 1, \dots, m$ são os tempos de vida dos componentes do sistema.

A partir da representação semimartingal dos processos de contagem envolvidos nos processos de falhas considerados é possível definir, sob certas condições, uma regra de parada ótima baseada em uma classe apropriada de tempos de parada, como é descrito em Jensen (1989) e Aven e Jensen (1999).

Neste artigo representamos o custo de garantia e do ciclo de operação sob garantia derivados de uma política do tipo pro rata através de semi-martingais regulares e utilizamos a regra de parada *ILA (Infinitesimal-Look-Ahead)* para determinar o tempo ótimo de garantia que minimize o custo de garantia unitário esperado por unidade de tempo assintótico, para um sistema coerente observado ao nível de seus componentes.

2 Notação e suposições

Neste trabalho consideramos as notações e suposições descritas abaixo:

- C_0 o custo (fixo) por unidade pelo serviço de garantia;

- C_1 o custo por reparo mínimo por unidade, $C_1 > C_0$;
- C_2 o custo por falha do tipo II por unidade, $C_2 > C_1$;
- C_p o preço de venda por unidade, $C_p > C_1$;
- λ_t^I processo de intensidade das falhas do tipo I;
- λ_t^{II} processo de intensidade das falhas do tipo II;
- w comprimento do periodo de garantia a oferecer;
- Z_w Custo de garantia por unidade, para um período de garantia de comprimento w ;
- X_w o ciclo de operação sob garantia para uma unidade;
- τ tempo até a primeira falha do tipo II de um produto novo;
- N_t^I o número de falhas do tipo I no intervalo $[0, t]$, com a representação semimartingal regular (SSM),

$$N_t^I = \int_0^t \lambda_s^I ds + M_t^I \text{ com } E\left\{\int_0^t \lambda_s^I ds\right\} < \infty, \forall t \geq 0.$$

- N_t^{II} o número de falhas do tipo II no intervalo $[0, t]$, com a representação SSM ,

$$N_t^{II} = \int_0^t \lambda_s^{II} ds + M_t^{II} \text{ com } E\left\{\int_0^t \lambda_s^{II} ds\right\} < \infty, \forall t \geq 0.$$

- $\mathcal{M}_0$ a classe de martingais integráveis de média zero;
- $U.I$ indica processo uniformemente integrável;
- $a \wedge b = \min\{a, b\}$; $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Supomos que na idade t um sistema pode experimentar um de dois tipos de falha: falha do tipo I, reparável minimamente, ou falha do tipo II, não reparável. Assume-se que o sistema é coerente e é observado ao nível de seus m componentes, com tempos de vida T_i , $i = 1, 2, \dots, m$, definidos em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Observamos

também as marcas $V_t = 0, 1$ indicando o tipo de falha (I ou II, respectivamente), através da filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, V_s = 0, 1, 0 \leq s \leq t \right\},$$

uma família de sub σ -álgebras de $\mathcal{F}$ satisfazendo as condições de Dellacherie, isto é, crescentes, contínuas à direita e completas. Supomos que os processos λ_t^I e λ_t^{II} são $\mathcal{F}_t$ -progressivamente mensuráveis, $M_t^I, M_t^{II} \in \mathcal{M}_0$, são $U.I.$, e τ é um tempo de parada finito, totalmente inacessível, com $E[\tau] < \infty$. Portanto, o processo pontual $1_{\{\tau \leq t\}}$ tem a seguinte representação SSM ,

$$1_{\{\tau \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_{t \wedge \tau}^{II}, \quad M_{t \wedge \tau}^{II} \in \mathcal{M}_0, \quad U.I., \quad (1)$$

enquanto que o processo N^I parado em τ , isto é, $N_{t \wedge \tau}^I$, tem a representação SSM dada por,

$$N_{t \wedge \tau}^I = \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + M_{t \wedge \tau}^I, \quad M_{t \wedge \tau}^I \in \mathcal{M}_0, \quad U.I. \quad (2)$$

3 Otimização usando a representação semimartingal

3.1 Regra de parada monótona

Segundo Jensen (1989), uma regra de parada é uma estratégia que determina o tempo de parada com respeito a toda a informação passada sobre um processo aleatório. Assim, as regras de parada podem ser identificadas com tempos de parada, e portanto, sob condições apropriadas, pode-se descrever como o primeiro instante no qual o processo observado atinge o supermartingal minimal dominante. Neste trabalho consideramos a chamada regra de parada *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*) que corresponde ao primeiro instante de entrada, de um processo observado, em um conjunto Borel conhecido e fixado (Jensen, 1989).

A regra *ILA* é aplicada a processos $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ os quais admitem a representação semimartingal regular (SSM),

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t, \quad (3)$$

onde $E|Z_0| < \infty$, $(f_t)_t$ é um processo progressivamente mensurável com $E\left[\int_0^t |f_s| ds\right] < \infty$, $\forall t \geq 0$, e M_t um martingal integrável de média zero. Usamos a notação $Z = (f, M)$ (Aven e Jensen, 1999). Tais processos são definidos no espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com a filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Segundo Aven e Jensen (1999), se $\tau > 0$ é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito com $E[Z_\tau] > -\infty$ e $C^{\mathbb{F}}$ é a classe de $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada finitos,

$$C^{\mathbb{F}} = \left\{ \vartheta : \vartheta \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } \vartheta \leq \tau, E[\tau] < \infty, E[Z_\vartheta] > -\infty \right\}, \quad (4)$$

Seja $Z = (f, M)$. Sob a condição (*caso monótono*),

$$\left\{ f_t \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ f_{t+h} \leq 0 \right\} \quad \forall t, h \in \mathbb{R}^+, \quad \bigcup_{t \geq 0} \left\{ f_t \leq 0 \right\} = \Omega, \quad (5)$$

a regra *ILA* é dada por,

$$\xi = \inf \left\{ t \geq 0 : f_t \leq 0 \right\}. \quad (6)$$

Segundo Aven e Jensen (1999), se o martingal M é uniformemente integrável e se $(f_t)_{t \geq 0}$ satisfaz o caso monótono então,

$$E[Z_\xi] = \sup \left\{ E[Z_\vartheta] : \vartheta \in C^{\mathbb{F}} \right\}, \quad (7)$$

onde ξ é a regra *ILA*.

3.2 Problema de otimização

Nosso objectivo é determinar o período ótimo de garantia $w > 0$ que minimize o custo de garantia esperado por unidade de tempo assintótico $K(w)$, dado por

$$K(w) = \frac{E[Z_w]}{E[X_w]}. \quad (8)$$

Assumindo que Z_w e X_w tem representações semimartingais regulares, procuramos um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada ζ numa classe apropriada de tempos de parada,

$$C_\tau^{\mathbb{F}} = \left\{ W : W \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } W \leq \tau, E[\tau] < \infty, E[X_W] < \infty \right\}, \quad (9)$$

tal que

$$K_{\text{optim}} = K(\zeta) = \inf \left\{ K(W) : W \in C_\tau^{\mathbb{F}} \right\}. \quad (10)$$

Suponha que um produto novo é fornecido com um período de garantia w e que o processo de falha deste produto corresponde ao modelo geral de falha (Block, et. al., 1985). Durante o período de garantia as falhas do tipo I são reparadas minimamente até a idade de uso w ou até o tempo da primeira falha do tipo II, o que acontecer primeiro. Uma falha do tipo II (catastrófica) ocorrida na idade $\tau \leq w$ produz o término da garantia e a devolução de uma quantidade $R(\tau)$, definida por,

$$R(\tau) = k \cdot C_p \left(1 - \frac{\alpha\tau}{w}\right) 1_{\{\tau \leq w\}} = k \cdot C_p(1 - \alpha) 1_{\{\tau \leq w\}} + k \cdot C_p \alpha \tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{\tau \leq w\}} \quad (11)$$

onde $0 < k \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Além dos custos por reparo ou falha no período de garantia, cada unidade vendida sob este serviço leva um custo adicional de $C_0 < C_1$. Então, o custo de garantia de período de comprimento w , é

$$Z_w = C_0 + C_1 N_{w \wedge \tau}^I + R(\tau) = C_0 + C_1 N_{w \wedge \tau}^I + k \cdot C_p(1 - \alpha) 1_{\{\tau \leq w\}} + k \cdot C_p \alpha \tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{\tau \leq w\}}. \quad (12)$$

Para a representação *SSM* de Z_w , note que em $\{\tau \leq w\}$,

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{w}\right) = \int_{\tau}^w \frac{1}{s^2} ds = \int_0^w \frac{1}{s^2} 1_{\{\tau \leq s\}} ds, \text{ e então, } \tau \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{\tau \leq w\}} = \int_0^w \frac{1}{s^2} \tau 1_{\{\tau \leq s\}} ds + 0, \quad (13)$$

com parte martingal igual a zero P-q.c. Logo, das equações (1), (2), e (13), temos que a representação *SSM* de (12) é,

$$Z_w = C_0 + \int_0^w \left[1_{\{\tau > s\}} \left(C_1 \lambda_s^I + k \cdot C_p(1 - \alpha) \lambda_s^{II} \right) + k \cdot C_p \alpha \frac{1}{s^2} \tau 1_{\{\tau \leq s\}} \right] ds + R_w, \quad R_w \in \mathcal{M}_0, \text{ U.I.}, \quad (14)$$

onde o martingal R_w é igual a

$$R_w = C_1 M_{w \wedge \tau}^I + k \cdot C_p(1 - \alpha) M_{w \wedge \tau}^{II} \quad (15)$$

Desde que só tempos de parada W com $W \leq \tau$ são considerados podemos simplificar a última integral em $\{\tau > w\}$ por,

$$Z_w = C_0 + \int_0^w 1_{\{\tau > s\}} \left[C_1 \lambda_s^I + k \cdot C_p(1 - \alpha) \lambda_s^{II} \right] ds + R_w, \quad R_w \in \mathcal{M}_0, \text{ U.I.}, \quad (16)$$

com

$$E\left\{\int_0^w 1_{\{\tau>s\}}[C_1\lambda_s^I + k \cdot C_p(1-\alpha)\lambda_s^{II}]ds\right\} < \infty, \forall w \geq 0,$$

Então podemos escrever $Z_w = Z = (f, R)$, onde o processo f_w é igual a $f_w = 1_{\{\tau>w\}}[k \cdot C_p(1-\alpha)\lambda_w^{II} + C_1\lambda_w^I]$.

O ciclo de operação sob garantia por unidade vendida é dado pela variável $X_w = w \wedge \tau$, com a representação *SSM* dada por,

$$X_w = w \wedge \tau = \int_0^w 1_{\{\tau>s\}}ds + 0 \quad (17)$$

Observe que a parte martingal de X_w é zero P-q.c. Logo, podemos escrever $X_w = X = (g, 0)$, onde o processo $g_w = 1_{\{\tau>w\}}$.

Seja o processo

$$r_w = C_1\lambda_w^I + k \cdot C_p(1-\alpha)\lambda_w^{II}, \quad w \in [0, \tau] \quad (18)$$

e

$$r_{\inf} = \inf\{r_w(\omega), 0 \leq w < \tau(\omega), \omega \in \Omega\}. \quad (19)$$

Note que $r_w = f_w/g_w$ em $\{\tau > w\}$. Segundo Aven e Jensen (1999), se R_w é uniformemente integrável, e $E[Z_0 - r_{\inf} \cdot X_0] = E[C_0 - r_{\inf} \cdot 0] = C_0 > 0$, então K_{optim} é limitado pelas quantidades $k_l \leq K_{\text{optim}} \leq k_u$, onde,

$$0 \leq k_l = \frac{C_0}{E[\tau]} + r_{\inf}, \text{ e } k_u = K(\tau) = \frac{C_0 + k \cdot C_p(1-\alpha) + C_1 E\left\{\int_0^\tau \lambda_s^I ds\right\}}{E[\tau]}. \quad (20)$$

Teorema 3.2.1. Seja o processo r_w definido em (18) e os limites k_l e k_u dados em (20). Suponha que r_w é (k_l, k_u) -crescente P-q.c. em $w \in [0, \tau]$, isto é

$$\text{para todo } w \in [0, \tau) \text{ e } h \in \mathbb{R}^+, r_w \geq k_l \text{ implica } r_{w+h} \geq r_w \wedge k_u. \quad (21)$$

Então, o tempo de parada ótimo é $\zeta \in C_\tau^F$, tal que

$$\zeta = w_{x_{\inf}} \wedge \tau, \text{ com } w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w \geq x\} \quad (22)$$

e

$$x_{\inf} = \inf \left\{ x \geq 0 : \frac{C_0 + C_1 E \left\{ \int_0^{w_x \wedge \tau} \lambda_s^I ds \right\} + k \cdot C_p (1 - \alpha) P(\tau \leq w_x)}{E \left\{ \int_0^{w_x} 1_{\{\tau > s\}} ds \right\}} \leq x \right\} = K_{\text{optim}}, \quad (23)$$

Prova. Com o fim de aplicar a regra *ILA* apresentada em 3.1, sob as condições da Seção 2, consideramos os processos Y_w^x , para $x \in [k_l, k_u]$, dados por,

$$Y_w^x = x \cdot X_w - Z_w = -C_0 + \int_0^w h_s^x ds + P_w \in \mathcal{M}_0, \quad U.I \quad (24)$$

onde $h_s^x = 1_{\{\tau > s\}} \left[x - \left(C_1 \lambda_s^I + k \cdot C_p (1 - \alpha) \lambda_s^{\text{II}} \right) \right]$, e o martingal $P = (P_w)_w$, $P_w = -R_w$, com R_w dado em (15). Em $\{\tau > w\}$, $h_w^x = x - r_w$ e por (21), satisfaz o caso monótono para $w \in [0, \tau)$ e $x \in [k_l, k_u]$, assim, a regra de parada *ILA*, ρ_x , dada por

$$\begin{aligned} \rho_x &= \inf \left\{ w \geq 0 : x - r_w \leq 0 \right\} \wedge \tau \\ &= \inf \left\{ w \geq 0 : r_w \geq x \right\} \wedge \tau \\ &= w_x \wedge \tau \end{aligned} \quad (25)$$

é ótima e $E[Y_{\rho_x}^x] = \sup \{ E[Y_W^x], W \in C_\tau^F \}$ para cada $x \in [k_l, k_u]$. Por definição, $\rho_x \in C_\tau^F$ e pela condição (21), (22) e (25), $\zeta = \rho_{K_{\text{optim}}}$. Além disso, $E[Y_w^x] = x \cdot E[X_w] - E[Z_w]$, em particular para $x = K_{\text{optim}}$, e $w \in [0, \tau)$,

$$\begin{aligned} E[Y_w^{K_{\text{optim}}}] &= K_{\text{optim}} \cdot E[X_w] - E[Z_w] \leq \sup_{w \in [0, \tau)} E[Y_w^{K_{\text{optim}}}] \\ &= \sup_{W \in C_\tau^F} E[Y_W^{K_{\text{optim}}}] \\ &= E[Y_\zeta^{K_{\text{optim}}}] \\ &= K_{\text{optim}} \cdot E[X_\zeta] - E[Z_\zeta] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, para $w \in [0, \tau)$,

- i. Se $0 \leq k_l \leq x < K_{\text{optim}}$, então para todo $w \in [0, \tau)$, $E[Y_w^x] < E[Y_w^{K_{\text{optim}}}] \leq 0$, e portanto, $E[Y_{\rho_x}^x] = \sup_{w \in [0, \tau)} E[Y_w^x] < 0$.

ii. Se $k_u \geq x \geq K_{\text{optim}}$, então para todo $w \in [0, \tau)$, $E[Y_w^x] \geq E[Y_w^{K_{\text{optim}}}]$, e portanto,

$$E[Y_{\rho_x}^x] = \sup_{w \in [0, \tau)} E[Y_w^x] \geq \sup_{w \in [0, \tau)} E[Y_w^{K_{\text{optim}}}] = 0.$$

onde, $\{\tau \leq \rho_x\} = \{\tau = \rho_x\} = \{\tau \leq w_x\}$, logo

$$\begin{aligned} Y_{\rho_x}^x &= x \cdot X_{\rho_x} - Z_{\rho_x} \\ &= x \cdot \rho_x - [C_0 + C_1 N_{\rho_x}^I + k \cdot C_p(1 - \alpha)1_{\{\tau \leq w_x\}}] \end{aligned} \quad (26)$$

Assim, de i., ii. e (26), conclui-se que

$$\begin{aligned} x_{\text{inf}} &= \inf \{x \geq 0 : E[Y_{\rho_x}^x] \geq 0\} \\ &= \inf \left\{x \geq 0 : \frac{C_0 + C_1 E\left\{\int_0^{w_x \wedge \tau} \lambda_s^I ds\right\} + k \cdot C_p(1 - \alpha)P(\tau \leq w_x)}{E\left\{\int_0^{w_x} 1_{\{\tau > s\}} ds\right\}} \leq x\right\} = K_{\text{optim}} \end{aligned}$$

e $\zeta = \rho_{K_{\text{optim}}} = w_{x_{\text{inf}}} \wedge \tau$. ■

Um caso particular de (12) é quando $k \cdot C_p = C_2 > C_1$ e $\alpha = 0$. Nesse caso o custo de garantia por unidade se reduz a,

$$Z_w = C_0 + C_1 N_{w \wedge \tau}^I + C_2 1_{\{\tau \leq w\}}, \quad (27)$$

com a representação SSM igual a,

$$Z_w = C_0 + \int_0^w 1_{\{\tau > s\}} [C_1 \lambda_s^I + C_2 \lambda_s^{\text{II}}] ds + M_w, \quad M_w \in \mathcal{M}_0, \quad U.I., \quad (28)$$

onde o martingal $M = (M_w)_{w \geq 0}$ é dado por

$$M_w = C_1 M_{w \wedge \tau}^I + C_2 M_{w \wedge \tau}^{\text{II}}, \quad (29)$$

e $E\left\{\int_0^w 1_{\{\tau > s\}} [C_1 \lambda_s^I + C_2 \lambda_s^{\text{II}}] ds\right\} < \infty, \forall w \geq 0$. Então $Z_w = Z = (f, M)$, com o processo $f_w = 1_{\{\tau > w\}} [C_1 \lambda_w^I + C_2 \lambda_w^{\text{II}}]$. O processo r_w fica igual a $r_w = C_1 \lambda_w^I + C_2 \lambda_w^{\text{II}}, w \in [0, \tau)$ e K_{optim} é limitado pelas quantidades $k_l \leq K_{\text{optim}} \leq k_u$, onde,

$$k_u = \frac{C_0 + C_1 E\left\{\int_0^\tau \lambda_s^I ds\right\} + C_2}{E[\tau]}. \quad (30)$$

O tempo ótimo de parada é $\zeta \in C_\tau^F$, tal que

$$\zeta = w_{x_{\inf}} \wedge \tau, \text{ com } w_x = \inf \{w \geq 0 : C_1 \lambda_w^I + C_2 \lambda_w^{II} \geq x\} \quad (31)$$

e

$$x_{\inf} = \inf \left\{ x \geq 0 : \frac{C_0 + C_1 E \left\{ \int_0^{w_x \wedge \tau} \lambda_s^I ds \right\} + C_2 P(\tau \leq w_x)}{E \left\{ \int_0^{w_x} 1_{\{\tau > s\}} ds \right\}} \leq x \right\} = K_{\text{optim}}, \quad (32)$$

3.2.1 Exemplo

Considere um sistema coerente com $m = 2$ componentes em paralelo e a estrutura de custo dada em (27). Suponha que os tempos de vida dos componentes, T_1 e T_2 , são tais que $T_1 = Z_1 \wedge Z_{12}$, $T_2 = Z_2 \wedge Z_{12}$, onde Z_1 , Z_2 , e Z_{12} são variáveis aleatórias exponenciais iid, com taxa de falha $r(t) = \beta$, $t > 0$, as quais descrevem os tempos quando o sistema é atingido por um de três possíveis choques, causando falha do componente 1, 2 e de ambos componentes ao mesmo tempo, respectivamente. O tempo de vida do sistema é $T = T_1 \vee T_2$ e o processo de intensidade do sistema é

$$\begin{aligned} \lambda_t 1_{\{T > t\}} &= \beta 1_{\{T > t\}} + \beta [1_{\{T_1 \leq t, T_2 > t\}} + 1_{\{T_1 > t, T_2 \leq t\}}] \\ &= \beta 1_{\{T > t\}} + \beta 1_{\{Z_{12} > t\}} [1_{\{Z_1 \leq t, Z_2 > t\}} + 1_{\{Z_1 > t, Z_2 \leq t\}}]. \end{aligned}$$

Se uma falha do tipo II acontece quando o sistema em operação é atingido por um choque associado a Z_{12} , e uma falha do tipo I quando a falha é causada pelos choques associados às variáveis Z_1 e Z_2 , então τ , o tempo da primeira falha do tipo II, é igual a Z_{12} , e enquanto $Z_{12} > t$, as falhas do sistema são do tipo I. Assim, temos que,

$$\lambda_t^I 1_{\{Z_{12} > t\}} = \beta 1_{\{Z_{12} > t\}} [1_{\{Z_1 \leq t, Z_2 > t\}} + 1_{\{Z_1 > t, Z_2 \leq t\}}], \text{ e } \lambda_t^{II} 1_{\{Z_{12} > t\}} = \beta 1_{\{Z_{12} > t\}}. \quad (33)$$

Sob as condições anteriores, assume-se que observamos os tempos de vida dos componentes e o tempo no qual o sistema é atingido por um choque associado a Z_{12} , isto é, o indicador do tipo de falha é $V_t = 1_{\{Z_{12} > t\}}$, através de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ com

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, 1_{\{Z_{12} > s\}}, 0 \leq s \leq t \right\}.$$

De (28) e (33) temos,

$$\begin{aligned} E[Z_w] &= C_0 + E\left\{\int_0^w \beta 1_{\{Z_{12} > s\}} [1_{\{Z_1 \leq s, Z_2 > s\}} + 1_{\{Z_1 > s, Z_2 \leq s\}}] ds\right\} C_1 + P(Z_{12} \leq w) C_2 \\ &= C_0 + (1 - e^{-2\beta w}) C_1 - \frac{2}{3} (1 - e^{-3\beta w}) C_1 + (1 - e^{-\beta w}) C_2, \end{aligned} \quad (34)$$

e de (17),

$$E[X_w] = \int_0^w P(Z_{12} > s) ds = \int_0^w e^{-\beta s} ds = \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta w}). \quad (35)$$

Logo,

$$E[Z_{Z_{12}}] = E[Z_\infty] = C_0 + \frac{1}{3} C_1 + C_2, \text{ e } E[X_{Z_{12}}] = E[X_\infty] = 1/\beta. \quad (36)$$

Então, por (30) e (36), o limite $k_u = \beta(C_0 + \frac{1}{3} C_1 + C_2)$. Pelo teorema 3.2.1, em $\{Z_{12} > w\}$ temos que $r_w = \beta[1_{\{Z_1 \wedge Z_2 \leq w < Z_1 \vee Z_2\}} C_1 + C_2]$, isto é,

$$r_w = \begin{cases} \beta C_2, & \text{se } 0 \leq w < Z_1 \wedge Z_2 \\ \beta[C_1 + C_2], & \text{se } Z_1 \wedge Z_2 \leq w < Z_1 \vee Z_2. \end{cases} \quad (37)$$

Logo, para todo $w_1 \leq w_2 \in [0, Z_{12}]$, $r_{w_1} \leq r_{w_2}$, portanto r_w tem realizações P-q.c. não decrescentes. Por (20) e (37), temos que o limite $k_l = \beta(C_0 + C_2)$. Assim, com $C_0 < C_1$, r_w também satisfaz (21), como pode ser visto na figura 1.

Para achar a solução ótima só é preciso considerar valores de $x \in [k_l, k_u]$. Seja $r_{\sup} = \beta(C_1 + C_2)$. Pode acontecer que $r_{\sup} \leq k_u$ ou $r_{\sup} > k_u$, então, consideramos os seguintes casos:

a) $r_{\sup} \leq k_u$, $C_0 < C_1 < C_2$, isto é, $\frac{2}{3} C_1 < C_0 < C_1$. Sob esta condição temos,

a-1) Se $\beta(C_0 + C_2) \leq x \leq r_{\sup}$, então $w_x = Z_1 \wedge Z_2$, e considerando que em $\{Z_{12} > w\}$, $r_w = r_{\sup}$ se $Z_1 \wedge Z_2 \leq w < Z_1 \vee Z_2$, então $Z_{12} > Z_1 \wedge Z_2$ e portanto $\rho_x = Z_1 \wedge Z_2$.

Neste caso, temos

$$E[Z_{\rho_x}] = C_0 + C_1 E\left\{\int_0^{(Z_1 \wedge Z_2) \wedge Z_{12}} \beta [1_{\{Z_1 \leq s, Z_2 > s\}} + 1_{\{Z_1 > s, Z_2 \leq s\}}] ds\right\} + C_2 P(Z_{12} \leq Z_1 \wedge Z_2), \quad (38)$$

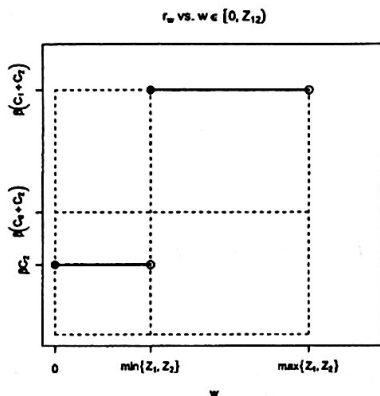


Figura 1: Processo r_w no exemplo 3.2.1

onde

$$P(Z_{12} \leq Z_1 \wedge Z_2) = \int_0^\infty P(Z_1 \wedge Z_2 > s) \beta e^{-\beta s} ds = \int_0^\infty \beta e^{-3\beta s} ds = \frac{1}{3}, \quad (39)$$

e

$$E\left\{\int_0^{(Z_1 \wedge Z_2) \wedge Z_{12}} \beta [1_{\{Z_1 \leq s, Z_2 > s\}} + 1_{\{Z_1 > s, Z_2 \leq s\}}] ds\right\} = E\left\{\int_{Z_1}^{Z_2} \beta ds\right\} + E\left\{\int_{Z_2}^{Z_1} \beta ds\right\} = 0. \quad (40)$$

Enquanto que

$$E[Z_1 \wedge Z_2] = E\left\{\int_0^{Z_1} 1_{\{Z_2 > s\}} ds\right\} = \int_0^\infty \left\{\int_0^u e^{-\beta s} ds\right\} \beta e^{-\beta u} du = \frac{1}{2\beta}, \quad (41)$$

Então, de (38), (39), (40) e (41)

$$E[Y_{\rho_z}^x] = \frac{x}{2\beta} - \left(C_0 + \frac{1}{3}C_2\right) = 0 \implies x_{a_1}^* = \beta\left(2C_0 + \frac{2}{3}C_2\right). \quad (42)$$

Esta solução deve satisfazer a condição a-1),

$$C_0 + C_2 \leq 2C_0 + \frac{2}{3}C_2 \leq C_1 + C_2 \iff \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2,$$

e mais a condição a) obtemos que, $x_{a_1}^* = \beta(2C_0 + \frac{2}{3}C_2)$ e $\rho_{x_{a_1}^*} = Z_1 \wedge Z_2$ se

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}C_1 \vee \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 < C_1 \wedge \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2\right), \text{ isto é, se} \\ \frac{1}{3}C_2 \leq C_1 < C_2, \text{ e } \frac{2}{3}C_1 \vee \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 < \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2\right). \end{aligned} \quad (43)$$

a-2) Se $r_{\sup} < x \leq k_u$. Neste caso, $w_x = \infty$ e portanto $\rho_x = Z_{12}$, logo $x_{a_2}^* = k_u$ e $\rho_{x_{a_2}^*} = Z_{12}$.

Sob as condições em a) e dos resultados em a-1) e a-2), temos que $x_{a_1}^* < x_{a_2}^*$, logo se (43) é satisfeito então $K_{\text{optim}} = x_{a_1}^*$ e $\zeta = Z_1 \wedge Z_2$, do contrario $K_{\text{optim}} = x_{a_2}^*$ e $\zeta = Z_{12}$.

b) $r_{\sup} \geq k_u$, $C_0 < C_1 < C_2$, isto é, $C_0 \leq \frac{2}{3}C_1$.

Sob esta condição temos que para todo $x \in [k_l, k_u]$, $w_x = Z_1 \wedge Z_2$ e pelo mesmo argumento dado em a-1), $\rho_x = Z_1 \wedge Z_2$. Então $x_b^* = \beta(2C_0 + \frac{2}{3}C_2)$, que deve satisfazer $k_l \leq x_b^* \leq k_u$, ou seja,

$$C_0 + C_2 \leq 2C_0 + \frac{2}{3}C_2 \leq C_0 + \frac{1}{3}C_1 + C_2 \iff \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2$$

que junto com a condição b), obtemos que $K_{\text{optim}} = x_b^* = \beta(2C_0 + \frac{2}{3}C_2)$ e $\zeta = \rho_{x_b^*} = Z_1 \wedge Z_2$ se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \left(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2\right) \wedge \frac{2}{3}C_1, \text{ isto é, se} \\ \frac{1}{2}C_2 \leq C_1 < C_2, \text{ e } \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \left(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2\right). \end{aligned} \quad (44)$$

3.2.2 Exemplo

Considere de novo o sistema descrito no exemplo 3.2.1, sob a política de garantia em (12).

De (17), (33) e (12) temos que,

$$\begin{aligned} E[Z_\tau] &= E[Z_{Z_{12}}] = C_0 + C_1 E\left\{\int_0^{Z_{12}} \beta[1_{\{Z_1 > s, Z_2 \leq s\}} + 1_{\{Z_1 \leq s, Z_2 > s\}}] ds\right\} + k \cdot C_p(1 - \alpha) \\ &= C_0 + \frac{1}{3}C_1 + k \cdot C_p(1 - \alpha), \end{aligned} \quad (45)$$

$$E[X_\tau] = E[Z_{12}] = 1/\beta. \quad (46)$$

Logo, de (20), o limite $k_u = \beta[C_0 + \frac{1}{3}C_1 + k \cdot C_p(1 - \alpha)]$. Pelo teorema 3.2.1 em $\{Z_{12} > w\}$, temos que $r_w = \beta[1_{\{Z_1 \wedge Z_2 \leq w < Z_1 \vee Z_2\}}C_1 + k \cdot C_p(1 - \alpha)]$, isto é,

$$r_w = \begin{cases} k \cdot C_p(1 - \alpha)\beta, & \text{se } 0 \leq w < Z_1 \wedge Z_2 \\ [C_1 + k \cdot C_p(1 - \alpha)]\beta, & \text{se } Z_1 \wedge Z_2 \leq w < Z_1 \vee Z_2. \end{cases} \quad (47)$$

Assim, para todo $w_1 \leq w_2 \in [0, \tau]$, $r_{w_1} \leq r_{w_2}$, portanto r_w tem rotas P-q.c. não decrescentes. Por (20) e (47), o limite $k_l = \beta[C_0 + k \cdot C_p(1 - \alpha)]$, e se $C_0 < C_1$, r_w também satisfaz (21), como pode ser visto na figura 2.

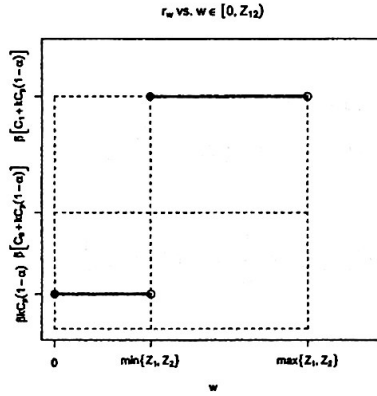


Figura 2: Processo r_w no exemplo 3.2.2

Para a solução ótima consideramos os mesmos casos que no exemplo 3.2.1, com $C_2 = k \cdot C_p(1 - \alpha)$. Assim obtemos que,

- i. Se $\frac{1}{3}k \cdot C_p(1 - \alpha) \leq C_1 < k \cdot C_p(1 - \alpha)$, e $\frac{2}{3}C_1 \vee \frac{1}{3}k \cdot C_p(1 - \alpha) \leq C_0 < [\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}k \cdot C_p(1 - \alpha)]$, ou se $\frac{1}{2}k \cdot C_p(1 - \alpha) \leq C_1 < k \cdot C_p(1 - \alpha)$ e $\frac{1}{3}k \cdot C_p(1 - \alpha) \leq C_0 \leq [\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}k \cdot C_p(1 - \alpha)]$, então $K_{\text{optim}} = \beta(2C_0 + \frac{2}{3}C_2)$ e $\zeta = Z_1 \wedge Z_2$.

- ii. Caso contrario, $K_{\text{optim}} = k_u$ e $\zeta = Z_{12}$.

3.2.3 Exemplo

Considere a estrutura de custo de garantia dada em (27) para um sistema coerente com $m = 3$ componentes, onde o componente 1 está em série com um subsistema em paralelo formado pelos componentes 2 e 3. Assuma que os tempos de vida dos componentes são, respectivamente, as variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3 \stackrel{i.i.d}{\sim} \exp(\beta)$, de maneira que o tempo de vida do sistema é $T = X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$. Sob a sigma álgebra completa gerada pelos tempos de vida dos componentes, o processo de intensidade de falha do sistema em $\{T > t\}$, é dada por,

$$\lambda_t = \beta + \beta[1_{\{X_2 \leq t\}} + 1_{\{X_3 \leq t\}}].$$

Note que em $\{T > t\}$ é preciso que $\{X_1 > t\}$, isto é, o funcionamento do componente 1 é condição necessária para que o sistema funcione. Logo, se uma falha do tipo II acontece quando falha o componente 1, e se uma falha do tipo I acontece quando falha o subsistema em paralelo formado pelos componentes 2 e 3, então, em $\{T > t\}$,

$$\lambda_t^I = \beta[1_{\{X_2 \leq t\}} + 1_{\{X_3 \leq t\}}], \text{ e } \lambda_t^{II} = \beta. \quad (48)$$

Neste caso o tempo da primeira falha do tipo II é o tempo de vida do componente 1, isto é $\tau = X_1$, e os processos Z_w e X_w , são iguais a,

$$Z_w = C_0 + \int_0^w 1_{\{X_1 > s\}} \{C_1 \beta [1_{\{X_2 \leq s\}} + 1_{\{X_3 \leq s\}}] + C_2 \beta\} ds + M_w, \quad X_w = \int_0^w 1_{\{X_1 > s\}} ds + 0,$$

então

$$E[Z_w] = C_0 + (2C_1 + C_2)(1 - e^{-\beta w}) - C_1(1 - e^{-2\beta w}), \text{ e} \quad (49)$$

$$E[X_w] = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta w}). \quad (50)$$

Assim, temos que,

$$E[Z_{X_1}] = E[Z_\infty] = C_0 + C_1 + C_2, \quad E[X_{X_1}] = E[X_\infty] = \frac{1}{\beta}. \quad (51)$$

De (30) e (51), obtemos $k_u = \beta(C_0 + C_1 + C_2)$. Pelo teorema 3.2.1, em $\{X_1 > w\}$ temos que $r_w = \beta[1_{\{X_2 \wedge X_3 \leq w < X_2 \vee X_3\}} C_1 + C_2]$, isto é,

$$r_w = \begin{cases} \beta C_2, & \text{se } 0 \leq w < X_2 \wedge X_3 \\ \beta[C_1 + C_2], & \text{se } X_2 \wedge X_3 \leq w < X_2 \vee X_3. \end{cases} \quad (52)$$

Logo, para todo $w_1 \leq w_2 \in [0, X_1]$, $r_{w_1} \leq r_{w_2}$, portanto r_w tem realizações P-q.c. não decrescentes. Por (20) e (52), temos que o limite $k_l = \beta(C_0 + C_2)$. Seja $r_{\text{sup}} = \beta(C_1 + C_2)$. Se $C_0 < C_1$, então $r_{\text{inf}} < k_l < r_{\text{sup}} < k_u$ e r_w satisfaz (21), como pode ser visto na figura 3.

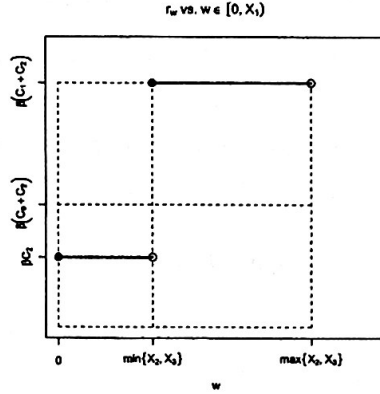


Figura 3: Processo r_w no exemplo 3.2.3

Para achar a solução ótima precisamos considerar valores de $x \in [k_l, k_u]$. Consideramos os seguintes casos:

- a) Se $\beta(C_0 + C_2) \leq x \leq \beta(C_1 + C_2)$,
- b) Se $\beta(C_1 + C_2) < x \leq \beta(C_0 + C_1 + C_2)$.

Em (a), em $\{X_1 > w\}$, $w_x = X_2 \wedge X_3 < X_1$ então $\rho_x = X_2 \wedge X_3$. Logo,

$$E[Z_{\rho_x}] = C_0 + C_1 E\left\{\int_0^{X_1 \wedge X_2 \wedge X_3} \beta[1_{\{X_2 \leq s\}} + 1_{\{X_3 \leq s\}}] ds\right\} + C_2 P(X_1 \leq X_2 \wedge X_3), \quad (53)$$

onde,

$$P(X_1 \leq X_2 \wedge X_3) = \int_0^\infty P(X_2 \wedge X_3 > s) \beta e^{-\beta s} ds = \int_0^\infty \beta e^{-3\beta s} ds = \frac{1}{3}, \quad (54)$$

e

$$E\left\{\int_0^{X_1 \wedge X_2 \wedge X_3} \beta[1_{\{X_2 \leq s\}} + 1_{\{X_3 \leq s\}}] ds\right\} = E\left\{\int_{X_2}^{X_1} \beta ds\right\} + E\left\{\int_{X_3}^{X_1} \beta ds\right\} = 0. \quad (55)$$

Enquanto que

$$E[X_2 \wedge X_3] = E\left\{\int_0^{X_2} 1_{\{X_3 > s\}} ds\right\} = \int_0^\infty \left\{\int_0^u e^{-\beta s} ds\right\} \beta e^{-\beta u} du = \frac{1}{2\beta}, \quad (56)$$

Então, de (53), (54), (55) e (56)

$$E[Y_{\rho_x}^x] = \frac{x}{2\beta} - \left(C_0 + \frac{1}{3}C_2\right) = 0 \implies x_a^* = \beta\left(2C_0 + \frac{2}{3}C_2\right). \quad (57)$$

Esta solução deve satisfazer a condição a), logo,

$$C_0 + C_2 \leq 2C_0 + \frac{2}{3}C_2 \leq C_1 + C_2 \iff \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2,$$

e junto com a condição $C_0 < C_1 < C_2$, obtemos que $x_a^* = \beta\left(2C_0 + \frac{2}{3}C_2\right)$ e $\rho_{x_2} = X_2 \wedge X_3$ se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2\right) \wedge C_1, \text{ isto é, se} \\ \frac{1}{3}C_2 \leq C_1 < C_2, \text{ e } \frac{1}{3}C_2 \leq C_0 \leq \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{6}C_2\right). \end{aligned} \quad (58)$$

Em b), em $\{X_1 > w\}$, $w_x = \infty$ então $\rho_x = X_1$. Logo, $x_b^* = k_u$ e $\rho_{x_b} = X_1$.

Dos resultados obtidos para os casos a) e b) temos que $x_a^* < x_b^*$, logo se (58) é satisfeito então $K_{\text{optim}} = x_a^*$ e $\zeta = X_2 \wedge X_3$, do contrario $K_{\text{optim}} = x_b^*$ e $\zeta = X_1$.

Referências

- [1] Aven, T. and Jensen, U. Stochastic models in reliability. *Springer-Verlag Inc.*, (1999). New York.

- [2] Block, H.W., Borges, W.S. and Savits, T.H. *Age-dependent minimal repair*. Journal of Applied Probability, 22 (1985), 370-385.
- [3] Jensen, U. *Monotone stopping rules for stochastic processes in a semimartingale representation with applications*. Optimization, 20(6) (1989), 837-852.

ÚLTIMOS RELATÓRIOS TÉCNICOS PUBLICADOS

2008-01 - CABRAL, C.R.B.; BOLFARINE, H. Bayesian Inference for the Skew Student-t-Normal Model. 2008. 13p. (RT-MAE-2007-01)

2008-02 - CABRAL, C.R.B.; BOLFARINE, H. Bayesian Density Estimation Using Skew Student-t-Normal Mixtures. 2008. 18p. (RT-MAE-2008-02)

2008-03 - FARIAS, R.B.A.; ARENAS, G.M.; PATRIOTA, A.G. Redução de modelos na presença de parâmetros de perturbação. 2008. 19p. (RT-MAE-2008-03)

2008-04 - MIRANDA, J.C. A Mixed Hammerstein Integral Equation. 2008. 10p. (RT-MAE-2008-04)

2008-05 - WECHSLER, S.; PEREIRA, C.A.B.; MARQUES, P.C.F. Birnbaum's Theorem Redux. 05p. 2008. (RT-MAE-2008-05)

2008-06 - BUENO, V.C.; ALVAREZ, N.G.G. Optimal warranty time under a extenrsion of the general failure model. 23p. 2008. (RT-MAE-2008-06)

2008-07 - FIGUEIREDO, C.C.; BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M.C.; C.R.O.P. LIMA On the skew-normal calibration model. 30p. 2008. (RT-MAE-2008-07)

2008-08 - NELFI, A.G.G.; Tempo ótimo de burn-in usando uma regra de parada monótona. 39p. 2008. (RT-MAE-2008-08)

The complete list of "Relatórios do Departamento de Estatística", IME-USP, will be sent upon request.

*Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 66.281
5311-970 - São Paulo, Brasil*