

LUCAS NOGUEIRA GARCEZ

(PHD)

DA CONDIÇÃO DE MÍNIMO CUSTO  
NOS CONDUTOS FORÇADOS.  
APLICAÇÃO AO CÁLCULO DAS REDES  
DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA POTÁVEL.

TÉSE

apresentada à Congregação da Escola  
Politécnica da Universidade de S. Paulo  
para o concurso ao cargo de Professor  
Catedrático da Cadeira de Hidráulica,  
Hidráulica Urbana e Saneamento. •

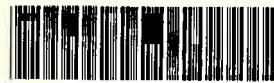


pt. 360

1946

FT-360

DEDALUS - Acervo - EPBC



31200030912

621.643  
9164c  
pt. ex. 3

## INTRODUÇÃO

Difícil é, atualmente, ao engenheiro que se dedique à Hidráulica e suas aplicações permanecer fiel à sua profissão, quando o extraordinário desenvolvimento da Hidromecânica Teórica tende a arrastá-lo a questões puramente especulativas, prendendo-o aos absorventes problemas físico-matemáticos; quando a Técnica Sanitária, em sua vertiginosa evolução, procura cercá-lo cada vez mais no âmbito das coisas eminentemente práticas, enlaçando-o aos interessantes pormenores construtivos.

Daí a dificuldade que se nos deparou na escolha de um assunto, o qual, dando margem a estudos teóricos e aplicações práticas, abrangesse ainda o campo das duas partes em que se divide, na Escola Politécnica de São Paulo, a cadeira reunida de "Hidráulica, Hidráulica Urbana e Saneamento".

Em a nossa vida profissional temos tido a atenção despertada pelo problema do cálculo económico das rãdes de distribuição de água potável a um centro habitado e ousamos acreditar ser essa questão de molde a satisfazer às condições propostas.

Esse o motivo da apresentação "Da condição de mínimo custo nos condutos forçados. Aplicação

*ao cálculo das rêsdes de distribuição de água potável*, como tese de concurso ao cargo de Professor Catedrático da Cadeira de "Hidráulica, Hidráulica Urbana e Saneamento" da Escola Politécnica de São Paulo.

*Dividimos a tese em seis capítulos.*

No primeiro, depois de recordar as principais fórmulas para a determinação da espessura dos tubos de um conduto forçado, pretendemos fazer uma síntese de todas elas, considerando-as como méras aplicações das diversas teorias que, na Resistência dos Materiais, tentam relacionar a ruptura de uma peça sujeita a um estado triplo de tensão à sua ruptura sob a ação de um simples esforço normal que possa ser medido experimentalmente. Terminamos o capítulo, calculando, pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos catálogos de fabricantes, os coeficientes numéricos das fórmulas de espessura dos tubos das diversas classes e procedências que utilizamos normalmente em nossas rêsdes.

No segundo, contestamos a hipótese, geralmente aceita, da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro de um conduto forçado, sugerindo variação mais consentânea com a realidade.

No terceiro capítulo, apoиando-nos na hipótese sugerida no segundo, abordamos o problema geral do mínimo custo nos condutos forçados simples, mostrando que o mesmo constitue matéria do Cálculo das Variações, sendo caso particular das questões isoperimétricas.

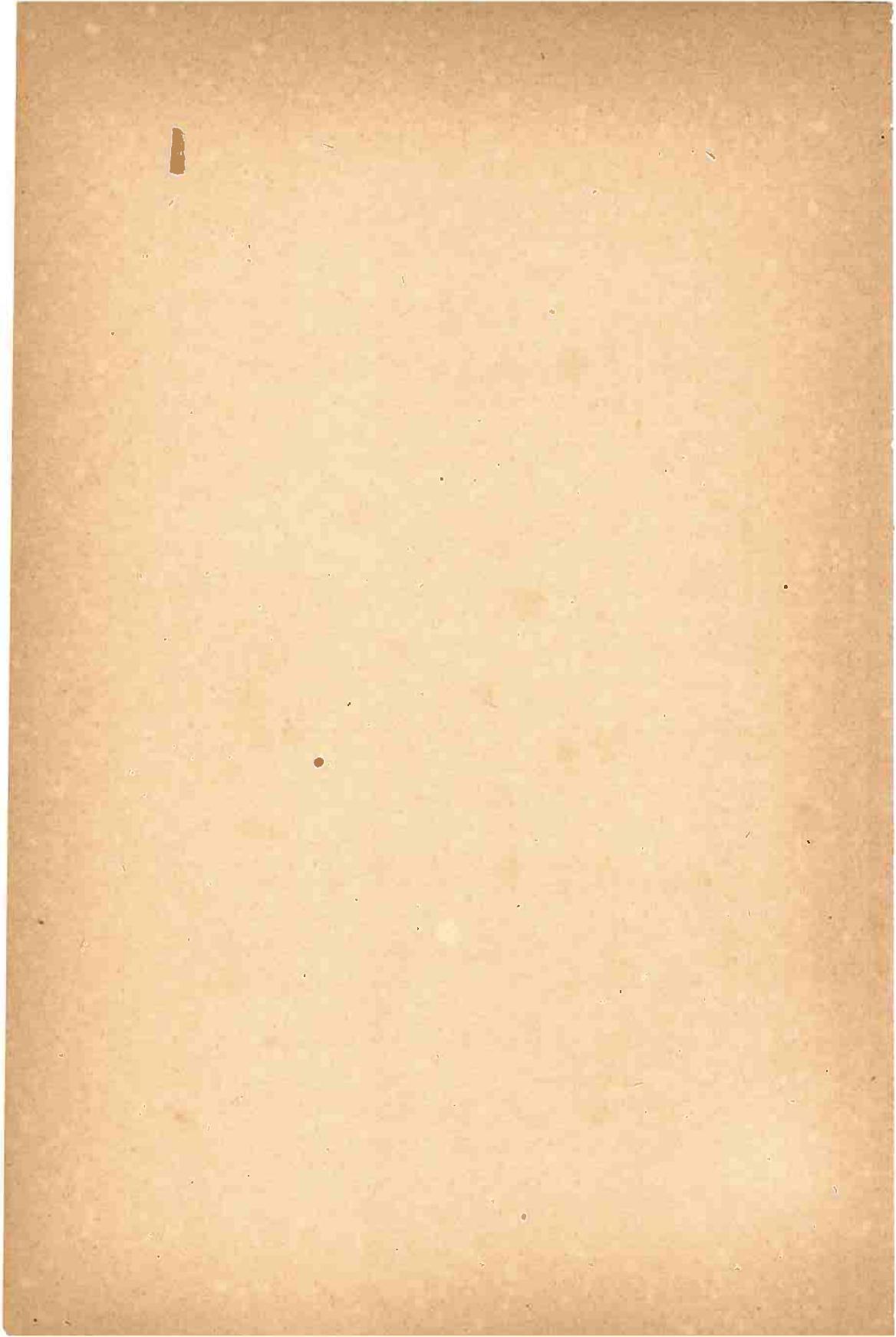
O quarto e quinto capítulos abrangem aplicações da condição geral de mínimo custo a casos particulares,

de prático interesse, nos condutos forçados simples e complexos. Ao encerrarmos essas aplicações pretendemos realçar as dificuldades práticas do cálculo rigoroso de uma rede de distribuição, por intermédio das condições de mínimo custo dos condutos complexos.

Inicia-se o sexto capítulo com a análise de um sistema de distribuição com os métodos de tentativas diretas, no qual se inclue o de Hardy Cross, ainda pouco conhecido entre nós. Depois de recordarmos os critérios seguidos na prática para o seccionamento dos sistemas malhados, encerramos o trabalho recordando a marcha a seguir para o dimensionamento de uma rede de distribuição de água potável tendo em vista a condição de mínimo custo.

Ao finalizar, temos a lamentar que a escassez de tempo não permitisse apresentar trabalho mais digno do argumento escolhido.







## ÍNDICE

Pág.

Introdução .....	3
------------------	---

### CAPÍTULO I

#### Espessura dos tubos de um conduto forçado

1. Generalidades .....	9
2. Condições de resistência .....	10
3. Ruptura ocasionada por pressão externa.....	12
4. Fórmula de Clavarino .....	13
5. Aplicação da fórmula de Clavarino a tubos de paredes delgadas .....	17
6. Fórmula da tensão tangencial .....	19
7. Fórmula da American Standards Association .....	22
8. Observações gerais sobre as fórmulas para o cálculo da espessura dos condutos forçados .....	26

### CAPÍTULO II

#### Custo de um conduto forçado

9. Peso por metro linear de um conduto forçado .....	37
10. Crítica à hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro de um conduto forçado .....	47

### CAPÍTULO III

#### A condição geral de mínimo custo nos condutos forçados simples

11. Perda de carga no regimem gradualmente variado.....	53
12. A condição geral de mínimo custo nos condutos forçados simples : um problema de cálculo das variações .....	54
13. Aspecto puramente matemático do problema .....	56
14. Aplicação das condições de Euler e de Legendre ao problema geral do mínimo custo de condutos forçados.....	58
15. Fórmula aproximada para a determinação de $\lambda$ .....	61

#### CAPÍTULO IV

##### Aplicações da condição de mínimo custo nos condutos forçados simples

	Pág.
16. Canalização com vazão constante .....	65
17. Canalização constituída de vários trechos cada um deles com vazão constante .....	66
18. Canalização com vazão uniformemente distribuída e vazão nula à jazante .....	67
19. Canalização com vazão uniformemente distribuída ao longo do conduto e vazão constante na extremidade .....	69
20. Canalização constituída de trechos de vazão uniformemente distribuída ao longo dos condutos e de trechos de vazão constante .....	71
21. Aplicação numérica .....	73

#### CAPÍTULO V

##### Aplicações da condição de mínimo custo nos condutos forçados complexos

22. Condutos complexos .....	78
23. Determinação do problema geral de um conduto complexo projetado, pela condição de mínimo custo .....	81
24. Casos particulares da condição de mínimo custo nos condutos forçados complexos .....	84
25. Condição de mínimo custo para uma canalização alimentada por um ponto intermediário .....	86
26. Impraticabilidade do dimensionamento das rês de distribuição de água potável com as condições de mínimo custo dos condutos complexos .....	88

#### CAPÍTULO VI

##### A condição de mínimo custo nas rês de distribuição

27. Análise de um sistema de distribuição .....	92
28. Seccionamento dos circuitos fechados. Transformação dos sistemas malhados em ramificados .....	96
29. Dimensionamento de uma rô de distribuição de água potável tendo em vista a condição de mínimo custo .....	98

## I — ESPESSURA DOS TUBOS DE UM CONDUTO FORÇADO

**1. Generalidades** — As canalizações para o transporte e distribuição de água potável, destinada a atender às necessidades de um centro habitado, formam uma rede de condutos, geralmente enterrados sob as vias públicas, a profundidades variáveis, mas relativamente pequenas.

Estão, assim, êsses particulares condutos forçados sujeitos à pressão interior, ocasionada pela carga hidráulica permanente e pelas eventuais ações dinâmicas, e, às forças externas, representadas, entre outras, pelo peso da terra de recobrimento e camada de pavimentação e pelas cargas transmitidas por veículos que se deslocam sobre a faixa transitável.

Destarte, o cálculo da espessura das canalizações, no caso mais geral, deve se fazer tendo em vista as propriedades físicas do material de que é constituído o tubo e as tensões nele ocasionadas pela pressão interior e pelas forças externas. À espessura calculada, deve-se acrescer ainda um termo adicional, empírico, para levar em consideração não apenas os esforços não previstos no cálculo, como os decorrentes das operações de transporte e assentamento dos tubos, como também a eventual redução de sua espessura, por pequenas imperfeições na fabricação ou pelos efeitos de corrosão.

Umas fórmulas, mais precisas, levam em consideração as tensões ocasionadas pela ação simultânea da pressão interior e das cargas externas, outras, menos complexas, dimensionam os condutos tendo em vista exclusivamente as tensões dominantes, que, via de regra, são devidas à pressão interior.

Entre as primeiras, merecem citação a de Clavarino e a da American Standards Association (ASA), entre as segundas, a da tensão tangencial e as suas variações como as fórmulas de Barlow e de Fairchild, largamente empregadas nos Estados Unidos.

Alguns dos métodos de dimensionamento são simplesmente empíricos, outros baseiam-se diretamente em considerações analíticas; uns e outros são contudo suscetíveis de justificação teórica, baseada nas condições de resistência num estado triplo de tensão, e que, a seguir, recapitularemos.

Antes, todavia, desejamos observar que, no presente trabalho, nos preocuparemos exclusivamente com os tubos de ferro fundido, os quais, entre nós, são ainda os mais empregados nas rôdes de distribuição.

**2. Condições de resistência** — A pressão interior e as cargas externas geram na parede da canalização um estado triplo de tensão. Assim, por exemplo, em um tubo de parede espessa, submetido a uma pressão interior  $\rho$ , a face interna está sujeita a tensões:

$$\text{longitudinais} \quad \sigma_z = \rho \frac{1}{f^2 - 1} \quad (2.1)$$

$$\text{radiais} \quad \sigma_r = -\rho \quad (2.2)$$

$$\text{tangenciais} \quad \sigma_t = \rho \frac{f^2 + 1}{f^2 - 1} \quad (2.3)$$

em que  $f > 1$  é a relação entre os diâmetros externo e interno do tubo. (1)

Sabe-se da Resistência dos Materiais que diversas teorias existem tentando relacionar a ruptura de uma peça sujeita a um estado triplo de tensão à sua ruptura, sob a ação de um simples esforço normal, que possa ser medido experimentalmente. Algumas das teorias consideram o predomínio de uma tensão ou deformação, outras levam em conta a energia de deformação ; qualquer uma delas serve de base ao dimensionamento da parede de um conduto forçado. Entre elas, são de imediata aplicação ao cálculo da espessura de uma canalização as seguintes :

- a) Teoria da maior tensão normal, também denominada de Lamé ou Rankine, na qual sómente a tensão tangencial, que é a predominante, (basta, comparar as fórmulas (2.1), (2.2) e (2.3)) é considerada na ruptura do tubo, desprezando-se o efeito das tensões longitudinais e radiais.
- b) Teoria da maior deformação linear, na qual, além da tensão tangencial, é também considerada a longitudinal, o montante da resistência do material dependendo então do seu coeficiente de Poisson.
- c) Teoria da maior tensão de cizalhamento, estabelecendo que a ruptura depende sómente da maior e menor tensões existentes. Nos tubos sujeitos à pressão interior, como a tensão longitudinal é, em valor, intermediária entre a tensão tangencial e a radial, de acordo com esta teoria, ela não deve afetar o estado de tensão no qual a ruptura se dá.

---

(1) Langendonck — Prof. Telemaco van — "Cálculo de concreto armado — vol. I — pág. 111.

d) Teoria da energia de distorsão, pela qual a ruptura está ligada a uma relação dada pela diferença entre as tensões principais. Esta relação pode ser expressa por

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_{tr}^2$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  representam as tensões principais e  $\sigma_{tr}$  a tensão limite medida no ensaio simples de tração.

Deve-se observar que, a menos que a espessura da paréde seja muito pequena em relação ao ráio do conduto, as discrepâncias entre os valores obtidos com a aplicação das diversas teorias são consideráveis. (2)

### 3. Ruptura ocasionada por pressão externa

— Quando um trecho de tubo, de pequena dimensão longitudinal, de diâmetro externo  $D_e$  está sujeito a uma pressão externa  $p_e$ , aparece em sua parede uma tensão de compressão, medida por

$$\sigma = \frac{p_e D_e}{2 e_1} \quad (3.1)$$

sendo  $e_1$  a espessura da parede.

Se levarmos em consideração o efeito da contração lateral, o valor crítico da pressão externa que causa a ruptura de um tubo de secção circular e de dimensão longitudinal considerável é dado pela seguinte expressão

$$p_{cri} = \frac{2 E}{1 - \nu^2} \left( \frac{e_1}{D_e} \right)^3 \quad (3.2),$$

---

(2) Langendonck — Prof. Telemaco van — op. cit. pág. 112 — fig. 78.

na qual  $\rho_{cri}$  = valor crítico da pressão externa

$E$  = módulo de elasticidade

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$e_1$  = espessura da parede

$D_e$  = diâmetro externo (3)

Levando a (3.1) o valor de  $\rho_{cri}$  obteremos a tensão de ruptura

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{e_1}{D_e} \right)^2 \quad (3.3)$$

Inversamente, conhecida a tensão de ruptura, a expressão (3.3) permite determinar o valor limite

da relação  $\frac{e_1}{D_e}$ .

É de se notar que a ruptura das canalizações sujeitas à pressão exterior é profundamente afetada quando os tubos não são rigorosamente circulares; daí o aparecimento de fórmulas mais aproximadas, considerando as secções como elípticas (4).

Para os tubos de ferro fundido, os desvios entre as dimensões reais e o diâmetro especificado, em uma secção, raramente atingem 1% do diâmetro especificado.

#### 4. Fórmula de Clavarino — Como direta aplicação da teoria da maior deformação linear, Clava-

---

(3) Croker and Walker — Piping Handbook — pág. 35.

(4) Timoshenko — S. — Theory of Elastic Stability — 1936 —  
pág. 222.

rino obteve a seguinte fórmula para o dimensionamento dos tubos sujeitos simultaneamente a uma pressão interior  $\rho$  e a uma pressão exterior  $\rho_e$ :

$$\sigma = \frac{(1-2\nu)(\rho D^2 - \rho_e D_e^2) + (1+\nu) \frac{D^2 D_e^2}{4r^2} (\rho - \rho_e)}{D_e^2 - D^2} \quad (4.1)$$

na qual

$\sigma$  = tensão correspondente ao ráio genérico  $r$

$\rho$  = pressão interna

$\rho_e$  = pressão externa

$r$  = ráio genérico de 1 ponto qualquer da parede

$D$  = diâmetro interno do tubo

$D_e$  = diâmetro externo do tubo

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

Estudemos separadamente o efeito das pressões internas e o das externas.

No caso de existir apenas a pressão interna  $\rho$ , sendo então  $\rho_e = 0$ , a máxima tensão  $\bar{\sigma}$  que se opõe

na face interior será,  $\left( \text{para } r = \frac{D}{2} \right)$ .

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{D^2(1-2\nu) + D_e^2(1+\nu)}{D_e^2 - D^2} \quad (4.2)$$

$$\text{ou} \quad \rho = \bar{\sigma} \frac{D_e^2 - D^2}{D^2(1-2\nu) + D_e^2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

Para facilitar as aplicações a expressão

$$\frac{D_e^2 - D^2}{D^2(1-2\nu) + D_e^2(1+\nu)}$$

costuma ser designada por  $k$ , escrevendo-se a fórmula de Clavarino, no caso, simplesmente

$$\bar{\sigma} = \frac{\rho}{k} \text{ ou } \rho = k \bar{\sigma} \quad (4.4)$$

Apliquemo-la ao dimensionamento de tubos de ferro fundido, nos quais

$$\nu = 0,270 \text{ e portanto,}$$

$$k = \frac{100 (D_e^2 - D^2)}{46 D^2 + 127 D_e^2} \quad (4.5)$$

Sendo a espessura do tubo  $e_1 = \frac{D_e - D}{2}$ , eliminando-se  $D_e$  na expressão (4.5) obtem-se :

$$k = \frac{400 \frac{e_1}{D} \left[ 1 + \frac{e_1}{D} \right]}{46 + 127 \left[ 1 + 2 \frac{e_1}{D} \right]^2} \quad (4.6)$$

Para as aplicações podem ser organizadas tabelas de dupla entrada fornecendo os valores de  $k$  para diversos valores da relação  $\frac{e_1}{D}$ .

Em particular, no problema do cálculo da espessura de um tubo sujeito apenas à pressão interior, são dadas a pressão interior  $\rho$  e a tensão máxima na face interna  $\bar{\sigma}$ , de modo que  $k$  é imediatamente

determinado por (4.4). Fixado  $k$ , a fórmula (4.6) permitirá conhecer o valor de  $\frac{e_1}{D}$ ; isto é o valor de  $e_1$  para um  $D$  predeterminado.

Por exemplo, suponhamos que se queira determinar, pela fórmula de Clavarino a espessura estaticamente necessária para resistir à pressão interna nos tubos de ferro fundido da classe  $D$  da especificação da American Standards Association.

Essas normas fixam :

$\rho = 300$  libras por polegada quadrada ; tensão de ruptura 11.000 libras por polegada quadrada ; coeficiente de segurança 2,5 ; logo

$$\bar{\sigma} = \frac{11.000}{2,5} = 4.400 \text{ libras por polegada quadrada.}$$

Portanto,

$$k = \frac{\rho}{\bar{\sigma}} = \frac{300}{4.400} = 0,0682 \text{ ao qual corresponde}$$

$$\frac{e_1}{D} = 0,03025.$$

Em geral, para um conduto forçado, fixados  $\rho$  e  $\bar{\sigma}$ , a espessura estaticamente necessária para resistir à pressão interior, pela fórmula de Clavarino é obtida por :

$$e_1 = b D \quad (4.7), \text{ na qual}$$

$b$  depende de  $\rho$  e  $\bar{\sigma}$ .

Existindo apenas a pressão externa  $\rho_e$ , a máxima tensão será :

$$\bar{\sigma}_1 = -\rho_e \cdot \frac{D_e^2(2-\nu)}{D_e^2 - D^2} \quad (4.8)$$

(o sinal negativo denotando compressão).

Como para o caso da pressão interior poderíamos deduzir as seguintes fórmulas :

$$\rho_e = -\bar{\sigma}_1 \frac{D_e^2 - D^2}{D_e^2(2-\nu)} \quad (4.9)$$

$$k_1 = \frac{D_e^2 - D^2}{D_e^2(2-\nu)} \quad (4.10)$$

$$\bar{\sigma}_1 = -\frac{\rho_e}{k} \text{ ou } \rho_e = -k \bar{\sigma}_1 \quad (4.11),$$

A fórmula (4.9) aplicada a tubos de ferro fundido daria :

$$k_1 = 2,312 \frac{\frac{e_1}{D} \left[ 1 + \frac{e_1}{D} \right]}{\left[ 1 + 2 \frac{e_1}{D} \right]^2} \quad (4.12),$$

permitindo considerações análogas às feitas a partir da fórmula (4.6)

**5. Aplicação da fórmula de Clavarino aos tubos de paredes delgadas** — A relação entre a espessura  $e_1$  e o diâmetro externo  $D_e$  de um tubo serve de base à sua classificação em uma das duas classes : parêdes espessas ou parêdes delgadas.

Convenciona-se classificar como tubos de parêdes delgadas aqueles para os quais  $\frac{e_1}{D_e} \leq 0,1$ . Quase to-

dos os tubos metálicos utilizados na Hidráulica Aplicada, e, em particular, todos os tubos de ferro fundidos empregados nas rôdes de distribuição de água potável, podem ser enquadrados entre os de parêdes delgadas. As fórmulas gerais, apresentadas no parágrafo anterior, são suscetíveis de simplificação para o caso das parêdes delgadas. Assim, para tubos de ferro fundido, eliminando-se  $D$  na fórmula (4.5), podemos escrever

$$k = \frac{400 \frac{e_1}{D_e} \left[ 1 - \frac{e_1}{D_e} \right]}{46 \left[ 1 - 2 \frac{e_1}{D_e} \right]^2 + 127} \quad (5.1),$$

a qual para  $\frac{e_1}{D_e} = 0,1$ , reduz-se a

$$k = 2,31 \frac{e_1}{D_e} \quad (5.2),$$

que levado a (4.4) conduz a

$$\bar{\sigma} = \frac{\rho D_e}{2,31 e_1} \quad (5.3)$$

$$e \quad e_1 = \frac{\rho D_e}{2,31 \bar{\sigma}} \quad (5.4)$$

(5.4) é a fórmula de Clavarino para o dimensionamento de tubos de ferro fundido de parêdes delgadas, sujeitos à pressão interior. Em função do diâmetro interno a fórmula se escreve :

$$e_1 = \frac{\rho D}{1,925 \bar{\sigma}} \quad (5.5)$$

**6. Fórmula da tensão tangencial** — Baseando-se na teoria da maior tensão normal e admitindo-se tubos de parêdes delgadas, nas quais é lícito supor que as tensões se distribuam uniformemente, a tensão tangencial, que é a predominante, ocasionada por uma pressão interior  $\rho$  em um tubo de diâmetro interno  $D$  e espessura  $e_1$  vale :

$$\bar{\sigma} = \frac{\rho D}{2e_1} \quad (6.1),$$

de onde tiramos

$$e_1 = \frac{\rho D}{2\bar{\sigma}} \quad (6.2)$$

A expressão (6.2) chama-se a fórmula da tensão tangencial e é a que serve de base ao dimensionamento dos condutos forçados em quase todas as especificações européias e norte-americanas.

É de se ressaltar a relativa concordância entre as fórmulas (5.5) e (6.2) que apresentam discrepâncias inferiores a 4%.

Algumas normas técnicas norte-americanas preconizam expressões, que são obtidas, com ligeiras alterações, da fórmula da tensão tangencial. Por exemplo, a chamada fórmula de Barlow, indicada no "Código de construção de caldeiras" da A.S.M.E., é a própria fórmula da tensão tangencial na qual o diâmetro interno  $D$  é substituído pelo externo  $D_e$ , isto é

$$\bar{\sigma} = \frac{\rho D_e}{2 e_1} \quad (6.3)$$

A especificação federal norte-americana WW-P-421 para tubos de ferro fundidos centrifugados, estipula a determinação da espessura da parede

do encanamento pela seguinte fórmula desenvolvida por Fairchild (5).

$$e = \frac{s(p+p')D}{2\sigma_t} + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.4)$$

na qual

$p$  = máxima pressão interna, em lb/pol<sup>2</sup>

$p'$  = pressão devida aos golpes de ariete, em lb/pol<sup>2</sup>

$s$  = coeficiente de segurança

$\sigma_t$  = tensão limite à tração, lb/pol<sup>2</sup>

$e$  e  $D$  são expressos em polegadas

A WW-P-421 fixa os seguintes valores :

$s = 5$

$\sigma_t = 25.000 \text{ lb/pol}^2$ ,

de modo que (6.4) transforma-se em :

$$e = \frac{(p+p') D}{10.000} + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.5)$$

É fácil ver que o primeiro termo da fórmula de Fairchild é a própria fórmula da tensão tangencial, na qual se acresce a pressão interior  $p$  da pressão  $p'$ , ocasionada por eventuais ações dinâmicas.

O termo  $\frac{0,28}{D^{0,15}}$  é empírico e representa o termo

adicional para fazer face à resistência mecânica e aos efeitos de corrosão.

São aconselhados para  $p'$  os seguintes valores :

DIAMETRO TUBO (pol)	$p'$ (lb/pol <sup>2</sup> )
De 3 a 10	120
,, 12 a 18	110
20	100
acima de 20	95

(5) Jour. Am. W. W. Assoc. 1926, pág. 208.

Relativamente a  $\rho$  os valores adotados nos Estados Unidos são 100, 150, 200 e 250 lb/pol<sup>2</sup> para as quatro classes normais de tubos de ferro fundido, dando lugar assim aos seguintes valores para  $(\rho + \rho')$ .

DIAMETRO TUBO (pol)	$(\rho + \rho')$ lb/pol <sup>2</sup>			
	CLASSE 100	CLASSE 150	CLASSE 200	CLASSE 250
De 3 a 10	220	270	320	370
" 12 a 18	210	260	310	360
20	200	250	300	350
acima de 20	195	245	295	345

Se adotarmos, para cada classe, os maiores valores da soma  $p + p'$ , teremos, as seguintes expressões, que fornecem, em polegadas, as espessuras dos tubos de ferro fundido centrifugados :

$$\text{classe 100} \quad e = 0,022 D + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.6)$$

$$\text{classe 150} \quad e = 0,027 D + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.7)$$

$$\text{classe 200} \quad e = 0,032 D + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.8)$$

$$\text{classe 250} \quad e = 0,037 D + \frac{0,28}{D^{0,15}} \quad (6.9)$$

Exprimindo  $D$  em metros, as espessuras, em m, serão :

$$\text{classe 100} \quad e = 0,022 D + \frac{0,0041}{D^{0,15}} \quad (6.10)$$

$$\text{classe 150} \quad e = 0,027 D + \frac{0,0041}{D^{0,15}} \quad (6.11)$$

$$\text{classe 200} \quad e = 0,032 D + \frac{0,0041}{D^{0,15}} \quad (6.12)$$

$$\text{classe 250} \quad e = 0,037 D + \frac{0,0041}{D^{0,15}} \quad (6.13)$$

**7. Fórmula da American Standards Association (A-21)** — O método de dimensionamento de tubos de ferro fundido, recentemente preconizado pela American Standards Association, leva em conta as tensões ocasionadas nas paredes dos canos pela ação simultânea da pressão interior e das cargas externas. O método baseia-se em experiências feitas pelo "Sectional Commitee A-21" e pelo "Iowa State College". As experiências do "Iowa State College" tiveram por principal objetivo determinar a maneira pela qual as cargas externas eram transmitidas a tubos enterrados a várias profundidades; o "Sectional Commitee A-21", estudou, particularmente, a influência das várias maneiras de suportar o tubo relativamente à ação simultânea da pressão interna e das cargas externas.

Para tubos de ferro fundido destinados ao transporte de água, quatro métodos comuns de colocação em valas ("field conditions") são considerados:

- A — Vala de fundo plano, terra sem apiloamento
- B — Vala de fundo plano, terra apiloada
- C — Berços de apôio, terra sem apiloamento
- D — Berços de apôio, terra apiloada.

Os estudos do "Sectional Committee A-21" mostraram que, em um tubo sujeito simultaneamente à carga externa e à pressão interna, uma combinação genérica da pressão interna e da carga externa capaz de produzir a ruptura, satisfaz, com suficiente aproximação, à equação

$$\omega = \frac{W}{\sqrt{P-\rho}} \quad (7.1)$$

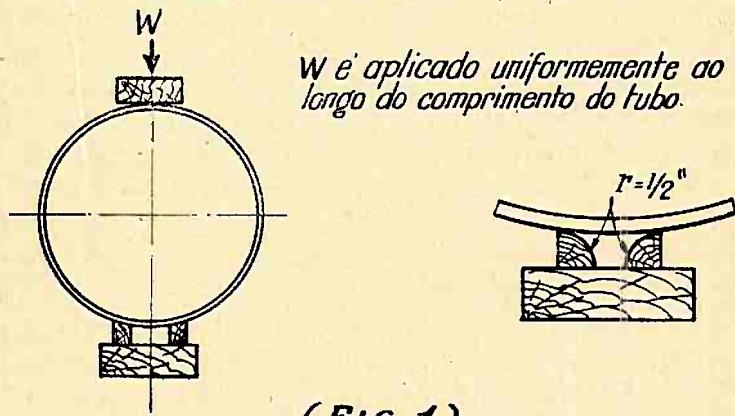
na qual :

$$P = \text{pressão interna de ruptura} = \frac{2e_1 \sigma_t}{D} (\text{lb/pol}^2)$$

$W$  = carga externa de ruptura ( $\text{lb/pé}$ ), determinada pelo "three-edge bearing test".

$\sigma_t$  = tensão limite à tração

$\rho$  e  $\omega$  — representam uma combinação genérica da pressão interna e carga externa, capaz de produzir a fratura.



(FIG. 1)

A condição de carregamento, realizada em laboratório, e conhecida por "three edge bearing load" está representada na figura 1

A carga externa de ruptura  $W$  (lb/pé) é calculada pela seguinte fórmula :

$$W = \frac{e^2 \sigma_0}{0,0795 (D + e_1)} \quad (7.2),$$

na qual

$\sigma_0$  = tensão de ruptura (lb/pé<sup>2</sup>) determinada pelo "three edge bearing test"  
 $e_1$  e  $D$  expressos em polegadas.

A equação (7.1) pressupõe que a carga externa se aplique aos tubos nas condições do "three edge bearing test", o que não acontece em nenhum dos quatro tipos comuns de colocação dos canos nas valas. Daí a necessidade da introdução de fatores que devem afetar as cargas reais para dar lugar a efeitos análogos às condições teóricas das experiências de laboratório. Os coeficientes, pelos quais as cargas externas devem ser divididas, foram determinados experimentalmente, para os vários diâmetros e vários tipos de colocação e constam da tabela seguinte, retirada da A-21-1-1939 — "Manual for the computation of strength and thickness of cast iron pipe" :

Tipo de colocação	DIÂMETRO DO TUBO, pol.									
	4"	6"	8"	10"	12"	14"	16"	18"	20"	24"
A	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15
B	1,29	1,32	1,34	1,36	1,38	1,41	1,43	1,45	1,47	1,52
C	0,22	0,31	0,40	0,50	0,60	0,67	0,73	0,78	0,81	0,87
D	0,82	0,83	0,84	0,86	0,88	0,91	0,95	0,98	1,01	1,07

No método de dimensionamento da A-21-1-1939, a pressão interna, que, agindo sósinha causará o arrebentamento, e, a carga externa, que agindo isoladamente causará a ruptura, são figuradas separadamente para um diâmetro e espessura escolhidos. Por meio de um método empírico, relativamente simples, podem ser determinadas combinações da pressão interna e cargas externas que causem a ruptura, o que torna possível achar por tentativas a espessura necessária para suportar uma determinada combinação de cargas. (6)

Analizando os métodos gráficos, Stokes propôz a seguinte equação para a determinação da espessura dos tubos : (7)

$$e_1 = \frac{s(p+p')}{2\sigma_T} + \left( \frac{0,0795}{\sigma_c} D \times \frac{sw}{c} \right)^2 \left( 1 + \frac{e_1}{D} \right) \left( \frac{1}{e_1^3} \right) \quad (7.3)$$

na qual :

$e_1$  = espessura da parêde do tubo, pol.

$s$  = fator de segurança, 2.5 segundo a A-21

$p$  = pressão interna, lb/pol<sup>2</sup>

$p'$  = pressão devida aos golpes de ariete, lb/pol<sup>2</sup>

$D$  = diâmetro interno, pol.

$\sigma_T$  = tensão limite à tração

$\sigma_c$  = tensão de ruptura no "three edge bearing test"

$w$  = carga externa vertical, lb/pé

$c$  = coeficiente de adaptação das condições reais de assentamento ao "three-edge bearing test".

(ver tabela de pág. 24)

(6) Manual for the computation of strength and thickness of cast iron pipe — A-21 — pág. 16.

(7) Jour. A. W. W. A. — Outubro 1939, pág. 1670.

Para  $\sigma_T$  e  $\sigma_c$  são aconselhados, pela A-21, os seguintes valores

$$\begin{aligned}\sigma_T &= 11.000 \text{ lb/pol}^2 \\ \sigma_c &= 31.000 \text{ lb/pol}^2.\end{aligned}$$

Em unidades métricas, exprimindo  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\sigma_T$  e  $\sigma_c$  em  $\text{kg/cm}^2$ ,  $\omega$  em  $\text{kg/m}$ ,  $D$  e  $e_1$  em  $m$  a fórmula (7.3) se transforma em :

$$e_1 = \frac{s(\rho + \rho')D}{2\sigma_T} + \left( \frac{0,0000945D}{\sigma_c} \times \frac{\omega}{c} \right)^2 \left( 1 + \frac{e_1}{D} \right)^2 \left( \frac{1}{e_1^3} \right) \quad (7.4)$$

**8. Observações gerais sobre as fórmulas para o cálculo da espessura dos condutos forçados.** As espessuras calculadas por qualquer das fórmulas anteriores (com exceção da de Fairchild) devem ainda ser adicionados térmos empíricos para atender aos esforços não previstos no dimensionamento, às tolerâncias admitidas na fundição, aos efeitos de corrosão, à segurança no transporte e colocação dos tubos, etc..

Nas fórmulas mais completas, como a da A.S.A., por exemplo, a ação dinâmica dos golpes de ariete e a ação das cargas externas já são levadas em consideração no dimensionamento ; nessas, o término adicional, empírico, atende apenas aos efeitos de corrosão e às tolerâncias na fundição ; nas fórmulas mais simples, a da tensão tangencial, "verbi-gratia", o término adicional é estabelecido tendo em vista também as ações, não previstas, dos golpes de ariete e das cargas externas.

Como quer que seja, designando o término adicional, empírico, por  $a$ , a espessura real de um conduto forçado será

$$e = e_1 + a \quad (8.1),$$

na qual  $e_1$  é calculado por uma das fórmulas anteriores. Quanto a  $a$ , para cada classe de tubos, costumam as normas fixar-lhe um valor constante (8).

Assim, por exemplo, as especificações norteamericanas da A.S.A., prescrevem para o acréscimo relativo à corrosão 0,08 pol e para as tolerâncias de fundição também 0,08 pol. (para diâmetros situados no intervalo 2'' | — | 20''); as especificações francesas fixam para  $a$  o valor global 0,008 m, etc..

Baseando-se em considerações análogas às feitas na fórmula de Clavarino, para diâmetros variando no intervalo 0,m05 | — | 0,m500, tôdas as fórmulas para o cálculo da espessura dos tubos de ferro fundido, podem ser conduzidas à forma geral :

$$e = b D + a \quad (8.2),$$

sendo o coeficiente  $b$  função das propriedades físicas do material de que é constituído o cano e dos esforços a que deverá ele resistir e  $a$  aproximadamente constante, para cada classe de material.

Nas aplicações, assume particular importância a determinação numérica de  $b$  e  $a$ , para as diversas classes de tubos de ferro fundido usados nas rôdes de distribuição. Como variados são os critérios de dimensionamento, conforme esclarecemos, preferimos determinar  $b$  e  $a$ , partindo diretamente dos valores efetivos indicados nos catálogos dos fabricantes, aplicando o método dos mínimos quadrados.

Assim, se supuzermos,

$$e = f(D) = bD + a,$$

---

(8) Às vezes, o termo empírico adicional é apresentado em função do diâmetro  $D$ , como, por exemplo, na fórmula de Fairchild.

e organizarmos, para uma determinada classe de tubos, uma tabela abrangendo  $n$  diâmetros  $D$  e as correspondentes espessuras  $e$ , os coeficientes  $b$  e  $a$  poderão ser tirados das equações de condição :

$$\begin{cases} \Sigma e = na + b\Sigma D \\ \Sigma De = a\Sigma D + b\Sigma D^2 \end{cases}$$

Fizemos, para  $D$  variando no intervalo  $0,05\text{m} \rightarrow 0,500\text{m.}$ , a determinação de  $b$  e  $a$  para os tubos de ferro fundido de ponta e bolsa mais empregados em nossas rôdes de distribuição e que são :

#### I — *Tubos de procedência nacional*

Dimensões de acordo com o “Ante-projeto de especificação” elaborado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas, seguido pelos produtores nacionais : (9)

- a) classe L.A. — pressão de ensaio  $15 \text{ kg/cm}^2$
- b) „ A. — „ „ „  $20 \text{ kg/cm}^2$
- c) „ B. — „ „ „  $25 \text{ kg/cm}^2$

#### II — *Tubos de procedência européia*

Geralmente franceses, com dimensões de acordo com o “Cahier des charges — Ville Paris — 1935”, seguido no Catálogo da “S.A. des Hauts Fourneaux et Fonderies de Pont-à-Mousson”, com pressões de ensaio de  $25 \text{ kg/cm}^2$  para  $0,050 \leq D \leq 0,175 \text{ m}$ ;  $20 \text{ kg/cm}^2$  para  $0,200 \leq D \leq 0,300 \text{ m}$ ;  $15 \text{ kg/cm}^2$  para  $D \geq 0,325 \text{ m..}$

---

(9) Catálogos da Companhia Metalúrgica Barbará e Companhia Ferro Brasileira S/A.

### III — *Tubos de procedência norte-americana*

Dimensões de acordo com as especificações da American Standards Association (ASA), adotadas pela American Society for Testing Materials (ASTM) e American Water Works Association (AWWA) e seguidas pelos fabricantes norte-americanos :

- a) Classe A — pressão de ensaio  $\left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 21 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D < 0,500 \text{ m.} \\ 150 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 10,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D \geq 0,500 \text{ m.} \end{array} \right.$
- b) Classe B — pressão de ensaio  $\left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 21 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D < 0,500 \text{ m.} \\ 200 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 14 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D \geq 0,500 \text{ m.} \end{array} \right.$
- c) Classe C — pressão de ensaio  $\left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 21 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D < 0,500 \text{ m.} \\ 250 \text{ lb/pol}^2 \\ \text{ou } 17,6 \text{ kg/cm}^2 \text{ p}^a D \geq 0,500 \text{ m.} \end{array} \right.$
- d) Classe D — pressão de ensaio  $300 \text{ lb/pol}^2$  ou  $21 \text{ kg/cm}^2$ .

Os quadros seguintes fornecem os elementos para o cálculo dos coeficientes  $a$  e  $b$  pelo método dos mínimos quadrados, estando os seus valores indicados para cada classe de tubos.

Na última coluna de cada um dos quadros figuram os valores da espessura  $e$  calculados a partir das fórmulas deduzidas pelo método dos mínimos quadrados.

TUBOS DA CLASSE L. A. (A.B.N.T.)

	DIÂMETRO NOMINAL D (m)	ESPESSURA DA PAREDE e (m)	D.e	$D^2$	e calc.
	0,050	0,0070	0,00035	0,002500	0,0067
	0,075	0,0075	0,00056	0,005625	0,0071
	0,100	0,0075	0,00075	0,010000	0,0075
	0,125	0,0075	0,00094	0,015625	0,0079
	0,150	0,0080	0,00120	0,022500	0,0083
	0,175	0,0085	0,00149	0,030625	0,0087
	0,200	0,0090	0,00180	0,040000	0,0091
	0,225	0,0095	0,00214	0,050625	0,0095
	0,250	0,0100	0,00250	0,062500	0,0100
	0,300	0,0110	0,00330	0,090000	0,0108
	0,350	0,0120	0,00420	0,122500	0,0116
	0,400	0,0125	0,00500	0,160000	0,0124
	0,450	0,0130	0,00585	0,202500	0,0132
	0,500	0,0140	0,00700	0,250000	0,0140
$\Sigma$	3,350	0,1370	0,03708	1,065000	

Equações de condição

$$\begin{cases} 14 \ a + 3,35 \ b = 0,13700 \\ 3,35 \ a + 1,065 \ b = 0,03708 \end{cases}$$

$$a = 0,0059$$

$$b = 0,0163$$

$$e = 0,0163 \ D + 0,0059 \quad (8.3)$$

TUBOS DA CLASSE A (A.B.N.T.)

	DIÂMETRO NOMINAL <b>D</b> (m)	ESPESSURA DA PAREDE <b>e</b> (m)	<b>D.e</b>	<b>D<sup>2</sup></b>	<b>e</b> calc.
	0,050	0,0075	0,00037	0,002500	0,0075
	0,075	0,0080	0,00060	0,005625	0,0079
	0,100	0,0080	0,00080	0,010000	0,0083
	0,125	0,0085	0,00106	0,015625	0,0087
	0,150	0,0090	0,00135	0,022500	0,0091
	0,175	0,0095	0,00166	0,030625	0,0095
	0,200	0,0100	0,00200	0,040000	0,0099
	0,225	0,0105	0,00236	0,050625	0,0103
	0,250	0,0110	0,00275	0,062500	0,0107
	0,300	0,0115	0,00345	0,090000	0,0115
	0,350	0,0125	0,00438	0,122500	0,0122
	0,400	0,0130	0,00520	0,160000	0,0130
	0,450	0,0135	0,00607	0,202500	0,0138
	0,500	0,0145	0,00725	0,250000	0,0146
$\Sigma$	3,350	0,1470	0,03930	1,065000	

Equações de condição :

$$\begin{cases} 14 \ a + 3,35 \ b = 0,1470 \\ 3,35 \ a + 1,065 \ b = 0,0393 \end{cases}$$

$$a = 0,0067$$

$$b = 0,0157$$

$$e = 0,0157 \ D + 0,0067 \quad (8.4)$$

TUBOS DA CLASSE B. (A.B.N.T.)

E TIPO UNIVERSAL-PONT-À-MOUSSON

	DIÂMETRO NOMINAL <b>D</b> (m)	ESPESSURA DA PAREDE <b>e</b> (m)	<b>D.e</b>	<b>D<sup>2</sup></b>	<b>e</b> calc.
	0,050	0,0080	0,00040	0,002500	0,0082
	0,075	0,0085	0,00064	0,005625	0,0087
	0,100	0,0090	0,00090	0,010000	0,0091
	0,125	0,0095	0,00119	0,015625	0,0096
	0,150	0,0100	0,00150	0,022500	0,0100
	0,175	0,0105	0,00184	0,030625	0,0105
	0,200	0,0110	0,00220	0,040000	0,0109
	0,225	0,0115	0,00259	0,050625	0,0114
	0,250	0,0120	0,00300	0,062500	0,0118
	0,300	0,0130	0,00390	0,090000	0,0127
	0,350	0,0140	0,00490	0,122500	0,0136
	0,400	0,0145	0,00580	0,160000	0,0145
	0,450	0,0150	0,00675	0,202500	0,0154
	0,500	0,0160	0,00800	0,250000	0,0162
<b><math>\Sigma</math></b>	<b>3,350</b>	<b>0,1625</b>	<b>0,04361</b>	<b>1,065000</b>	

Equações de condição :

$$\begin{cases} 14 \ a + 3,35 \ b = 0,16250 \\ 3,35 \ a + 1,065 \ b = 0,04361 \end{cases}$$

$$a = 0,0073$$

$$b = 0,0179$$

$$e = 0,0179 \ D + 0,0073 \quad (8.5)$$

TUBOS DA CLASSE A. (A.S.A.)

	DIÂMETRO NOMINAL <b>D</b> (pol.)	ESPESSURA DA PAREDE <b>e</b> (pol.)	<b>D.e</b>	<b>D<sup>2</sup></b>	<b>e</b> calc.
	3	0,39	1,17	9	0,39
	4	0,42	1,68	16	0,41
	6	0,44	2,64	36	0,44
	8	0,46	3,68	64	0,47
	10	0,50	5,00	100	0,51
	12	0,54	6,48	144	0,54
	14	0,57	7,98	196	0,57
	16	0,60	9,60	256	0,61
	18	0,64	11,52	324	0,64
	20	0,67	13,40	400	0,68
	24	0,76	18,24	576	0,74
<b><math>\Sigma</math></b>	135	5,99	81,39	2121	

Equações de condição :

$$\begin{cases} 11a + 135b = 5,99 \\ 135a + 2121b = 81,39 \end{cases}$$

$$a = 0,336$$

$$b = 0,0170$$

$$e = 0,0170 D + 0,336, \text{ em polegadas} \quad (8.6)$$

$$e = 0,0170 D + 0,0085, \text{ em metros} \quad (8.7)$$

TUBOS DA CLASSE B. (A.S.A.)

	DIÂMETRO NOMINAL $D$ (pol.)	ESPESSURA DA PAREDE $e$ (pol.)	$D \cdot e$	$D^2$	$e_{\text{calc.}}$
	3	0,42	1,26	9	0,42
	4	0,45	1,80	16	0,44
	6	0,48	2,88	36	0,48
	8	0,51	4,08	64	0,53
	10	0,57	5,70	100	0,57
	12	0,62	7,44	144	0,62
	14	0,66	9,24	196	0,66
	16	0,70	11,20	256	0,71
	18	0,75	13,50	324	0,75
	20	0,80	16,00	400	0,80
	24	0,89	21,36	576	0,89
$\Sigma$	135	6,85	94,46	2121	

Equações de condição :

$$\begin{cases} 11a + 135b = 6,85 \\ 135a + 2121b = 94,46 \end{cases}$$

$$a = 0,348$$

$$b = 0,0224$$

$$e = 0,0224 D + 0,348, \text{ em polegadas} \quad (8.8)$$

$$e = 0,0224 D + 0,0088, \text{ em metros} \quad (8.9)$$

TUBOS DA CLASSE C (A.S.A..)

DIÂMETRO NOMINAL D (pol.)	ESPESSURA DA PAREDE e (pol.)	D.e	D <sup>2</sup>	e calc.
3	0,45	1,35	9	0,43
4	0,48	1,92	16	0,46
6	0,51	3,06	36	0,52
8	0,56	4,48	64	0,58
10	0,62	6,20	100	0,63
12	0,68	8,16	144	0,69
14	0,74	10,36	196	0,75
16	0,80	12,80	256	0,80
18	0,87	15,66	324	0,86
20	0,92	18,40	400	0,92
24	1,04	24,96	576	1,03
$\Sigma$	135	7,67	107,35	2121

Equações de condição :

$$\begin{cases} 11a + 135b = 7,67 \\ 135a + 2121b = 107,35 \end{cases}$$

$$a = 0,348$$

$$b = 0,0285$$

$$e = 0,0285 D + 0,348, \text{ em polegadas} \quad (8.10)$$

$$e = 0,0285 D + 0,0088, \text{ em metros} \quad (8.11)$$

TUBOS DA CLASSE D. (A.S.A.)

	DIÂMETRO NOMINAL D (pol.)	ESPESSURA DA PAREDE e (pol.)	D.e	$D^2$	e calc.
	3	0,48	1,44	9	0,46
	4	0,52	2,08	16	0,49
	6	0,55	3,30	36	0,56
	8	0,60	4,80	64	0,63
	10	0,68	6,80	100	0,69
	12	0,75	9,00	144	0,76
	14	0,82	11,48	196	0,82
	16	0,89	14,24	256	0,89
	18	0,96	17,28	324	0,96
	20	1,03	20,60	400	1,02
	24	1,16	27,84	576	1,15
$\Sigma$	135	8,44	118,86	2121	

Equações de condição :

$$\begin{cases} 11a + 135b = 8,44 \\ 135a + 2121b = 118,86 \end{cases}$$

$$a = 0,363$$

$$b = 0,0329$$

$$e = 0,0329 D + 0,363, \text{ em polegadas} \quad (8.12)$$

$$e = 0,0329 D + 0,0092, \text{ em metros} \quad (8.13)$$



## II — CUSTO DE UM CONDUTO FORÇADO.

**9. Peso por metro linear de um conduto forçado.** O peso por unidade de comprimento de um tubo de diâmetro interno  $D$  e espessura  $e$  é dado por

$$P_1 = \gamma_f \pi (D + e) \quad (9.1),$$

sendo  $\gamma_f$  o peso específico do material de que é feito o conduto. No capítulo anterior vimos que, fixadas as condições de trabalho do conduto, resulta  $e = a + b D$  (8.2), e, portanto :

$$\begin{aligned} P_1 &= \gamma_f \pi (D + a + bD) (a + bD) = \\ &= \gamma_f \pi (A + BD + CD^2), \end{aligned} \quad (9.2)$$

na qual

$$A = a^2, \quad B = a(1 + 2b), \quad C = b(1 + b), \quad (9.3)$$

são coeficientes que dependem das condições de trabalho da tubulação.

O peso de um trecho de conduto de comprimento  $L$  e diâmetro  $D$  variável será :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^L P_1 ds = \gamma_f \pi \left[ \int_0^L A ds + \int_0^L BD ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L CD^2 ds \right] \end{aligned} \quad (9.4)$$

e, no caso do diâmetro  $D$  ser constante ao longo de  $L$ :

$$P = P_1 L = \gamma \pi (A + BD + CD^2) L = \\ = [\alpha + \beta D + \gamma D^2] L \quad (9.5)$$

É de se observar que as fórmulas (9.4) e (9.5) não levam em conta a variação da espessura correspondente às bolsas dos tubos. Sabendo-se que, comercialmente, o peso por unidade de comprimento de um tubo se obtém dividindo o seu peso total (incluindo a bolsa) pelo seu comprimento útil, os valores efetivos de  $A$ ,  $B$  e  $C$  e, consequentemente, os de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , para as aplicações, serão obtidos dos valores teóricos, por assim dizer, dados pela fórmula (9.3), multiplicando-os por oportunos coeficientes, dependentes das características das bolsas. Para a determinação numérica dos valores efetivos de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  das diversas classes de tubos de ferro fundido usados nas rôdes de distribuição, julgamos preferível basearmo-nos diretamente nos valores de  $P_1$  indicados nas diversas normas e repetidos nos catálogos de fabricantes. Aplicando-se o método dos mínimos quadrados, sendo  $n$  o número de diâmetros tabelados, as equações de condição serão, no caso,

$$\begin{cases} n\alpha + \beta \sum D + \gamma \sum D^2 = \sum P_1 \\ \alpha \sum D + \beta \sum D^2 + \gamma \sum D^3 = \sum P_1 D \\ \alpha \sum D^2 + \beta \sum D^3 + \gamma \sum D^4 = \sum P_1 D^2. \end{cases}$$

Fizemos a determinação numérica de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  para cada uma das classes  $LA$ ,  $A$  e  $B$  do "Ante projeto de especificação" da Associação Brasileira de Normas Técnicas e das classes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  da especificação da American Standards Association.

As tabelas de pag. 40 a 46 indicam os valores obtidos e patenteiam a validade da fórmula (9.5) no intervalo 0,05 |————| 0,500m. de variação de  $D$ , pois os desvios entre os valores de  $P_1$  por ela calculados e os constantes de catálogos de fabricantes estão, com raríssimas exceções, indicadas nas tabelas com asteriscos, abaixo de cinco por cento, máxima tolerância na variação do peso por metro linear, permitida pela especificação da A.S.A. e pelo "Ante-projeto de especificação" da A.B.N.T..



TUBOS DA CLASSE L. A. (A.B.N.T.)

DIÂM. NOMIN. D (m)	PESO POR M P <sub>1</sub> (kg/m)	P <sub>1</sub> .D	D <sup>2</sup>	P <sub>1</sub> D <sup>2</sup>	D <sup>3</sup>	D <sup>4</sup>	P <sub>1</sub> calc.
0,050	10,00	0,500	0,002500	0,0250	0,000125	0,00000625	9,50
0,075	16,00	1,200	0,005625	0,0900	0,000421	0,00003165	14,80*
0,100	20,00	2,000	0,010000	0,2000	0,001000	0,00010000	20,40
0,125	25,00	3,125	0,015625	0,3906	0,001955	0,00024420	26,25
0,150	32,00	4,800	0,022500	0,7200	0,003375	0,00050625	33,20
0,175	39,00	6,825	0,030625	1,1944	0,005360	0,00093800	41,50
0,200	47,00	9,400	0,040000	1,8800	0,008000	0,00160000	47,80
0,225	55,00	12,375	0,050625	2,7844	0,011390	0,00256000	55,80
0,250	64,00	16,000	0,062500	4,0000	0,015625	0,00390600	64,30
0,300	84,00	25,200	0,090000	7,5600	0,027000	0,00810000	82,70
0,350	106,00	37,100	0,122500	12,9850	0,042900	0,01500000	103,00
0,400	125,00	50,000	0,160000	20,0000	0,064000	0,02560000	124,70
0,450	146,00	65,700	0,202500	29,5650	0,091250	0,04100000	148,00
0,500	174,00	87,000	0,250000	43,5000	0,125000	0,06250000	174,00
3,350	943,00	321,225	1,065000	124,8944	0,397401	0,16209235	

*Equações de condição*

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 \alpha + 3,350 \beta + 1,065 \gamma = 943,000 \\ 3,350 \alpha + 1,065 \beta + 0,397 \gamma = 321,225 \\ 1,065 \alpha + 0,397 \beta + 0,162 \gamma = 124,894 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 0,25 ; \quad \beta = 165,00 ; \quad \gamma = 365,00$$

$$P_1 = 0,25 + D(165,00 + 365,00 D) \quad (9.6)$$

TUBOS DA CLASSE A. (A.B.N.T.)

DIÂM. NOMIN. D (m)	PESO POR M. P <sub>1</sub> (kg/m)	P <sub>1</sub> D	D <sup>2</sup>	P <sub>1</sub> D <sup>2</sup>	D <sup>3</sup>	D <sup>4</sup>	P <sub>1</sub> calc.
0,050	10,70	0,535	0,002500	0,0268	0,000125	0,00000625	10,30
0,075	17,00	1,275	0,005625	0,0956	0,000421	0,00003165	16,00*
0,100	21,00	2,100	0,010000	0,2100	0,001000	0,00010000	22,05
0,125	27,00	3,375	0,015625	0,4220	0,001955	0,00024420	28,70*
0,150	35,00	5,250	0,022500	0,7875	0,003375	0,00050625	35,80
0,175	43,00	7,525	0,030625	1,3169	0,005360	0,00093800	43,40
0,200	51,00	10,200	0,040000	2,0400	0,008000	0,00160000	51,00
0,225	60,00	13,500	0,050625	3,0375	0,011390	0,00256000	59,30
0,250	69,00	17,250	0,062500	4,3125	0,015625	0,00390600	67,90
0,300	86,00	25,800	0,090000	7,7400	0,027000	0,00810000	86,40
0,350	109,00	38,150	0,122500	13,2525	0,042900	0,01500000	106,80
0,400	129,00	51,600	0,160000	20,6400	0,064000	0,02560000	128,40
0,450	150,00	67,500	0,202500	30,3750	0,091250	0,04100000	151,60
0,500	178,00	89,000	0,250000	44,5000	0,125000	0,06250000	177,00
3,350	985,70	333,060	1,065000	128,7563	0,397401	0,16209235	

*Equações de condição*

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 \alpha + 3,350 \beta + 1,065 \gamma = 985,700 \\ 3,350 \alpha + 1,065 \beta + 0,397 \gamma = 333,060 \\ 1,065 \alpha + 0,397 \beta + 0,162 \gamma = 128,756 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 0,10 ; \quad \beta = 189,00 ; \quad \gamma = 330,00$$

$$P_1 = 0,10 + D(189,00 + 330,00 D) \quad (9.7)$$

TUBOS DA CLASSE B. (A.B.N.T.)

DIÂM. NOMIN. D (m)	PESO POR M. $P_1$ (kg/m)	$P_1 D$	$D^2$	$P_1 D^2$	$D^3$	$D^4$	$P_1$ calc.
0,050	12,00	0,600	0,002500	0,0300	0,000125	0,00000625	13,30*
0,075	18,00	1,350	0,005625	0,1013	0,000421	0,00003165	18,90
0,100	24,00	2,400	0,010000	0,2400	0,001000	0,00010000	25,10
0,125	31,00	3,875	0,015625	0,4844	0,001955	0,00024420	32,40
0,150	39,00	5,850	0,022500	0,8775	0,003375	0,00050625	39,10
0,175	47,00	8,225	0,030625	1,4394	0,005360	0,00093800	47,00
0,200	56,00	11,200	0,040000	2,2400	0,008000	0,00160000	55,50
0,225	66,00	14,850	0,050625	3,3412	0,011390	0,00256000	64,70
0,250	76,00	19,000	0,062500	4,7500	0,015625	0,00390600	74,20
0,300	98,00	29,400	0,090000	8,8200	0,027000	0,00810000	95,10
0,350	123,00	43,050	0,122500	15,0675	0,042900	0,01500000	118,50
0,400	145,00	58,000	0,160000	23,2000	0,064000	0,02560000	144,00
0,450	168,00	75,600	0,202500	34,0200	0,091250	0,04100000	172,50
0,500	199,00	99,500	0,250000	49,7500	0,125000	0,06250000	202,10
3,350	1102,00	372,900	1,065000	144,3613	0,397401	0,16209235	

*Equações de condição.*

$$\begin{cases} 14 \alpha + 3,350 \beta + 1,065 \gamma = 1102,000 \\ 3,350 \alpha + 1,065 \beta + 0,397 \gamma = 372,900 \\ 1,065 \alpha + 0,397 \beta + 0,162 \gamma = 144,361 \end{cases}$$

$$\alpha = 4,00 ; \quad \beta = 165,00 ; \quad \gamma = 462,00$$

$$P_1 = 4,00 + D(165,00 + 462,00 D) \quad (9.8)$$

TUBOS DA CLASSE A. (A.S.A.)

DIÂM. NOM. D (m)	PESO POR M. $P_1$ (kg/m)	$P_1 D$	$D_2$	$P_1 D_2$	$D^3$	$D^4$	$P_1$ calc.
0,075	21,50	1,613	0,005625	0,1210	0,000421	0,00003165	21,60
0,100	29,70	2,970	0,010000	0,2970	0,001000	0,00010000	28,90
0,150	45,60	6,840	0,022500	1,0250	0,003375	0,00050625	44,90
0,200	63,50	12,700	0,040000	2,5400	0,008000	0,00160000	63,40
0,250	84,80	21,200	0,062500	5,3000	0,015625	0,00390000	84,40
0,300	107,40	32,220	0,090000	9,6660	0,027000	0,00810000	107,80
0,350	133,00	46,550	0,122500	16,3000	0,042900	0,01500000	133,60
0,400	161,00	64,400	0,160000	25,8000	0,064000	0,02560000	162,00
0,450	192,00	86,400	0,202500	38,9500	0,091250	0,04100000	192,60
0,500	222,50	111,250	0,250000	55,6250	0,125000	0,06250000	226,00
0,600	304,00	182,400	0,360000	109,2500	0,216000	0,12960000	299,90
3,375	1365,00	568,543	1,325625	264,8740	0,594571	0,28793790	

*Equações de condição :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \alpha + 3,375 \beta + 1,326 \gamma = 1365,000 \\ 3,375 \alpha + 1,326 \beta + 0,595 \gamma = 568,543 \\ 1,326 \alpha + 0,595 \beta + 0,288 \gamma = 264,874 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 4,00 ; \quad \beta = 199,00 ; \quad \gamma = 490,00$$

$$P_1 = 4,00 + D(199,00 + 490,00 D) \quad (9.9)$$

TUBOS DA CLASSE B.(A.S.A.)

DIÂM. NOM. D (m)	PESO POR M. $P_1$ (kg/m)	$P_1 D$	$D^2$	$P_1 D^2$	$D^3$	$D^4$	$P_1$ calc.
0,075	24,10	1,808	0,005625	0,1356	0,000421	0,00003165	24,30
0,100	32,20	3,220	0,010000	0,3220	0,001000	0,00010000	32,00
0,150	49,50	7,425	0,022500	1,1138	0,003375	0,00050625	49,60
0,200	70,50	14,100	0,040000	2,8200	0,008000	0,00160000	70,30
0,250	95,00	23,750	0,062500	5,9375	0,015625	0,00390000	94,20
0,300	122,00	36,600	0,090000	10,9800	0,027000	0,00810000	121,00
0,350	152,00	53,200	0,122500	18,6000	0,042900	0,01500000	150,80
0,400	185,50	74,200	0,160000	29,6800	0,064000	0,02560000	184,10
0,450	222,50	100,125	0,202500	45,0562	0,091250	0,04100000	220,00
0,500	260,00	130,000	0,250000	65,0000	0,125000	0,06250000	259,50
0,600	346,00	207,600	0,360000	124,5600	0,216000	0,12960000	347,30
3,375	1559,30	652,028	1,325625	304,2051	0,594571	0,28793790	

Equações de condição:

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \alpha + 3,375 \beta + 1,326 \gamma = 1559,300 \\ 3,375 \alpha + 1,326 \beta + 0,595 \gamma = 652,028 \\ 1,326 \alpha + 0,595 \beta + 0,288 \gamma = 304,205 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 6,20 ; \quad \beta = 198,00 ; \quad \gamma = 618,00$$

$$P_1 = 6,20 + D(198,00 + 618,00 D) \quad (9.10)$$

TUBOS DA CLASSE C. (A.S.A.)

DIÂM. NOM. D (m)	PESO POR M. $P_1$ (kg/m)	$P_1 D$	$D^2$	$P_1 D^2$	$D^3$	$D^4$	$P_1$ calc.
0,075	25,40	1,905	0,005625	0,1429	0,000421	0,00003165	28,30*
0,100	34,60	3,460	0,010000	0,3460	0,001000	0,00010000	35,70
0,150	53,10	7,965	0,022500	1,1948	0,003375	0,00050625	53,80
0,200	77,20	15,440	0,040000	3,0880	0,008000	0,00160000	76,50
0,250	105,10	26,275	0,062500	6,5688	0,015625	0,00390000	103,70
0,300	136,10	40,830	0,090000	12,2490	0,027000	0,00810000	135,20
0,350	173,50	60,725	0,122500	21,2538	0,042900	0,01500000	171,30
0,400	214,00	85,600	0,160000	34,2400	0,064000	0,02560000	212,20
0,450	260,00	117,000	0,202500	52,6500	0,091250	0,04100000	257,00
0,500	310,00	155,000	0,250000	77,5000	0,125000	0,06250000	307,00
0,600	415,00	249,000	0,360000	149,4000	0,216000	0,12960000	419,90
3,375	1804,00	763,200	1,325625	358,6333	0,594571	0,28793790	

*Equações de condição :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \alpha + 3,375 \beta + 1,326 \gamma = 1804,000 \\ 3,375 \alpha + 1,326 \beta + 0,595 \gamma = 763,200 \\ 1,326 \alpha + 0,595 \beta + 0,288 \gamma = 358,633 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 13,00 ; \quad \beta = 137,00 ; \quad \gamma = 902,00$$

$$P_1 = 13,00 + D(137,00 + 902,00 D) \quad (9.11)$$

TUBOS DA CLASSE D. (A.S.A.)

DIÂM. NOM. D (m)	PESO POR M. $P_1$ (kg/m)	$P_1 D$	$D^2$	$P_1 D^2$	$D^3$	$D^4$	$P_1$ calc.
0,075	26,80	2,010	0,005625	0,1510	0,000421	0,00003165	28,40*
0,100	37,10	3,710	0,010000	0,3710	0,001000	0,00010000	36,80
0,150	56,80	8,520	0,022500	1,2800	0,003375	0,00050625	57,00
0,200	82,80	16,560	0,040000	3,3120	0,008000	0,00160000	82,30
0,250	114,00	28,500	0,062500	7,1250	0,015625	0,00390000	112,40
0,300	148,50	44,550	0,090000	13,3650	0,027000	0,00810000	147,50
0,350	192,00	67,200	0,122500	23,5200	0,042900	0,01500000	188,00
0,400	236,00	94,400	0,160000	37,7600	0,064000	0,02560000	232,40
0,450	285,00	128,250	0,202500	57,7130	0,091250	0,04100000	283,00
0,500	341,00	170,500	0,250000	85,2500	0,125000	0,06250000	337,00
0,600	456,00	273,600	0,360000	164,1600	0,216000	0,12960000	461,30
3,375	1976,00	837,800	1,325625	394,0070	0,594571	0,28793790	

*Equações de condição :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \alpha + 3,375 \beta + 1,326 \gamma = 1976,000 \\ 3,375 \alpha + 1,326 \beta + 0,595 \gamma = 837,800 \\ 1,326 \alpha + 0,595 \beta + 0,288 \gamma = 394,007 \end{array} \right.$$

$$\alpha = 11,00 ; \quad \beta = 159,00 ; \quad \gamma = 986,00$$

$$P_1 = 11,00 + D(159,00 + 986,00D) \quad (9.12)$$

**10. Crítica à hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro de um conduto forçado.** — As despesas a serem efetuadas na execução de um conduto forçado, trabalhando por gravidade, podem ser agrupadas em duas categorias :

a) despesas com a aquisição e colocação propriamente dita da tubulação, dependentes essencialmente do peso do conduto, e, portanto, do seu diâmetro ;

b) despesas com a excavação e recobrimento das valas, consolidação do terreno, obras de arte, desapropriações, etc., que dependem principalmente do traçado planimétrico e altimétrico do conduto, mas podem ser consideradas como independentes do diâmetro do tubo, desde, evidentemente, que êle não varie em um intervalo muito amplo.

Fixado em planta e perfil o traçado do conduto, para a determinação econômica de seu diâmetro, basta pois, levar em consideração as despesas do item a.

Assim, sendo  $c$  o preço da unidade de peso do tubo, o custo de aquisição da canalização, por unidade de comprimento, será

$$C_1 = cP_1 = c\gamma_f \pi (A + BD + CD^2), \quad (10.1)$$

e, para um trecho de comprimento  $L$

$$C = cP = \gamma_f \pi c \left[ \int_0^L A ds + \int_0^L BD ds + \int_0^L CD^2 \right] \quad (10.2)$$

No caso de  $D$  constante ao longo de  $L$ ,

$$C = cP_1 L = cL[\alpha + \beta D + \gamma D^2] \quad (10.3)$$

Por outro lado, como

$$P = P_1 L = \gamma_f \pi (D + e) e L,$$

vem

$$C = c \gamma_f \pi (D + e) e L =$$

$$= c \gamma_f \pi \left( 1 + \frac{e}{D} \right) e DL \quad (10.4)$$

$$\text{Fazendo-se } \mu = c \gamma_f \pi \left( 1 + \frac{e}{D} \right) e, \quad (10.5)$$

$$C = \mu DL \quad (10.6)$$

O produto  $c \gamma_f \pi$  pode ser tomado como constante para cada material;  $\left( 1 + \frac{e}{D} \right) e$ , para uma determinada classe de tubos é função exclusiva de  $D$ , pois  $e$  varia com  $D$ .

Na fórmula (10.6),  $\mu$  representa o custo da unidade de comprimento da canalização de diâmetro unitário.

Admitem alguns autores, que, em primeira aproximação, se possa considerar  $\left( 1 + \frac{e}{D} \right) e$ , como constante, isto é, na fórmula (10.6),  $\mu = \text{const.}$  (10) e (11). Admitida esta hipótese, o custo de um conduto forçado varia linearmente com o diâmetro  $D$  e com o comprimento  $L$ .

(10) De Marchi — Giulio — Idráulica (1930).

(11) Eydoux — Denis — Hydraulique générale et appliquée (1921).

Ora, identificando as expressões (10.3) e (10.6), resulta

$$\mu = c \frac{P_1}{D} \quad (10.7)$$

e, para que  $\mu$  fosse constante, necessário seria que

$$\frac{P_1}{D} \text{ também o fosse.}$$

No entanto, mesmo para  $D$  variando apenas no intervalo 0,05 |——| 0,500m, que mais de perto nos interessa nas rôdes de distribuição, é notável

a variação da relação  $\frac{P_1}{D}$ .

Com efeito, das fórmulas (9.6), (9.7), (9.8), (9.9), (9.10), (9.11) e (9.12), resultam para  $\frac{P_1}{D} = \frac{\mu}{c}$  os valores constantes do quadro da página seguinte.

As expressões desse quadro nos mostram que, no intervalo 0,05 |——| 0,500m,  $\frac{\mu}{c}$  pode variar na razão de um para dois, o que, mais sugestivamente, está indicado no gráfico da figura 2.

Quer isto dizer que, mesmo em primeira aproximação, a hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro de um conduto forçado não deve ser admitida, a menos que o diâmetro varie em intervalo de amplitude muito pequena, abrangendo, por exemplo, até três diâmetros consecutivos das bitolas comerciais.

Baseando-nos em valores do quadro seguinte e no gráfico da figura 2, sugerimos, em primeira aproximação, e, para  $D$  compreendido no intervalo

CLASSE DOS TUBOS	$\frac{P_1}{D} = \frac{\mu}{c}$
A.B.N.T. — Classe L.A.	$\frac{0,25}{D} + 165,00 + 365,00 D$
A.B.N.T. — „ A	$\frac{0,10}{D} + 189,00 + 330,00 D$
A.B.N.T. — „ B	$\frac{4,00}{D} + 165,00 + 462,00 D$
A.S.A. — „ A	$\frac{4,00}{D} + 199,00 + 490,00 D$
A.S.A. — „ B	$\frac{6,20}{D} + 198,00 + 618,00 D$
A.S.A. — „ C	$\frac{13,00}{D} + 137,00 + 902,00 D$
A.S.A. — „ D	$\frac{11,00}{D} + 159,00 + 986,00 D$

0,05 |————| 0,500m, a variação linear de  $\mu$  com  $D$ ,  
isto é  $\mu = \mu_1 + \mu_2 D$  (10.8)

Com esta hipótese, mais consentânea com a realidade, a fórmula (10.6) se escreverá

$$C = (\mu_1 + \mu_2 D) DL \quad (10.9)$$

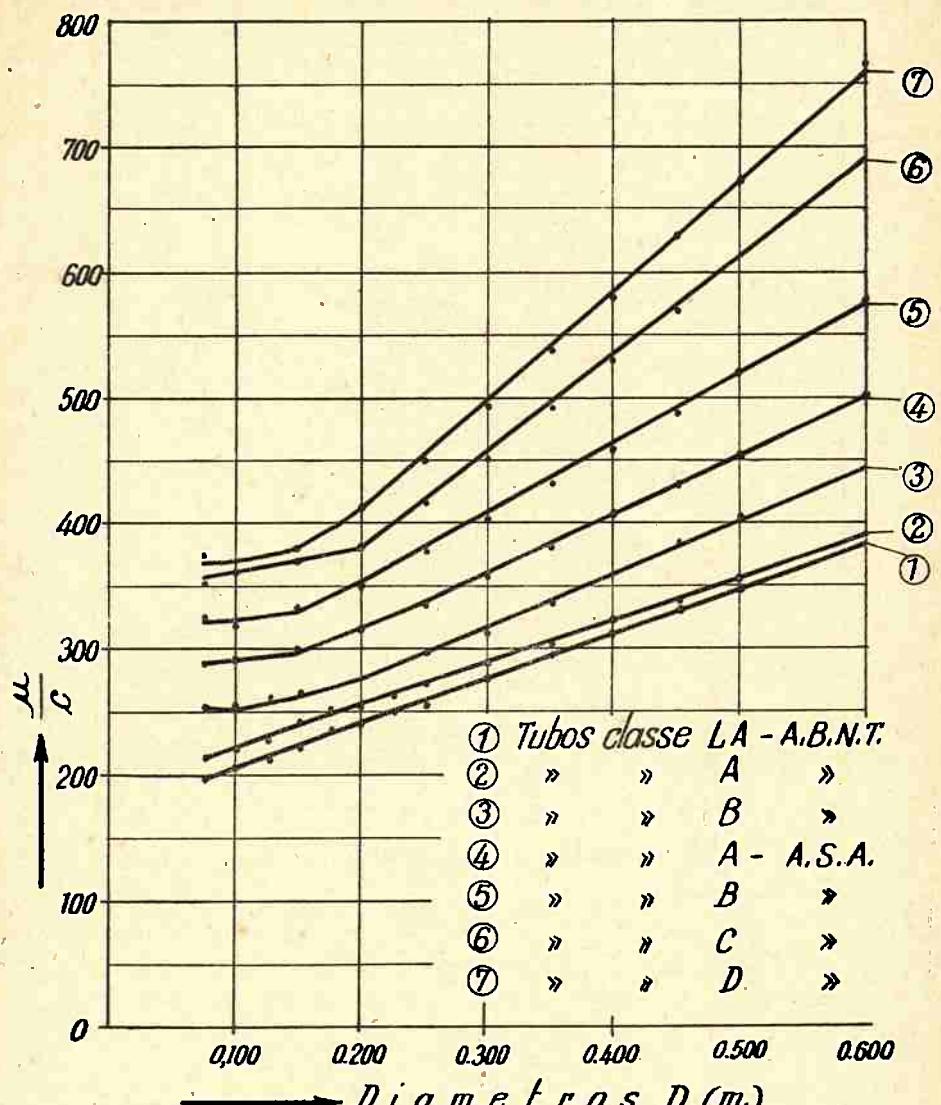
e, no caso mais geral, em que  $D$  é variável ao longo de  $L$ ,

$$C = \int_0^L (\mu_1 + \mu_2 D) D \, ds \quad (10.10)$$

— 50 —

Biblioteca da Escola Politécnica  
SÃO PAULO

fl. 3585



Os valores de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dependem da classe do tubo e de  $c$ , custo da unidade de peso da canalização.

Assim, por exemplo, para os tubos das classes *L.A* e *A* do Ante-projeto de especificações da A.B.N.T.

os valores de  $\frac{\mu_1}{c}$  e  $\frac{\mu_2}{c}$  seriam, respectivamente 165,

365 e 189, 330, aproximadamente. (12)

Resumindo, para as canalizações de ferro fundido destinadas às rôdes de distribuição, a hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro só pode ser aceita quando o diâmetro varia em um intervalo de amplitude muito pequena; para o intervalo 0,05 |————| 0,50m, no qual se situam quase todos os problemas das rôdes de distribuição, pode-se admitir, com suficiente aproximação

$$C = \int_0^L (\mu_1 + \mu_2 D) D \, ds,$$

sendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  coeficientes que dependem das condições de trabalho do conduto e do custo da unidade de peso do material de que é confecionado o cano.

---

(12) Nas atuais condições  $c$  é da ordem de Cr\$ 2,40/kg. dando lugar aos seguintes valores numéricos :

Classe L.A. —  $\mu_1 = 396$ ,  $\mu_2 = 876$

Classe A. —  $\mu_1 = 454$ ,  $\mu_2 = 792$ .

### III — A CONDIÇÃO GERAL DE MÍNIMO CUSTO NOS CONDUTOS FORÇADOS SIMPLES.

**11. Perda de carga no regimen gradualmente variado.** — A condição geral de mínimo custo nos condutos forçados simples é estabelecida para uma tubulação com diâmetro gradualmente variável ; a este caso, como veremos posteriormente, podem ser conduzidos todos os problemas de interesse prático nas rôdes de distribuição.

Feita a extensão do teorêma de Bernouilli às correntes de secção finita, aplicando-o a duas secções separadas pelo comprimento  $L$  de um conduto em regimem gradualmente variado, se designarmos por  $j$  a perda de carga unitária (no caso, variável ao longo do conduto) e por  $ds$  o comprimento do elemento genérico de canalização, a perda de carga total, por atrito externo, entre as duas secções será :

$$H = \int_0^L j \, ds, \quad (11.1)$$

sabendo-se que nas tubulações de considerável comprimento  $L$ , a diferença entre as alturas cinéticas das duas secções consideradas é despresível em face

de  $H$ . Isto corresponde a afirmar que no regime gradualmente variado, como no uniforme, a carga hidráulica disponível é igual a perda de carga total por atrito externo (13).

Como o intervalo de variação do diâmetro que está nos interessando é o  $0,05 \text{ m} \rightarrow 0,500\text{m}$ , podemos, pois, no cálculo de  $j$ , adotar qualquer das fórmulas práticas de encanamentos, a de Darcy, a de Flamant, a de Williams e Hazen, etc. (14). Daremos preferência, pela maior facilidade nos desenvolvimentos analíticos, à fórmula de Darcy, na qual

$$j = \frac{64}{\pi^2} \frac{b_1}{D^5} \frac{Q^2}{D^6}, \quad (11.2)$$

sendo  $b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$  ( $\alpha = 0,000507$ ;  $\beta = 0,00001294$ , p<sup>a</sup>

tubos de ferro fundido com alguma incrustação).

A fórmula (11.1) passará a :

$$H = \frac{64}{\pi^2} \int_0^L b_1 \frac{Q^2}{D^5} ds \quad (11.3)$$

**12. A condição geral de mínimo custo nos condutos forçados simples : um problema de cálculo das variações.** — A condição geral de mínimo custo em um conduto forçado em regimen gradualmente variado será obtida com a solução do seguinte problema :

(13) Fischer — Eugenio — Corso di Idráulica — págs. 189 e 190.

(14) Babbitt and Doland — Water Supply Engineering — págs. 395 e Bonnet — "Traité pratique des distribution d'eau et des égouts" — 1.<sup>a</sup> ed. — págs. 560.

Entre todos os condutos forçados de comprimento  $L$ , dispondo da mesma carga hidráulica  $H$ , e em igualdade de condições no que se refere à vasão, (condutos equivalentes) determinar o de custo mínimo.

Ora, no segundo capítulo, estabelecemos (fórmula (10.10)) o custo de um conduto forçado, no caso mais geral possível,

$$C = \int_0^L (\mu_1 + \mu_2 D) D \cdot ds \quad (10.10)$$

De acordo com o enunciado acima,  $H$  e  $Q$  são dados físicos do problema;  $H$  constante para cada caso,  $Q$  constante ou variável com lei conhecida ao longo de  $L$ .

Portanto, a variável incógnita, no caso o diâmetro  $D$ , deve ser tal que, levada à integral definida (11.3) dê lugar a um valor constante  $H$ , e, introduzida na integral definida (10.10) ocasione um valor mínimo para  $C$ .

A determinação dos diâmetros, devendo satisfazer às condições (11.3) e (10.10), pertence assim às clássicas questões conhecidas como "problemas isoperimétricos", onde o cálculo das variações encontra uma das suas mais fecundas aplicações.

Julgamos interessante dar um sucinto apanhado do aspecto puramente matemático do problema, não apenas para mostrar que as condições hidráulicas se adaptam perfeitamente às restrições analíticas impostas pelo cálculo das variações, como, porque, diversos autores tratam a questão com insuficiente rigor (15).

---

(15) Para citar apenas um, haja vista Bonnet — "Traité Practique des distributions d'eau et des égouts — 1.<sup>a</sup> ed. — pág. 749, onde a chamada condição de Euler é estabelecida apenas "d'après la loi des variations de  $y$  fonction de  $x$ " ...

**13. Aspecto puramente matemático do problema.** — Deixando de lado as particularidades hidráulicas, o problema que deve ser resolvido, encarado pelo seu aspecto puramente matemático é o seguinte :

Entre tôdas as funções  $y=f(x)$  contínuas e admitindo derivadas contínuas em um intervalo  $x_0 \mid \cdots \mid x_1$ , para as quais a integral

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y) dx,$$

adquire um valor dado  $H$ , determinar (caso exista) a que torna mínima a integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y) dx,$$

sendo  $G$  e  $F$  funções conhecidas dos dois argumentos  $x$  e  $y$ .

Supondo-se as funções  $F$  e  $G$  definidas e contínuas em todos os pontos  $(x, y)$  de uma região  $R$ , se as suas derivadas parciais relativamente a  $y$  e  $x$  forem também admitidas contínuas, é possível a existência de um extremante de  $I$  (16).

Os problemas isoperimétricos reduzem-se ao problema fundamental do cálculo das variações isto é, às pesquisas dos valores extremantes de uma integral definida, substituindo-se essa integral por uma opor-

(16) Tonelli — Leonida — "Fondamenti di calcolo delle variazioni" — vol. II — pág. 552.

tuna expressão em que ela figure associada à integral que deve tomar um valor prefixado.

No caso em apreço, a procura dos extremantes da integral  $I$ , de modo que a integral  $I_1$  permaneça constante, equivale à pesquisa dos extremantes da integral

$$I + \varepsilon I_1$$

onde  $\varepsilon$  exprime uma constante (17).

A condição necessária para que  $y=f(x)$  torne a integral  $I$  mínima e  $I_1=H=\text{constante}$  é que a primeira variação de  $I + \varepsilon I_1$ , seja nula, sendo a sua segunda variação não negativa, isto é,

$$\begin{aligned}\delta(I + \varepsilon I_1) &= 0 \\ \delta^2(I + \varepsilon I_1) &\geq 0\end{aligned}\quad (18)$$

A primeira imposição conduz à equação de Euler, que no caso particular em exame será :

$$\frac{\delta}{\delta y} (F + \varepsilon G) = \frac{\delta F}{\delta y} + \varepsilon \frac{\delta G}{\delta y} = 0 \quad (13.1)$$

A segunda imposição dá lugar à chamada condição de Legendre :

$$\frac{\delta^2}{\delta y^2} (F + \varepsilon G) \geq 0 \quad (13.2)$$

(17) Vivanti — Giulio — "Lezioni di analisi matematica" — 3.<sup>a</sup> ed.  
— vol. II — pág. 434.

(18) Goursat E. — "Cours d'Analyse Mathématique" Tome III —  
pág. 584.

No problema que estamos abordando, a constante  $\epsilon$  é definida por

$$\epsilon = - \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{\frac{\delta G}{\delta y}} \quad (13.3)$$

e a condição de Legendre será pois expressa por :

$$\frac{\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}}{\frac{\delta^2 y}{\delta y}} - \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{\frac{\delta G}{\delta y}} - \frac{\frac{\delta^2 G}{\delta^2 y}}{\frac{\delta^2 y}{\delta y}} \geq 0 \quad (13.4)$$

Em resumo para que  $y=f(x)$  torne mínimo  $I$  e ocasione um valor constante  $H$  para  $I_1$  é necessário que as condições (13.1) e (13.4) sejam verificadas para qualquer  $x$  no intervalo  $x_0 | \dots | x_1$ .

**14. Aplicação das condições de Euler e de Legendre ao problema geral do mínimo custo de condutos forçados.** — Fazendo a aplicação das conclusões do número anterior ao nosso problema particular, teremos

$$I_1 = H = \frac{64}{\pi^2} \int_0^L b_1 \frac{Q^2}{D^5} ds$$

$$I = C = \int_0^L (\mu_1 + \mu_2 D) D ds$$

A função incógnita será  $y = D(s)$ .

No regimen gradualmente variado, que está nos preocupando, a função  $y = D(s)$  será contínua e admitirá derivada contínua em todo o intervalo  $o \rightarrow L$ .

As funções  $F$  e  $G$  terão aqui as seguintes expressões :

$$G = b_1 \frac{Q^2}{D^6} = \left( \alpha + \frac{\beta}{D} \right) \frac{Q^2}{D^6} \quad (14.1)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes para cada material,

$$F = (\mu_1 + \mu_2 D) D, \quad (14.2)$$

com  $\mu_1$  e  $\mu_2$  constantes para cada classe de tubos ; ambas as funções satisfazem portanto às condições impostas no número anterior para a existência de um extremante de  $I$  ou  $C$ .

Passemos pois às condições de Euler e de Legendre.

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \mu_1 + 2 \mu_2 D$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = 2 \mu_2$$

$$\frac{\delta G}{\delta y} = - \frac{Q^2}{D^6} \left[ 5 \alpha + \frac{6 \beta}{D} \right]$$

$$\frac{\delta^2 G}{\delta y^2} = \frac{6 Q^2}{D^7} \left[ 5 \alpha + \frac{7 \beta}{D} \right]$$

$$\varepsilon = - \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{\frac{\delta G}{\delta y}} = \frac{D^7}{Q^2} \left[ \frac{\mu_1 + 2 \mu_2 D}{6 \beta + 5 \alpha D} \right] \quad (14.3)$$

*Condição de Legendre :*

$$2\mu_2 + \frac{D^7}{Q^2} \left[ \frac{\mu_1 + 2\mu_2 D}{6\beta + 5\alpha D} \right] \frac{6Q^2}{D^7} \left[ 5\alpha + \frac{7\beta}{D} \right] = \\ = 2\mu_2 + \frac{6(\mu_1 + 2\mu_2 D)(5\alpha D + 7\beta)}{D(5\alpha D + 6\beta)} > 0,$$

isto é, trata-se efetivamente de um mínimo.

Da fórmula (14.3), tira-se,

$$D = \left[ \frac{6\beta + 5\alpha D}{\mu_1 + 2\mu_2 D} \right]^{1/7} \varepsilon^{1/7} Q^{2/7}. \quad (14.4)$$

A expressão  $\left[ \frac{6\beta + 5\alpha D}{\mu_1 + 2\mu_2 D} \right]^{1/7}$ , para  $D$  variando no

intervalo  $0,05 \text{ m} \dots 0,50 \text{ m}$ , pode em primeira aproximação ser considerada constante (19).

Designando-se por  $\lambda$  o produto

$$\lambda = \left[ \frac{6\beta + 5\alpha D}{\mu_1 + 2\mu_2 D} \right]^{1/7} \varepsilon^{1/7} \quad (14.5)$$

vem finalmente,

$$D = \lambda Q^{2/7}. \quad (14.6)$$

Levando-se êsse valor à equação (11.3), teremos,

$$H = \frac{64}{\pi^2 \lambda^6} \int_0^L \left[ \alpha Q^{4/7} + \frac{\beta}{\lambda} Q^{2/7} \right] ds, \quad (14.7)$$

---

(19) Com efeito, para tubos da classe L. A. da A.B.N.T., por exemplo, o valor da expressão varia de  $0,123$  p<sup>a</sup>  $D=0,05$  m. até  $0,140$  p<sup>a</sup>  $D=0,500$  m. podendo-se adotar, para todo o intervalo, o valor médio  $0,130$ .

expressão que permitiria a determinação da constante  $\lambda$ .

**15. Fórmula aproximada para a determinação de  $\lambda$ .** — Entretanto o cálculo de  $\lambda$  pela fórmula (14.7) é extremamente trabalhoso, exigindo a resolução de uma equação do 6.<sup>a</sup> gráu, o que torna difícil a sua utilização nos casos práticos.

Com o objetivo de facilitar a aplicação aos casos correntes, procuremos uma expressão aproximada mais simples. Isto é conseguido atribuindo-se a

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D} \text{ um valor constante, média dos valores}$$

efetivos no intervalo  $0,05 | \dots | 0,500\text{m}$ , o que encontra justificativa no fato da variação de  $b_1$  não ser muito grande nesse intervalo. A tabela seguinte patenteia a afirmação :

DIÂMETRO D (m)	$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$	DIÂMETRO D (m)	$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$
0,050	0,000765	0,250	0,000558
0,075	0,000679	0,300	0,000550
0,100	0,000636	0,350	0,000543
0,125	0,000610	0,400	0,000539
0,150	0,000593	0,450	0,000535
0,200	0,000571	0,500	0,000532

Em primeira aproximação pode-se admitir para  $b_1$  o valor constante 0,0006 no intervalo  $0,05 | \dots | 0,50$ .

Isto posto, substituindo-se  $D$  por  $\lambda Q^{2/7}$  na fórmula (11.3), obteremos

$$H = \frac{64 b_1}{\pi^2 \lambda^5} \int_0^L Q^{4/7} ds$$

e chamando

$$\frac{64 b_1}{\pi^2 \lambda^5} = k, \quad (15.1)$$

$$H = k \int_0^L Q^{4/7} ds, \text{ de onde tiramos}$$

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds} \quad (15.2)$$

Determinado o valor de  $k$  pela fórmula (15.2), admite-se para  $b_1$  o valor médio 0,0006 e por (15.1) calcula-se o valor de  $\lambda$ .

Com o  $\lambda$  obtido, a fórmula (14.6) fornece um primeiro valor para o diâmetro  $D$ , com o qual se poderá escolher um  $b_1$  mais aproximado, e, em consequência um valor mais conveniente para  $\lambda$  e assim sucessivamente.

É uma solução por aproximações sucessivas, tão frequente nos problemas de Hidráulica aplicada.

Convém acentuar que, via de regra, pode-se contentar com o valor de  $\lambda$  obtido por (15.1), visto como a oscilação de  $b_1$  é pequena no intervalo

$0,05 | \dots | 0,500$  e ainda  $\lambda$  varia com  $\sqrt[5]{b_1}$ .

É interessante ressaltar o andamento da linha piezométrica no conduto de mínimo custo.

Para isso, basta identificar (11.1) e (14.7)

$$j = \frac{64}{\pi^2 \lambda^5} \left[ \alpha Q^{4/7} + \frac{\beta}{\lambda} Q^{2/7} \right], \text{ ou}$$

em função do diâmetro :

$$j = \frac{64}{\pi^2 \lambda^5} \left[ \alpha D^2 + \beta D \right]. \quad (15.3)$$

e, com a introdução de novas constantes

$$r = \frac{64 \alpha}{\pi^2 \lambda^7} \quad \text{e} \quad s = \frac{64 \beta}{\pi^2 \lambda^7},$$

$$j = D(rD + s) \quad (15.4)$$

Portanto, na canalização mais conveniente, sob o ponto de vista econômico, a perda de carga unitária deve variar segundo o produto  $D(rD + s)$ , com  $r$  e  $s$  constantes.

É curioso observar que, aceita a hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro, ( $\mu = \text{constante}$ , na fórmula (10.6)), e admitindo

$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$  invariável, Mannes chegou às seguintes fórmulas (20)

$$D = \mu Q^{1/3}$$

$j = cQ^{1/3}$ , com  $\mu$  e  $c$  constantes; nessas condições a canalização mais conveniente sob o

(20) Bonnet L. — op. cit. pág. 750.

ponto de vista econômico é tal que a perda de carga unitária mantém-se proporcional ao diâmetro.

Resumindo as nossas considerações deste capítulo, sugerimos as seguintes fórmulas gerais para a resolução das questões de mínimo custo :

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds}$$

$$j = k Q^{4/7}$$

$$\lambda = \sqrt[5]{\frac{64 b_1}{\pi^2 k}}$$

$$D = \lambda Q^{2/7}.$$

No capítulo seguinte, faremos a aplicação dessas expressões aos casos que, com maior frequência, se apresentam na prática.

## IV — APLICAÇÕES DA CONDIÇÃO DE MÍNIMO CUSTO AOS CONDUTOS FORÇADOS SIMPLES.

### 16. Canalização com vasão constante. —

Sendo  $Q = \text{const.}$ ,

$$D = \lambda Q^{2/7} = \text{const.} \quad (16.1)$$

$$j = k Q^{4/7} = \text{const.}$$

A constante  $k$  é prontamente obtida:

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds} = \frac{H}{Q^{4/7} L} \quad (16.2)$$

valor que substituído na expressão anterior conduz a

$$j = \frac{H}{L}, \quad (16.3)$$

resultado que aliás poderia ser diretamente calculado, sabendo-se que a carga hidráulica disponível é igual à perda de carga total por atrito externo.

As fórmulas (16.1), (16.2) e (16.3), juntamente com a relação que exprime  $\lambda$  em função de  $k$

$$\lambda = \sqrt[5]{\frac{64 b_1}{\pi^2 k}}$$

resolvem este caso particular.

17. Canalização constituída de vários trechos, cada um deles com vasão constante. — Sejam  $n$  trechos de comprimentos  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$  e vasões respectivamente iguais a  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ .

Designemos por  $H$  a perda de carga total ao longo dos  $n$  trechos.

A constante  $k$  é aqui :

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds} = \frac{H}{\sum_{i=1}^n Q_i^{4/7} L_i} \quad (17.1)$$

As perdas de carga por unidade de comprimento serão :

$$j_1 = k Q_1^{4/7}, \quad j_2 = k Q_2^{4/7}, \dots, \quad j_n = k Q_n^{4/7} \quad (17.2)$$

e os diâmetros

$$D_1 = \lambda_1 Q_1^{2/7}, \quad D_2 = \lambda_2 Q_2^{2/7}, \dots, \quad D_n = \lambda_n Q_n^{2/7} \quad (17.3)$$

As fórmulas (17.1), (17.2) e 17.3) solucionam o problema. Os coeficientes  $\lambda$  foram designados com índices diferentes para os diversos trechos para lembrar que êles dependem de  $b_1$ , isto é do diâmetro, sendo determinados por aproximações sucessivas a partir do  $\lambda$  obtido de

$$\lambda = \sqrt[5]{\frac{64 b_1}{\pi^2 k}}$$

onde se adota, em primeira tentativa, para  $b_1$  o valor médio 0,0006, correspondente ao intervalo 0,m05 |——| 0,m50 de  $D$ . (21)

---

(21) Conforme observação do número 15, nos casos correntes,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ .

As aplicações numéricas poderiam ser enormemente facilitadas com a organização de uma tabela das potências  $\frac{2}{7}$  das vasões em um intervalo conveniente.

**18. Canalização com vasão uniformemente distribuída e vasão nula a jazante.** — Sendo  $L$  a extensão total da tubulação e  $q$  a vasão uniformemente distribuída por unidade de comprimento, a vasão  $Q$  em uma secção genérica situada à distância  $s$  da extremidade montante será :

$$Q = q (L-s) \quad (18.1)$$

A constante  $k$  tem aqui a forma

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds} = \frac{H}{q^{4/7} \int_0^L (L-s)^{4/7} ds}$$

e como

$$\int_0^L (L-s)^{4/7} ds = \frac{7}{11} L^{11/7}, \quad \text{vem}$$

$$k = \frac{11}{7} \frac{H}{L} \frac{1}{(qL)^{4/7}} \quad (18.2)$$

A perda de carga por unidade de comprimento, na secção genérica considerada será :

$$j = k Q^{4/7} = \frac{11}{7} \frac{H}{L} \left( \frac{L-s}{L} \right)^{4/7} \quad (18.3)$$

A fórmula (18.3) demonstra que as perdas de carga por unidade de comprimento e, portanto, a perda de carga total ao longo de um trecho qualquer, sob a condição de máxima economia, são independentes da vasão uniformemente distribuída.

A expressão  $D = \lambda Q^{2/7}$  evidencia que no caso em apreço a condição de mínimo custo conduz a diâmetros variáveis. Na prática faz-se sempre o diâmetro constante, mesmo afastando-se do mínimo custo teórico.

Para a determinação do diâmetro constante, nesse caso e no seguinte, convém recordar que uma canalização de serviço misto, distribuindo uniformemente, na unidade de comprimento, a vasão  $q$  e de vasão  $Q_j$  de extremidade (no caso em apreço  $Q_j = 0$ ) pode ser considerada como canalização de serviço simples de extremidade, com vasão constante  $Q = Q_j + 0,56 qL$ . Ainda, com suficiente aproximação pode-se fazer

$$Q = Q_j + 0,50 qL = \frac{Q_m + Q_j}{2}, \quad (18.4)$$

pois  $Q_j + qL = Q_m$  = vasão à montante do trecho de comprimento  $L$ .

Fazendo-se no caso  $D = \text{const.}$  resulta :

$$j = \frac{64 b_1}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} (L-s)^2 \quad \text{e a perda de carga}$$

total até a secção genérica considerada :

$$H_s = \frac{64 b_1 q^2}{\pi^2 D^5} \int_0^s (L-s)^2 ds = \frac{64 b_1 q^2 L^3}{\pi^2 D^5} \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{L-s}{L} \right)^3 \right] \quad (18.5)$$

e a perda de carga total ao longo de todo o trecho de comprimento  $L$ :

$$H = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} q^2 \int_0^L (L-s)^2 ds = \frac{64 b_1 q^2}{\pi^2 D^5} \frac{L^3}{3} \quad (18.6)$$

Confrontando-se (18.5) e (18.6):

$$H_s = H \left[ 1 - \left( \frac{L-s}{L} \right)^3 \right] \quad (18.7),$$

expressão que fornece o valor da perda de carga total em cada secção genérica, em função da perda de carga total ao longo de todo o trecho.

**19. Canalização com vasão uniformemente distribuída ao longo do conduto e vasão constante na extremidade.** — Em um conduto de comprimento  $L$  sejam:

$Q_m$  = a vasão na extremidade montante

$Q_j$  = a „ „ „ juzante

$Q_s$  = a „ em uma secção genérica distante  $s$  da extremidade montante

$q$  = a vasão uniformemente distribuída por unidade de comprimento.

$$Q = Q_j + q(L-s). \quad (19.1)$$

A constante  $k$  tem aqui por expressão :

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds} = \frac{11}{7} H \frac{q}{Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7}} \quad (19.2)$$

pois  $\int_0^L [Q_j + q(L-s)]^{4/7} ds = \frac{7}{11q} (Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7})$  devido

a ser  $Q_j + qL = Q_m$

A perda de carga por unidade de comprimento na secção genérica em que a vasão é  $Q = Q_j + q(L-s)$  é

$$j = k Q^{4/7} = \frac{11}{7} \frac{H q}{(Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7})} [Q_j + q(L-s)]^{4/7} \quad (19.3)$$

e a perda de carga total :

$$H = \frac{7k}{11q} [Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7}] \quad (19.4)$$

A condição de mínimo custo, ainda neste caso, como no anterior, conduz a diâmetro variável ao longo da canalização.

Sendo  $D$  o diâmetro constante do conduto equivalente ao teórico de mínimo custo, podemos escrever

$$j = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} [Q_j + q(L-s)]^2 \text{ e a perda de carga}$$

total até à secção genérica considerada :

$$H_s = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \int_0^s [Q_j + q(L-s)]^2 ds = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \times$$

$$\times \frac{1}{3} \left\{ Q_m^3 - [Q_j + q(L-s)]^3 \right\} = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \times \frac{1}{3} [Q_m^3 - Q_j^3] \quad (19.5)$$

a perda de carga total ao longo de todo o trecho de comprimento  $L$ ,

$$H = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5} \times \frac{1}{3} [Q_m^3 - Q_j^3] \quad (19.6)$$

Comparando (19.5) e (19.6) vem

$$H_s = H \frac{Q_m^3 - Q_j^3}{Q_m^3 - Q_j^3} \quad (19.7)$$

expressão da perda de carga total na secção genérica, quando se faz  $D$  constante, e que difere da teórica de mínimo custo, relativa à  $D$  variável, cuja fórmula obtida à partir de (19.3) é :

$$H_1 = \int_0^s j ds = \frac{11 H q}{7(Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7})} \int_0^s [Q_j + q(L-s)]^{4/7} ds =$$

$$= H \frac{Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7}}{Q_m^{11/7} - Q_j^{11/7}} \quad (19.8)$$

**20. Canalização constituída de trechos de vasão uniformemente distribuída ao longo dos condutos e de trechos de vasão constante. —**

É o caso mais geral, combinação dos anteriormente tratados no presente capítulo.

Seja uma canalização de comprimento total  $L$  constituída por  $n$  trechos de comprimentos  $L_1, L_2, \dots, L_n$  e vasões constantes respectivamente iguais a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  e  $p$  trechos de comprimentos  $L_{n+1}, L_{n+2}, \dots, L_{n+p}$ , com vasões uniformemente distribuídas,  $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+p}$ ; vasões à montante,  $Q_{m,n+1}, Q_{m,n+2}, \dots, Q_{m,n+p}$ ; vasões a jazante  $Q_{j,n+1}, Q_{j,n+2}, \dots, Q_{j,n+p}$ , respectivamente.

As fórmulas gerais

$$k = \frac{H}{\int_0^L Q^{4/7} ds}$$

$j = k Q^{4/7}$ , aplicadas ao problema, tendo em vista os números anteriores, conduzem às seguintes expressões :

$$k = \frac{H}{\sum_{i=1}^n Q_i^{4/7} L_i + \sum_{l=n+1}^{n+p} \frac{7}{11q_l} (Q_{m,l}^{11/7} - Q_{j,l}^{11/7})} \quad (20.1)$$

$$j_1 = k Q_1^{4/7} \quad j_2 = k Q_2^{4/7} \quad \dots \quad j_n = k Q_n^{4/7}$$

$$j_{n+1} = k [Q j_{n+1} + q_{n+1} (L_{n+1} - s)]^{4/7} \quad (20.2)$$

$$j_{n+p} = k [Q j_{n+p} + q_{n+p} (L_{n+p} - s)]^{4/7}$$

As perdas de carga globais, em cada um dos trechos, serão :

$$H_1 = k Q_1^{4/7} L_1, \dots, H_n = k Q_n^{4/7} L_n$$

$$H_{n+1} = \frac{7k}{11q_{n+1}} [Q_{m,n+1}^{11/7} - Q_{j,n+1}^{11/7}] \quad (20.3)$$

$$H_{n+p} = \frac{7k}{11q_{n+p}} [Q_{m,n+p}^{11/7} - Q_{j,n+p}^{11/7}].$$

A perda de carga global  $H$ , no fim do comprimento  $L$  da canalização será evidentemente

$$H = \sum_{i=1}^{n+p} H_i. \quad (20.4)$$

Os diâmetros dos diversos condutos serão calculados pela expressão

$D_i = \lambda_i Q_i^{2/7}$ , observando-se que nos trechos de vasão uniformemente distribuida,

$$Q_i = \frac{Q_{m,i} + Q_{j,i}}{2}, \text{ com}$$

suficiente aproximação.

**21. Aplicação numérica.** — Com o objetivo de mostrar que o cálculo numérico não apresenta dificuldades de grande monta, faremos uma aplicação numérica do caso mais geral estudado neste capítulo. De maneira a poder confrontar os valores obtidos pelas fórmulas que propuzemos com as deduzidas, admitida a hipótese da proporcionalidade

entre o custo e o diâmetro, escolhemos o exemplo apresentado a pág. 49 do "Il calcolo economico delle tubazioni di acqua potabile e delle reti di distribuzioni cittadine" de Mario Foltz.

Os dados são :

1.º trecho

$$Q_1 = \text{const} = 0,0090 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ comprimento } L_1 = 800 \text{ m.}$$

2.º trecho

$$Q_{m,2} = 0,0058 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_{f,2} = 0,0055 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$q_2 = 0,0000041 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ comprimento } L_2 = 72 \text{ m.}$$

3.º trecho

$$Q_{m,3} = 0,0042 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_{f,3} = 0,0035 \text{ m}^3/\text{s.}$$
$$q_3 = 0,0000041 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ comprimento } L_3 = 170 \text{ m.}$$

4.º trecho

$$Q_4 = \text{const} = 0,0020 \text{ m}^3/\text{s}; \text{ comprimento } L_4 = 250 \text{ m.}$$

Perda de carga total  $H = 11,0 \text{ m.}$

As fórmulas a empregar serão (20.1), (20.2) e (20.3).

a) *Cálculos auxiliares*

$$Q_1 = 0,009$$

$$Q_1^{4/7} = 0,06776$$

$$Q_1^{4/7} L_1 = 0,06776 \times 800 = 54,208$$

$$Q_4 = 0,002$$

$$Q_4^{4/7} = 0,02869$$

$$Q_4^{4/7} L_4 = 0,02869 \times 250 = 7,172$$

$$Q_{m,2} = 0,0058$$

$$Q_{m,2}^{11/7} = 0,0003058$$

$$Q_{m,3} = 0,0042$$

$$Q_{m,3}^{11/7} = 0,0001841$$

$$Q_{j,2} = 0,0055$$

$$Q_{j,2}^{11/7} = 0,0002813$$

$$Q_{j,3} = 0,0035$$

$$Q_{j,3}^{11/7} = 0,0001383$$

$$Q_{m,2}^{11/7} = Q_{j,2}^{11/7} = 0,0000245$$

$$\frac{7}{11q_2} (Q_{m,2}^{11/7} - Q_{j,2}^{11/7}) = 3,803$$

$$Q_{m,3}^{11/7} - Q_{j,3}^{11/7} = 0,0000458$$

$$\frac{7}{11q_3} (Q_{m,3}^{11/7} - Q_{j,3}^{11/7}) = 7,109$$

b) *Cálculo de k*

$$k = \frac{H}{Q_1^{4/7}L_1 + Q_4^{4/7}L_4 + \frac{7}{11q_2}(Q_{m,2}^{11/7} - Q_{j,2}^{11/7}) + \frac{7}{11q_3}(Q_{m,3}^{11/7} - Q_{j,3}^{11/7})} =$$

$$= \frac{11,000}{54,208 + 3,803 + 7,109 + 7,172} = \frac{11,000}{72,292} = 0,1522$$

c) *Cálculo de H<sub>i</sub>*

$$j_1 = kQ_1^{4/7} = 0,1522 \times 0,06776 = 0,01031$$

$$H_1 = j_1 L_1 = 0,01031 \times 800 \sim 8,25 \text{ m.}$$

$$H_2 = k \times \frac{7}{11q_2} (Q_{m,2}^{11/7} - Q_{j,2}^{11/7}) = 0,1522 \times 3,803 = 0,58 \text{ m.}$$

$$H_3 = k \times \frac{7}{11q_3} (Q_{m,3}^{11/7} - Q_{j,3}^{11/7}) = 0,1522 \times 7,109 = 1,08 \text{ m.}$$

$$j_4 = k Q_4^{4/7} = 0,1522 \times 0,02869 = 0,004365$$

$$H_4 = j_4 L_4 = 0,004365 \times 250 = 1,09 \text{ m.}$$

d) *Cálculo de  $\lambda$*

$$\lambda = \sqrt{\frac{64b_1}{\pi^2 k}}, \text{ adotando-se para } b_1 \text{ o valor médio} \\ 0,0006,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{64 \times 0,0006}{\pi^2 \times 0,1522}} = 0,481$$

e) *Cálculo dos diametros*

Os trechos intermediários serão calculados com as vasões fictícias :

$$Q'_2 = \frac{Q_{m,2} + Q_{j,2}}{2} = 0,5(0,0058 + 0,0055) = 0,00565 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q'_3 = \frac{Q_{m,3} + Q_{j,3}}{2} = 0,5 (0,0042 + 0,0035) = 0,00385 \text{ m}^3/\text{s}$$

Portanto,

$$D_1 = \lambda Q_1^{2/7} = 0,481 \times 0,2603 = 0,125 \text{ m. } (\sim 5'')$$

$$D_2 = \lambda Q'_2{}^{2/7} = 0,481 \times 0,2279 = 0,109 \text{ m. } (\sim 4'')$$

$$D_3 = \lambda Q'_3{}^{2/7} = 0,481 \times 0,2042 = 0,097 \text{ m. } (\sim 4'')$$

$$D_4 = \lambda Q_4^{2/7} = 0,481 \times 0,1700 = 0,082 \text{ m. } (\sim 3'')$$

A tabela de pág. 61 mostra ser desnecessário o cálculo dos novos coeficientes  $\lambda$ , de vez que os valores efetivos de  $b_1$  para os diâmetros obtidos muito pouco diferem do valor médio adotado.

Os valores indicados por Foltz são os seguintes :

$$H_1 = 7,60 \quad H_2 = 1,21$$

$H_3 = 0,58 \quad H_4 = 1,42$  aos quais corresponderiam pela fórmula de Darcy os seguintes diâmetros aproximados :

$$D_1 = 0,127m, \quad D_2 = 0,110m, \quad D_3 = 0,100m, \quad D = 0,080m,$$

os quais praticamente coincidem com os calculados pelas fórmulas que preconizamos.

Aliás essa concordância, no presente exemplo numérico era de se esperar, tendo em vista que aqui os diâmetros variam em um intervalo de amplitude muito pequena, no caso, abrangendo apenas três diâmetros consecutivos das bitólas comerciais (3'', 4'' e 5''). São válidas, pois, as considerações expendidas no número 10.

## V — APLICAÇÕES DA CONDIÇÃO DE MÍNIMO CUSTO AOS CONDUTOS FORÇADOS COMPLEXOS.

22. Condutos complexos. — Nas rãdes de distribuição de água potável as canalizações são geralmente ligadas entre si, constituindo o que se denomina um *conduto complexo*.

A água é levada a cada nó ou vértice do conduto complexo por tubos adutores e daí é veiculada por tubos distribuidores.

Antes de se aplicar a condição de mínimo custo aos condutos forçados complexos, é conveniente recordar, sucintamente, os dois problemas gerais clássicos, que a êles se referem.

O primeiro, relativo à verificação de um conduto existente, pôde ser assim enunciado : (22)

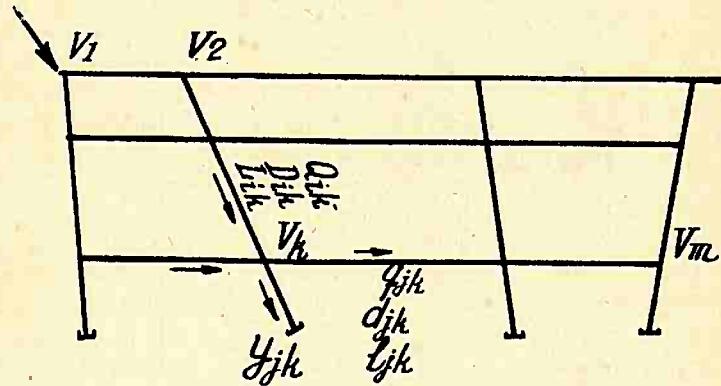
1.º) Dado o plano cotado de um conduto complexo e conhecidos os diâmetros dos tubos e as cotas piezométricas nas seções extremas das canalizações, determinar a vasão de cada trecho e as cotas piezométricas nos vértices.

Admitamos  $m$  vértices  $V_1, V_2, \dots, V_n$  e  $n$  canalizações. Em um vértice genérico  $V_k$ , sejam  $Q_{ik}$ ,

---

(22) Fischer — Eugênio — op. cit. pág. 193.

$D_{ik}$ ,  $L_{ik}$  respectivamente a vasão, o diâmetro e o comprimento de uma canalização adutora genérica e  $q_{jk}$ ,  $d_{jk}$ ,  $l_{jk}$  os mesmos elementos de uma canalização distribuidora genérica partindo de  $V_k$ . (fig. 3).



(FIG. 3)

Sejam ainda  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , as perdas de carga totais até cada um dos vértices  $V_1, V_2, \dots, V_m$ , abaixamentos êsses, incógnitos. Finalmente, seja  $y_{jk}$ , o abaixamento piezométrico conhecido na secção extrema de uma canalização derivadora.

O problema contém  $m+n$  incógnitas ( $m$  abaixamentos piezométricos  $Y_i$  e  $n$  vasões  $Q_i$ ).

Fácil é mostrar ser êste problema hidráulicamente determinado, isto é, as equações que a Hidráulica fornece são aqui em número suficiente para a determinação das incógnitas.

Com efeito, no vértice genérico  $V_k$ , como em cada um dos  $m$  vértices, pôde ser escrita uma equação do tipo :

$$\sum_{i=1}^n Q_{ik} = \sum_{j=1}^m q_{jk} \quad (22.1)$$

sendo  $r$  o número de encanamentos adutores e  $s$  o de distribuidores; ao todo  $m$  equações (22.1).

Para cada um dos  $n$  trechos subsistirá a equação de escoamento; por exemplo, para os trechos correntes em  $V_k$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_k - Y_{k-1} = \frac{64b_1}{\pi^2} \frac{Q_{ik}^2}{D_{ik}^5} L_{ik} \\ \dots \dots \dots \\ y_{jk} - Y_k = \frac{64b_1}{\pi^2} \frac{q_{jk}^2}{d_{jk}^5} l_{jk}. \end{array} \right. \quad (22.2)$$

Ao todo  $n$  equações (22.2).

O problema é pois determinado.

O segundo problema, relativo ao projeto de um conduto complexo, consiste no seguinte:

2.º) Dadas as vasões e os comprimentos de todos os encanamentos e as cotas piezométricas nas secções extremas das canalizações distribuidoras, determinar as cotas piezométricas nos vértices e os diâmetros de todos os tubos de um conduto complexo.

O problema compreende ainda  $m+n$  incógnitas, a saber:

$m$  cotas piezométricas nos vértices  
 $n$  diâmetros dos tubos.

O número de equações distintas se reduz, porém, nesse segundo problema a  $n$  (as equações de escoamento (22.2)), de vez que as  $m$  relações (22.1), agora representam apenas condições a que estão subordinadas as vasões dadas.

Em linguagem abreviada poderemos dizer que o problema é hidráulicamente indeterminado, sendo  $m$  o gráu de indeterminação.

Para levantar a indeterminação, obviamente, dois caminhos pôdem ser seguidos :

- a) diminuir o número de incógnitas, que seria conseguido, por exemplo, atribuindo, arbitrariamente ou com um critério pré-fixado, valores às cotas piezométricas nos vértices ; feito isso as  $n$  equações (22.2) permitiriam o cálculo dos diâmetros ;
- b) aumentar o número de equações distintas, introduzindo novas relações que deverão então se basear em condições não diretamente ligadas ao escoamento dos líquidos.

O primeiro caminho, mais fácil e por isso mesmo mais tentador para as aplicações, representa, não obstante, um simples recuo ante as dificuldades analíticas, si o encararmos sob o ponto de vista puramente matemático. No próximo capítulo, serão indicados os critérios aconselhados para a conveniente fixação dos valores das incógnitas, de modo a tornar mínima a repetição das operações, nessas soluções por tentativas.

O segundo caminho, muito mais trabalhoso, é verdade, porém mais racional, afasta a indeterminação procurando entre todas as soluções possíveis do problema aquela que corresponde ao "optimum" econômico.

É o que focalizaremos a seguir.

### 23. Determinação do problema geral de um conduto complexo projetado, pela condição de

**mínimo custo.** — Designado por  $C$  o custo total dos tubos que convergem em um genérico vértice  $V_k$  do conduto complexo tratado no número 22, tendo em vista a fórmula (10.9), poderemos escrever :

$$C = \sum_{i=1}^r (\mu_1 + \mu_2 D_{ik}) D_{ik} L_{ik} + \sum_{j=1}^s (\mu_1 + \mu_2 d_{jk}) d_{jk} l_{jk}. \quad (23.1)$$

Das equações de escoamento para um tubo adutor e um distribuidor genéricos do vértice  $V_k$ , (fórmulas 22.2), deduzimos :

$$D_{ik} = \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{Q_{ik}^2 L_{ik}}{Y_k - Y_{k-1}}} \quad (23.2)$$

$$d_{jk} = \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{q_{jk}^2 l_{jk}}{y_{jk} - Y_k}} \quad (23.2)$$

Substituindo em (23.1)  $D_{ik}$  e  $d_{jk}$  pelos valores obtidos em (23.2), teremos :

$$\begin{aligned} C = & \sum_{i=1}^r \left[ \mu_1 + \mu_2 \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{Q_{ik}^2 L_{ik}}{Y_k - Y_{k-1}}} \right] \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{Q_{ik}^2 L_{ik}}{Y_k - Y_{k-1}}} L_{ik} + \\ & + \sum_{j=1}^s \left[ \mu_1 + \mu_2 \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{q_{jk}^2 l_{jk}}{y_{jk} - Y_k}} \right] \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{q_{jk}^2 l_{jk}}{y_{jk} - Y_k}} l_{jk} \end{aligned} \quad (23.3)$$

Escolhida como variável independente o abaixamento piezométrico incógnito  $Y_k$  no vértice  $V_k$ , a condição de mínimo custo será expressa por

$$\frac{dC}{dY_k} = 0$$

Derivando e transformando o primeiro termo do segundo membro de (23.3), obter-se-á, depois da substituição de  $Y_k - Y_{k-1}$  pelo seu valor tirado da expressão (23.2),

$$-\frac{1}{5} \frac{\pi^2}{64b_1} \sum_{i=1}^r \frac{D_{ik}^6}{Q_{ik}^2} [\mu_1 + 2\mu_2 D_{ik}]$$

De modo análogo, a expressão final da derivada do segundo termo do segundo membro de (23.3) será :

$$\frac{1}{5} \frac{\pi^2}{64b_1} \sum_{j=1}^s \frac{d_{jk}^6}{q_{jk}^2} [\mu_1 + 2\mu_2 d_{jk}]$$

A condição de mínimo custo conduzirá pois a

$$\sum_{i=1}^r \frac{D_{ik}^6}{Q_{ik}^2} [\mu_1 + 2\mu_2 D_{ik}] = \sum_{j=1}^s \frac{d_{jk}^6}{q_{jk}^2} [\mu_1 + 2\mu_2 d_{jk}] \quad (23.4)$$

Para cada vértice  $V_k$  poderíamos escrever uma equação (23.4), tendo-se pois, ao todo,  $m$  equações, que, juntamente com as  $n$  equações de escoamento (23.2) determinariam o problema geral de um conduto complexo projetado.

**24. Casos particulares da condição de mí-**  
**nimo custo nos condutos forçados complexos.** —  
 Um primeiro caso particular do problema geral abor-  
 dado no tópico anterior, de interesse prático, é aquele  
 em que todos os tubos adutores de  $V_k$  têm vasões e  
 diâmetros iguais, isto é

$$Q_{1k} = Q_{2k} = \dots \quad Q_{rk} = Q_k \\ D_{1k} = D_{2k} = \dots \quad D_{rk} = D_k,$$

o mesmo acontecendo aos tubos distribuidores do  
 vértice  $V_k$ ,

$$q_{1k} = q_{2k} = \dots \quad q_{sk} = q_k \\ d_{1k} = d_{2k} = \dots \quad d_{sk} = d_k.$$

A equação (23.4) passa a ser

$$\frac{rD_k^6}{Q_k^2} [\mu_1 + 2\mu_2 D_k] = \frac{sd_k^6}{q_k^2} [\mu_1 + 2\mu_2 d_k],$$

e, se ainda o número de tubos adutores coincidir com  
 o de distribuidores, isto é,  $r=s$ ,

$$\frac{D_k}{d_k} = \sqrt[6]{\frac{\mu_1 + 2\mu_2 d_k}{\mu_1 + 2\mu_2 D_k}} \sqrt[3]{\frac{Q_k}{q_k}} \quad (24.1)$$

O coeficiente  $\sqrt[6]{\frac{\mu_1 + 2\mu_2 d_k}{\mu_1 + 2\mu_2 D_k}}$  pouco difere da

unidade, para diâmetros variando no intervalo  
 $0,05$  —  $0,500$ . Com efeito, admitindo por exemplo,

tubos da classe LA das especificações da A.B.N.T., para os quais, atualmente  $\mu_1=396$  e  $\mu_2=876$ , (ver nota ao pé da pág. 52) e, supondo o caso mais desfavorável, de  $d_k=0,050$  e  $D_k=0,0500$ , o coeficiente adquiriria o valor 0,851. É bem de ver que na prática, esse valor mínimo dificilmente seria possível, a menos que a diferença entre as vasões  $Q_k$  e  $q_k$  fosse de grande monta, pois a limitação das velocidades médias de escoamento da água nos condutos forçados, feita em um intervalo de amplitude pequena, (23) tem como consequência, quando o número de encanamentos adutores é igual ao de distribuidores, a quase impossibilidade da coexistência de valores extremos para os diâmetros.

Nessas condições, a equação (24.1) pode ser escrita, em primeira aproximação, na forma muito mais simples :

$$\frac{D_k}{d_k} = \sqrt[3]{\frac{Q_k}{q_k}} \quad (24.2)$$

isto é, a relação entre os diâmetros dos encanamentos adutores e distribuidores deve ser igual à raiz cúbica da relação entre as vasões correspondentes.

É interessante observar que a equação (24.2) é a expressão da condição genérica de mínimo custo nos condutos radiais de igual número de encanamentos adutores e distribuidores, quando se admite a hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro de uma tubulação forçada. (24)

(23) Segundo Bonnet L — op. cit. pág. 584, para os diâmetros indicados a velocidade deve estar entre 0,60 e 1,50 m/seg.

(24) Fischer — op. cit. — pág. 207.

Com as hipóteses sobre o custo, mais de acordo com a realidade, conforme introduzimos no Capítulo II, a expressão (24.2) passa a ser um caso particular de (24.1).

É óbvio que si  $Q_k = q_k$ , a condição de mínimo custo conduziria a  $D_k = d_k$ .

**25. Condição de mínimo custo para uma canalização alimentada por um ponto intermediário.** — Nos particulares condutos complexos que são as rôdes de distribuição de água potável, no sistema conhecido como ramificado, o conduto principal alimenta sucessivamente os encanamentos secundários. Nesse sistema é interessante determinar os pontos de alimentação do conduto principal de modo a tornar mínimo o custo dos condutos secundários. Trata-se de um problema clássico, resolvido na maior parte dos compêndios de Hidráulica, mas as fórmulas são deduzidas na suposição da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro.

Resolvamos a questão partindo das expressões por nós obtidas no Capítulo II.

Seja  $ABC$  um conduto de comprimento  $L_T$  alimentado pelo ponto intermediário  $B$ , cuja localização sobre  $AC$  se quer determinar de modo a tornar mínimo o custo de  $ABC$ . Suponhamos que a vasão a ser conduzida ao ponto  $A$  seja  $Q$  e  $q$  a relativa ao ponto  $C$ .  $D$  e  $L$  representarão o diâmetro e o comprimento do trecho  $BA$  e  $d$  e  $l$  os correspondentes elementos de  $BC$ ;  $Y$ ,  $y_1$  e  $y_2$  os abaixamentos piezométricos correspondentes aos pontos  $B$ ,  $A$  e  $C$  respectivamente. (fig. 4).

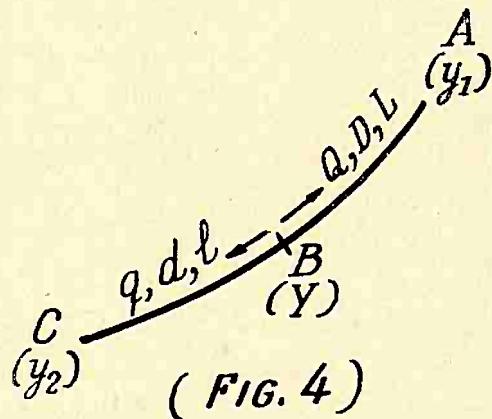
O custo do conduto  $ABC$  será

$$C = (\mu_1 + \mu_2 D)DL + (\mu_1 + \mu_2 d)dl \quad (25.1)$$

e das equações de escoamento nos dois trechos  $BA$  e  $BC$ , deduzimos,

$$D = \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{y_1 - Y}} \quad (25.2)$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{64b_1}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{q^2 l}{y_2 - Y}}$$



Tomando-se como variável independente um dos comprimentos dos trechos, por exemplo  $l$ , a condição de mínimo custo exige que

$$\frac{dC}{dl} = 0$$

Substituindo-se em (25.1),  $D$  e  $d$  pelos valores obtidos em (25.2) e igualando  $\frac{dC}{dl}$  a zero, obteremos

$$-\frac{1}{5} D(6\mu_1 + 7\mu_2 D) + \frac{1}{5} d(6\mu_1 + 7\mu_2 d) = 0$$

(os sinais contrários provém de que sendo

$$L_T = L + l = \text{const}, \quad \frac{dL}{dl} = -1, \quad \text{ou}$$

$$\frac{6\mu_1 D + 7\mu_2 D^2}{6\mu_1 d + 7\mu_2 d^2} = 1, \quad \text{o que exige } D = d \quad (25.3)$$

Isto é, a condição de mínimo custo para o conduto  $AB$  é verificada quando os diâmetros dos dois trechos  $BA$  e  $BC$  forem iguais, o que coincide aliás com o resultado obtido quando se admite a hipótese da proporcionalidade entre o custo e o diâmetro.

Como imediata consequência de (25.3) resulta que as perdas de carga por unidade de comprimento nos trechos  $BA$  e  $BC$  estão entre si na razão do quadrado das respectivas vasões.

Ainda, si as cotas piezométricas nas secções extremas forem iguais,  $y_1 = y_2$ , então

$$\frac{L}{l} = \frac{q^2}{Q^2} \quad \text{e, finalmente, si as}$$

vasões  $Q$  e  $q$  forem também iguais,  $L = l$ , isto é  $B$  dividirá o segmento  $AC$  em dois segmentos iguais.

**26. Impraticabilidade do dimensionamento das rôdes de distribuição de água potável com as condições de minimo custo dos condutos complexos.** — O dimensionamento de uma rôde de distribuição de água potável por intermédio das equações deduzidas nos números 22 e 23 do presente Capítulo apresenta dificuldades de cálculo verdadeiramente insuperáveis.

Mesmo no caso das rês chamadas ramificadas, menos frequente na prática, em que se conhece previamente o trajeto da água em cada trecho e portanto, em um vértice qualquer são separáveis os encanamentos adutores dos distribuidores, o cálculo pelas fórmulas dos condutos complexos não seria praticamente possível. Além das dificuldades puramente matemáticas na resolução de um sistema de  $m+n$  equações, sendo  $m$  e  $n$  consideráveis mesmo no caso de pequenas rês, dificuldades essas que são acrescidas pela natureza das equações (22.2) e (22.4), outros impecilhos existem e êsses ligados às condições de bom funcionamento das rês.

Assim, nem sempre as soluções do sistema (22.2) e (22.4) são aceitáveis na prática, visto como os diâmetros, as velocidades e as cargas disponíveis têm variações limitadas nas aplicações.

Nas rês malhadas, as dificuldades são ainda muito maiores, já que "a priori" são desconhecidos os trajetos da água, não se podendo, como no caso dos sistemas ramificados, predeterminar os encanamentos adutores e distribuidores, em cada vértice. É verdade que, baseando-se em certas suposições, que recordaremos sucintamente no próximo capítulo, é possível transformar os sistemas malhados em ramificados, mediante o seccionamento fictício das malhas em pontos convenientemente escolhidos.

Deixando de parte as dificuldades puramente matemáticas no cálculo rigoroso de uma rête de distribuição, convém recordar as incertezas sobre os próprios dados do problema e as limitações que a técnica sanitária impõe aos valores dos elementos hidráulicos.

No abastecimento de água de um centro habitado a primeira grande incerteza refere-se à quanti-

dade de água necessária aos diversos usos, de vez que o consumo é essencialmente variável segundo a população e seus hábitos, o clima, o caráter industrial, o sistema de suprimento à domicílio, etc.. Sem entrar nas discussões técnico-sanitárias para a estimativa das quantidades necessárias a cada uso, o simples enunciado dos diversos fatores que intervêm é suficiente para mostrar ser inútil pensar em se obter normas gerais que permitam a fixação de dados rigorosos. Mas, mesmo que se admita fixado, de um modo mais ou menos preciso, o volume por habitante e por dia, como o consumo apresenta variações periódicas, nova causa de indeterminação é introduzida : — a relação entre a demanda máxima e o consumo médio, relação essa que, maximamente entre nós, onde são ainda inexistentes os dados estatísticos da distribuição de água potável, não pode ser fixada com precisão.

Outros motivos de dúvidas, e, não pequenas, surgem quando se tem de passar da quota diária "per capita" admitida à vazão fictícia por unidade de comprimento ou de área, o que exige o conhecimento do cadastro imobiliário e demográfico e que, na falta de dados estatísticos, são às vezes admitidos, nem sempre com suficiente aproximação.

Sem fazer menção a outras causas de incerteza, e são muitas, os simples argumentos acima, demonstram à saciedade, que, num projeto de rede de distribuição, a vazão em cada trecho não é um dado matematicamente rigoroso, mas um elemento estimativo, mais ou menos arbitrário, e como tal deve ser entendido.

Por outro lado, a técnica sanitária impõe limitações aos elementos hidráulicos, limitações essas, nem sempre compatíveis com as condições impostas

pelas fórmulas dos condutos complexos. Assim é que, por exemplo, a carga hidráulica disponível em um ponto qualquer da rede deve ser tal que garanta nos prédios, a alimentação dos reservatórios e aparelhos sanitários situados acima do rez do chão, e, possibilite, dentro de um limite razoável os serviços públicos de irrigação e proteção a incêndios.

Entretanto, si as cargas ultrapassassem determinados limites, sérios inconvenientes apareceriam, tais como, entre outros, o aumento das fugas pelas juntas e aparelhos.

Identicamente, os diâmetros, mesmo nos ramais extremos e de pequena importância, não devem descer abaixo de um certo limite, tendo em vista a possibilidade de incrustações, a facilidade das ligações dos ramais domiciliários à rede pública e a boa circulação nos sistemas malhados.

Outros argumentos quanto à limitação prática dos elementos hidráulicos poderiam ser ainda aduzidos em complemento às observações acima. Julgamos desnecessária maior extensão, terminando o capítulo com a seguinte conclusão, que o resume :

As dificuldades de índole matemática, as incertezas na fixação dos dados do problema e as limitações impostas pela técnica sanitária à variação dos elementos hidráulicos a serem determinados, não justificam o cálculo matemático rigoroso mas laboriosíssimo das redes de distribuição de água potável pelas fórmulas dos condutos complexos.

## VI — A CONDIÇÃO DE MÍNIMO CUSTO NAS RÊDES DE DISTRIBUIÇÃO.

### 27. Análise de um sistema de distribuição.

No capítulo precedente pusemos em evidência as dificuldades de cálculo, verdadeiramente insuperáveis, que surgem ao se pretender dimensionar analiticamente uma rête de distribuição de água potável, considerando-a como um conduto complexo.

Nas aplicações, ou se admite um conjunto de condições ligadas ao bom funcionamento da rête, fazendo-se a determinação dos elementos incógnitos restantes por tentativas diretas, ou se considera o conduto complexo, malhado, seccionado, por oportunos pontos de separação, em condutos ramificados, os quais são então dimensionados com maior facilidade.

O critério das tentativas dirétas é geralmente adotado pelos autores norte-americanos ; o da decomposição das malhas em ramificações pelos europeus. A análise hidráulica de uma rête de distribuição no critério das tentativas diretas pode ser feita por diversos métodos, entre os quais merecem citação o das tentativas arbitrárias, o do analizador elétrico e o de Hardy Cross. Em todos eles admite-se, em primeira tentativa, uma certa distribuição das vasões ou das perdas de carga em todo o sistema, calculando-se por uma das fórmulas dos condutos forçados as perdas de carga ou as vasões nos diversos trechos, ajustando-se por tentativas seguintes as distribuições

dos valores até que sejam verificadas as equações (22.1) e (22.2).

No método das tentativas arbitrárias, os valores admitidos são ajustados arbitrariamente, de modo que a convergência dos erros é demorada e incerta, tornando esse método pouco prático.

No método do analizador elétrico aproveita-se a analogia existente entre uma rede de distribuição de água potável e uma de condutores elétricos, (que obedece a lei de Kirchhoff), para se construir um modelo elétrico da rede, no qual cada trecho é representado por uma resistência. Nesse modelo elétrico, as tensões representam as perdas de carga e as intensidades das correntes as vazões, escolhidas convenientemente as escalas. Deve-se observar não ser o sistema elétrico perfeitamente análogo ao hidráulico, pois no primeiro, as tensões são proporcionais às intensidades das correntes, ao passo que no segundo, as perdas de carga variam aproximadamente com a segunda potência das vazões. Por esse motivo, não é possível representar cada elemento da rede hidráulica por uma resistência elétrica constante; a resistência deve variar com a intensidade da corrente de modo que, para cada condição de carga, a relação entre a tensão e a intensidade da corrente seja tal que as correspondentes perda de carga e vazão satisfaçam a equação de escoamento em condutos forçados que tiver sido adotada. Para facilitar o ajustamento do modelo elétrico, Hazen tem substituído as resistências por lâmpadas com filamentos especiais que, aquecidos, permitem alterar automaticamente a resistência, em uma maneira predeterminedada (25).

---

(25) Davis-Handbook of Applied Hydraulics — pag. 727.

O Prof. Hardy Cross desenvolveu recentemente um método de aproximações sucessivas, no qual a convergência dos erros é rápida, podendo se obter resultados suficientemente precisos com um número pequeno de tentativas. Resumidamente o método consiste no seguinte : (26)

- 1) Adotar uma certa distribuição das vasões.
- 2) Calcular em cada trecho a perda de carga por uma das fórmulas de resistência; se, por exemplo, for adotada a de Darcy, determinar, em cada trecho,

$$H = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} L Q^2 = r Q^2.$$

- 3) Levando em consideração o sinal, calcular a perda de carga total ao longo de cada malha ou circuito fechado:

$$\Sigma H = \Sigma r Q^2$$

- 4) Calcular também para cada uma das malhas a somatória  $2\Sigma rQ$ , sem se levar em conta o sinal.
- 5) Para o equilíbrio da perda de carga em cada malha ( $\Sigma rQ^2 = 0$ ), adotar uma vasão de ajustamento igual a

$$\Delta Q = -\frac{\Sigma rQ^2}{2\Sigma rQ}$$

(26) Analysis of Flow in Networks of Conduits and Conductors", Univ. Ill. Exp. Sta., Bull. 286, 1936.

- 6) Calcular as novas vasões, ajustadas, e, repetir o processo até que a aproximação desejada tenha sido obtida.

A justificação do método é imediata. Com efeito, si a distribuição de vasões, adotada inicialmente, estivesse correta, em cada uma das malhas  $\Sigma rQ^2 = 0$ , e o problema estaria resolvido. Si, em um dos circuitos fechados isso não se desse, teríamos uma perda de carga residual  $\Sigma rQ^2$ , positiva ou negativa, o sinal dependendo das direções prefixadas para o escoamento.

Representando por  $Q_1$  a vasão corrigida, em um trecho qualquer, por  $Q$  a vasão inicialmente adotada e por  $\Delta Q$  a correção a ser feita,

$$Q_1 = Q + \Delta Q.$$

A perda de carga, feito o primeiro ajustamento das vasões, será :

$$H_1 = rQ_1^2 = r(Q + \Delta Q)^2 = r[Q^2 + 2Q(\Delta Q) + (\Delta Q)^2]$$

Quando  $\Delta Q$  for pequeno face à vasão inicialmente adotada  $Q$ , o último termo do segundo membro pôde ser desprezado ; nesse caso, para um circuito fechado, no qual

$$\Sigma rQ_1^2 = 0,$$

$$\Sigma rQ^2 + 2(\Delta Q)\Sigma rQ = 0$$

$$\Delta Q = -\frac{\Sigma rQ^2}{2\Sigma rQ}.$$

Si  $\Delta Q$  não for suficientemente pequeno em relação a  $Q$ , a equação anterior não fornece um valor bastante aproximado para  $\Delta Q$ , em virtude de se ter desprezado o termo  $(\Delta Q)^2$ . Entretanto,

usualmente, a convergência dos erros é rápida, sendo raros os casos em que o número de tentativas ultrapassa três.

O método, que está se generalizando rapidamente nos Estados Unidos, pôde ter a sua aplicação ainda grandemente facilitada, com o emprego de tabelas que fornecem, para uma determinada fórmula de condutos forçados, o valor de  $r$  para cada valor do diâmetro  $D$  (27).

**28. Seccionamento dos circuitos fechados.**  
**Transformação dos sistemas malhados em ramificados.** — Para o dimensionamento das rôdes malhadas de abastecimento de água potável, preferem, outros autores, principalmente os europeus, seccionar, com um critério determinado, os circuitos fechados, transformando a rôde malhada em um sistema ramificado, no qual "a priori" se pôde estabelecer o sentido do movimento da água. Substituem-se, assim, as tentativas dirétas, de que tratámos no número anterior, pelas pesquisas das localizações mais convenientes dos pontos de separação das malhas; tudo se resume, pois, em fixar o trajecto que a água deverá seguir para atingir um ponto qualquer da rôde.

Dois são os principais critérios para a fixação desse trajecto: — o de Frühling e o de Lüger — Mannes. (28)

No critério de Frühling, as canalizações são consideradas como condutos livres que devem irrigar toda a região da cidade a ser abastecida, aproveitando-se destarte os desníveis disponíveis do melhor modo possível. Como imediato resultado, as canali-

---

(27) Babbit and Doland—Water Supply Engineering, pag. 386.

(28) Foltz, M. — Calcolo Economico delle Tubazioni — pag. 60 e 61.

zações mais importantes devem alimentar os pontos, que sendo mais elevados, podem suportar as menores perdas de carga.

No que se refere ao custo da rête, pode-se apontar, de início, o principal inconveniente do critério de Frühling: — a água, cujo trajecto é estabelecido em função exclusiva das condições altimétricas, percorre geralmente um caminho indireto, mais longo, afastando-se assim das condições de mínima despesa.

O critério de Lüger-Mannes funda-se na hipótese de que a água, para atingir um determinado ponto da rête, deve percorrer o trajecto mais curto possível.

Apesar das críticas de Thiem e Rother (29), tem a prática mostrado que o critério de Lüger-Mannes, além de dar lugar a um método simples para determinar a distribuição das vasões, fornece ainda resultados os mais próximos do "optimum" económico. Na pesquisa do mínimo custo é por isso este critério usado quase que com exclusividade, guardando-se do de Frühling apenas o conceito de que as zonas mais elevadas da alimentação devem, quando possível, ser abastecidas por um conduto principal.

O critério de Lüger-Mannes, fixando, em todos os trechos, o sentido de movimento da água, produz o seccionamento das malhas em sistemas ramificados, decompondo a rête em condutos principais, secundários, etc.. Muitas vezes, para melhorar a distribuição, e, "ex-vi" das particulares condições topográficas, é-se obrigado a alterar a posição dos pontos de separação, obtidos com o critério de Lüger-Mannes, isto é, feita a decomposição da rête malhada e antes de se passar ao seu cálculo, deve-se atentar para as

---

(29) "Journal für Gasbeleuchtung sowie für Wasserversorgung" n.º 40 e 41 de 1911, apud Bonnet, op. cit., pag. 752.

condições locais, que podem indicar vantajosas mudanças nas localizações dos pontos de separação. Nota-se ainda que, em um ponto de separação, as cotas piezométricas, à juzante, dos trechos aí terminados devem ter valores bastante próximos (30); frequentemente, dada a diversidade dos diâmetros na rête, esse fato obriga também o deslocamento dos pontos divisórios, dando lugar ao estabelecimento de novos sentidos de escoamento da água.

**29. Dimensionamento de uma rête de distribuição de água potável tendo em vista a condição de mínimo custo.** — As observações feitas nos números 27 e 28, permitem-nos indicar o método prático seguinte para o dimensionamento de uma rête de distribuição de água potável tendo em vista a condição de mínimo custo, de vez que o método rigoroso, não pôde ser empregado, pelos motivos expostos no número 26.

Estabelecido em planta o traçado da rête, faz-se inicialmente a análise do sistema de distribuição com a finalidade de fixar o sentido de escoamento da água em todos os trechos. A análise é simplificada bastante quando adotado o critério de Lüger-Mannes, do trajecto mínimo.

Calculam-se depois as vasões em cada um dos trechos, partindo dos elementos básicos do projecto: quota diária "per-capita", coeficientes de flutuação na demanda, número de habitantes por unidade de área ou de comprimento, serviço de proteção a incêndios, etc.. Cada trecho poderá, assim, ser considerado como uma canalização com vasão uniforme

---

(30) É' praxe generalizada, entre nós, admitir como toleraveis, em um ponto de separação, diferenças de cotas piezométricas não ultrapassando dez por cento da carga média disponível no ponto.

mente distribuída ao longo do trecho e vasão constante na extremidade. Totalizando-se as vasões, de jazante para montante, ficam caracterizados os diversos condutos, terciários, secundários, primários ou principais.

A seguir, tendo em vista outro elemento básico de projecto — a carga disponível mínima (31) — são determinadas as cotas piezométricas dos pontos críticos da rede, pontos esses caracterizados ou pelas distâncias ao reservatório de distribuição, ou pelas posições altimétricas.

O conduto ligando o reservatório de distribuição a um desses pontos críticos será, pois, constituído de trechos de vasão uniformemente distribuída ao longo das canalizações e vasão constante na extremidade, tendo uma perda de carga global igual à diferença das cotas piezométricas do nível d'água no reservatório e do ponto crítico considerado. Nesse conduto a pesquisa do mínimo custo pode, assim ser feita pelas fórmulas deduzidas no 4.º capítulo, número 19. Idenicamente opera-se para os outros condutos principais, secundários, etc.. Deve-se notar, por último que a exigência de um diâmetro mínimo na rede de distribuição (32), diâmetro esse que a prática de dimensionamento tem mostrado ocupar geralmente, cerca de três quartas partes dos trechos de toda a rede, reduz a um número, relativamente pequeno, os condutos em que se faz a pesquisa do mínimo custo.

---

(31) Diversos órgãos técnicos do país têm já normas fixando a carga disponível mínima, em distritos de residências individuais, como por exemplo a Diretoria de Engenharia do Departamento das Municipalidades de São Paulo — Caderneta n.º 1 (1934), que prescreve quinze metros.

(32) Relativamente à fixação do diâmetro mínimo não há ainda norma adotada em nosso país. O "Inquerito sobre tubos de ferro fundido centrifugados", publicado em 1943 pela A.B.N.T., contém interessantes debates entre os partidários de 50mm. e os de 75 mm..

IMPRIMIU :  
INDÚSTRIA GRÁFICA SIQUEIRA  
SÃO PAULO