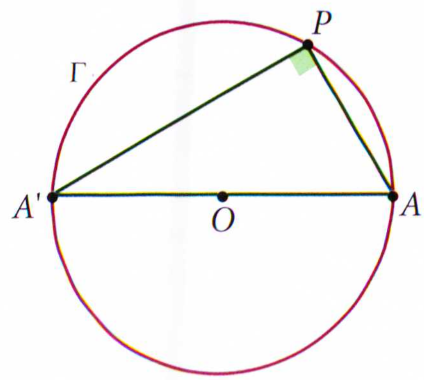
O TRIÂNGULO PSEUDORRETÂNGULO E A HIPÉRBOLE EQUILÁTERA

SERGIO ALVES
IME USP

Um resultado clássico da geometria afirma que o lugar geométrico dos pontos de um fixado plano euclidiano E que "enxergam" um dado segmento AA' segundo um ângulo reto é a circunferência $\Gamma \subset E$ de diâmetro AA' com os pontos A e A' excluídos. Mais precisamente, dado $P \in E$, tem-se $m(\angle APA') = 90$ se, e somente se, $P \in \Gamma - \{A, A'\}$.



Porém, num triângulo PAA', $m(\angle APA') = 90$ equivale a $m(\angle PAA') + m(\angle PA'A) = 90$ de modo que, dado $P \in E$, tem-se $m(\angle PAA') + m(\angle PA'A) = 90$ se, e somente se, $P \in \Gamma - \{A, A'\}$. Surge assim a seguinte questão: Qual seria o lugar geométrico dos pontos $P \in E$ tais que $|m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90$?

Um triângulo PAA' tal que

$$|m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90$$

é chamado **triângulo pseudorretângulo em** $\boldsymbol{P}$.

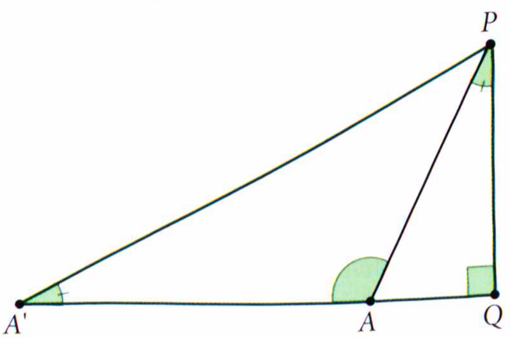
Uma de suas principais propriedades é motivada por uma conhecida relação métrica válida para triângulos retângulos: $h^2 = mn$, em que h é a altura em relação à hipotenusa e m e n são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lema 1. Sendo Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AA', tem-se que PAA' é um triângulo pseudorretângulo em P se, e somente se, Q não pertence ao segmento AA' e $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$.

Prova. Suponha que no triângulo PAA' valha

$$m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90 \cdot$$

Neste caso, a projeção ortogonal Q de P sobre a reta AA' satisfaz $A' - A - Q$ (leia-se: o ponto A está entre os pontos A' e Q) e, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo PQA, tem-se $m(\angle PAA') = m(\angle APQ) + 90$.



Logo, $m(\angle APQ) = m(\angle PA'A)$ e, pelo critério AA de semelhança de triângulos, segue $\Delta PQA \sim \Delta A'QP$. Conclui-se que

$$\frac{PQ}{A'Q} = \frac{AQ}{PQ}, \text{ ou seja,}$$

$$(PQ)^2 = (AQ)(A'Q).$$

Reciprocamente, suponha que a projeção ortogonal Q de P sobre a reta AA' satisfaça

$A' - A - Q$ e $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$.

Então, $\dfrac{PQ}{A'Q} = \dfrac{AQ}{PQ}$ e tem-se $\Delta PQA \sim \Delta A'QP$ agora pelo critério LAL de semelhança de triângulos. Logo,

$$m(\angle APQ) = m(\angle PA'Q)$$

e, como $m(\angle PAA') = m(\angle APQ) + 90$, conclui-se que $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$.

De modo inteiramente análogo, prova-se que

$$m(\angle PA'A) - m(\angle PAA') = 90$$

se, e somente se, tem-se

$$Q - A' - A \text{ e } (PQ)^2 = (AQ)(A'Q).$$

O leitor interessado poderá verificar, como exercício, as propriedades abaixo que também caracterizam o fato de um triângulo PAA' ser pseudorretângulo em P:

(a) A reta tangente em P à circunferência circunscrita ao triângulo PAA' é perpendicular à reta AA'.

(b) As bissetrizes dos ângulos interno e externo de vértice P formam, com a reta AA', ângulos agudos de medida 45.

Retornando ao nosso problema, considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas tal que o eixo Ox contenha os pontos A e A' e o eixo Oy seja a mediatriz do segmento AA'. Sendo $a > 0$ tal que $AA' = 2a$, suponha $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$.

Se $P = (x, y)$ satisfaz

$$m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90,$$

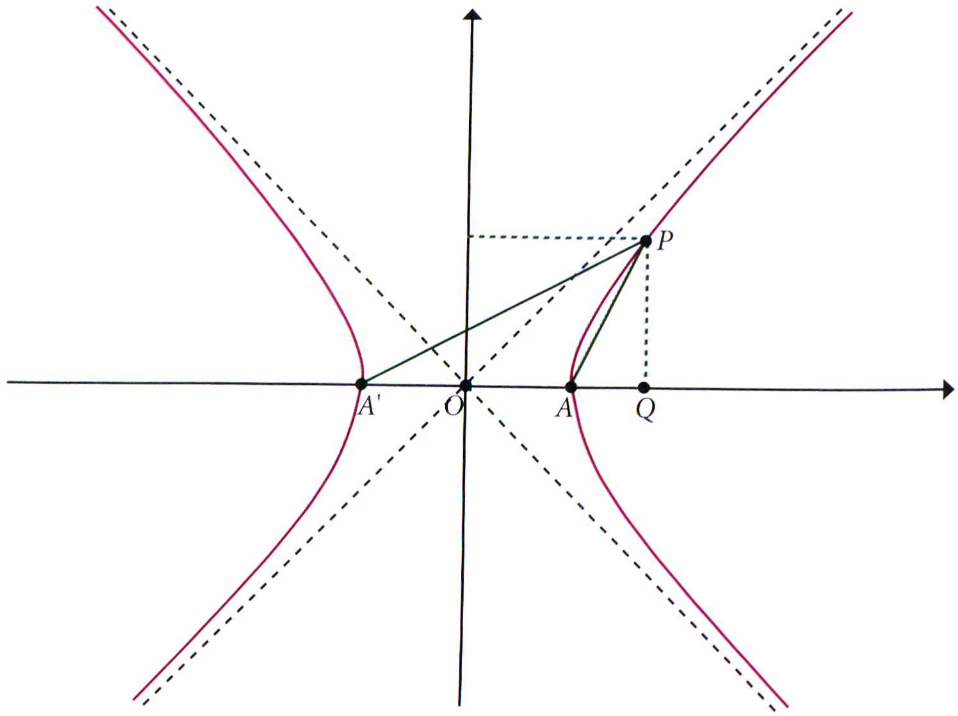
vimos no Lema 1 que $x > a$ e a igualdade

$$(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$$

se escreve, nesse sistema de coordenadas, como $y^2 = (x - a)(x + a)$, ou, ainda, $x^2 - y^2 = a^2$. Observe que o Lema 1 também garante a validade da recíproca: se $P = (x, y)$ é tal que $x > a$ e $x^2 - y^2 = a^2$, então

$$m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90 \cdot$$

A igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ ou, equivalentemente, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, nada mais é do que a equação reduzida de uma hipérbole equilátera com vértices A e A', e



a condição $x > a$ nos diz que $P = (x, y)$ pertence ao ramo dessa hipérbole que contém A excluído o próprio ponto A.

De modo inteiramente análogo, prova-se que $P = (x, y)$ satisfaz

$$m(\angle PA'A) - m(\angle PAA') = 90$$

se, e somente se, $x < -a$ e $x^2 - y^2 = a^2$. Neste caso, o ponto P descreve o ramo da hipérbole equilátera que contém A' excluído o próprio ponto A'.

O argumento acima estabelece a resposta à questão colocada no início deste texto:

> **Teorema 1**. Sejam A e A' dois pontos distintos de um fixado plano euclidiano E. Nessas condições, o lugar geométrico dos pontos $P \in E$ tais que $|m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90$ é a hipérbole equilátera de vértices A e A' com os pontos A e A' excluídos.

Curiosamente, a propriedade descrita nesse teorema é apresentada como definição de hipérbole equilátera num clássico texto publicado em 1927 (veja [3]).

Observação

O leitor talvez não reconheça de imediato a igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ como a equação reduzida de uma hipérbole equilátera. Um procedimento mais familiar é considerar a hipérbole equilátera como o gráfico da função $f(x) = k/x$, sendo k um número real não nulo. Para verificar a equivalência entre as duas formas, basta tomar um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que os novos eixos coordenados OX e OY sejam as assíntotas da hipérbole equilátera. Em outras palavras, considere OX e OY obtidos de Ox e Oy por uma rotação de 45° no sentido horário em torno da origem O. Nesse caso, as antigas coordenadas (x, y) e as novas (X, Y) de um mesmo ponto arbitrário do plano estão relacionadas por

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y), y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y)$$

e a igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ é transformada na equação

$$XY = \frac{a^2}{2}.$$

O resultado demonstrado no Teorema 1 justifica uma construção muito simples que permite obter, com régua e compasso, os pontos de uma hipérbole equilátera de vértices A e A'. Na figura abaixo vemos desenhada a circunferência Γ de diâmetro AA' (é a chamada **circunferência principal** da hipérbole) e sua reta tangente t em A. Seja BB' o diâmetro de Γ perpendicular ao segmento AA'.

Sendo R um ponto arbitrário da semicircunferência BB' de Γ que contém A, a intersecção da reta $A'R$ com a reta simétrica da reta AR em relação à reta tangente t é um ponto P tal que $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$ (por quê?) e, portanto, P pertence ao ramo da hipérbole equilátera de vértices A e A' que contém A. Note que, se $R = B$ ou $R = B'$, a reta $A'R$ e a reta simétrica de AR em relação a t são retas paralelas e, neste caso, o ponto P não existe.

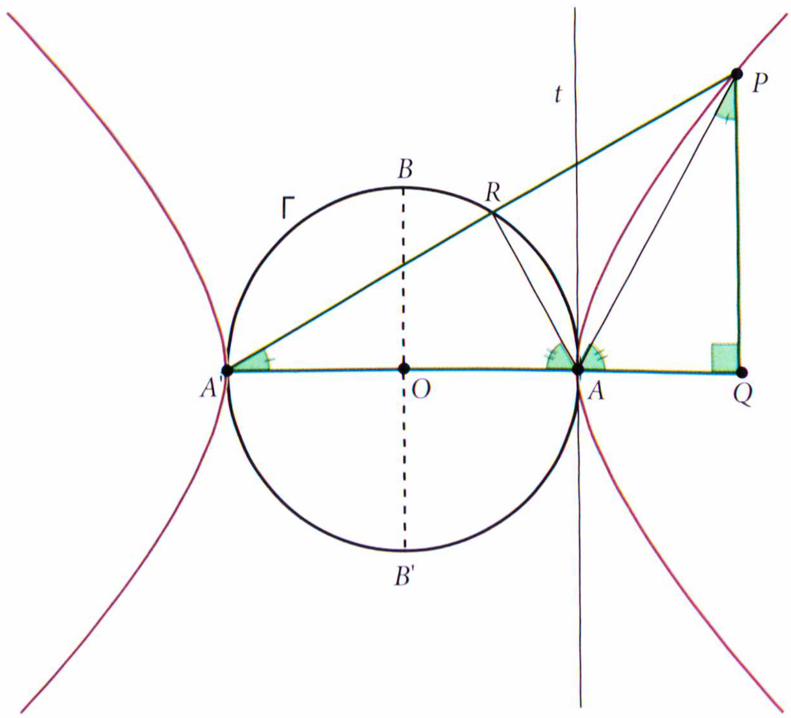
Permutando-se os papéis de A e A', obtém-se o ramo da hipérbole equilátera de vértices A e A' que contém A'.

Finalizamos este trabalho com a proposta de uma atividade investigativa que deve ser desenvolvida preferencialmente com o auxílio de um programa de geometria dinâmica. Tais programas permitem o traçado imediato de uma hipérbole equilátera considerando-a, por exemplo, como a curva cuja equação, num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, é dada por $xy = k$, sendo k um número real não nulo.

Atividade

(a) Trace a hipérbole equilátera $\mathcal{H}$ de equação $xy = 1$ e assinale três pontos distintos A, B, C pertencentes a $\mathcal{H}$. Construa o ortocentro H do triângulo ABC (lembre-se de que H é o encontro das retas suportes de duas alturas quaisquer do triângulo). O que você observa? Essa observação permanece válida para outras escolhas de pontos distintos A, B, C pertencentes a $\mathcal{H}$?

(b) Repita a construção efetuada no item anterior para a hipérbole equilátera de equação $xy = -3$. Sua conjectura continua valendo?



O resultado esperado nesta atividade é uma notável propriedade da hipérbole equilátera descoberta pelos matemáticos franceses Brianchon e Poncelet (veja [2]). Eis o seu enunciado, observando que a expressão "triângulo inscrito numa hipérbole" significa que os vértices do triângulo pertencem à hipérbole.

Teorema 2. O ortocentro de um triângulo inscrito numa hipérbole equilátera também pertence a essa hipérbole.

Prova. Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que a hipérbole equilátera dada tenha equação $xy = k$, k um número real não nulo. Assim, o ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $y = k/x$.

Sejam

$$A = (a, k/a),\ B = (b, k/b) \text{ e } C = (c, k/c)$$

três pontos distintos pertencentes à hipérbole. Note que nenhuma das retas AB, BC, AC é, nesse sistema de coordenadas, uma reta vertical ou horizontal.

Como o coeficiente angular da reta BC é igual a $-\dfrac{k}{bc}$, segue que a reta que passa por A e é perpendicular à reta BC tem equação

$$y - \frac{k}{a} = \frac{bc}{k}(x - a).$$

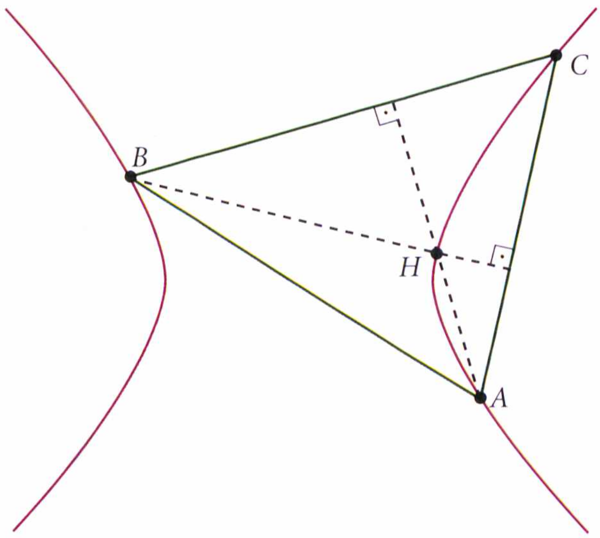
Analogamente, a reta que passa por B e é perpendicular à reta AC tem equação

$$y - \frac{k}{b} = \frac{ac}{k}(x - b)$$

A intersecção dessas duas retas é o ortocentro $H = (x_1, y_1)$ do triângulo ABC. Cálculos rotineiros nos mostram que

$$x_1 = -\frac{k^2}{abc} \text{ e } y_1 = -\frac{abc}{k}$$

e, portanto, $x_1 y_1 = k$. Segue que H também pertence à hipérbole equilátera dada.



Uma pergunta natural que surge a partir do teorema acima é saber se essa propriedade notável caracteriza a hipérbole equilátera. Surpreendentemente, a resposta é afirmativa. No capítulo 3 da referência [1], o leitor encontrará várias demonstrações (baseadas nas propriedades projetivas das cônicas) do seguinte fato não trivial: **o ortocentro de um triângulo inscrito numa cônica não degenerada C também pertence a essa cônica se, e somente se, C é uma hipérbole equilátera.**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AKOPYAN A.V. e A.A. Zaslavsky. Geometry of Conics. *Mathematical World* (AMS), Vol. 26, 2008.

[2] BRIANCHON C.J. e J.V. Poncelet. Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 11, 1820-1821.

[3] LEMAIRE J. *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*, Vuibert, 1927.