

COMPACTOS PRÓPRIOS ASSOCIADOS A SUBESPAÇOS DE $C(K)$

PUC-SP

Galdino Cesar da Rocha Filho

Benedito Antonio da Silva

Sonia Barbosa Camargo Igliori

IME-USP

Zara Issa Abud

INTRODUÇÃO.

A noção de compacto associado tem sido estudada tanto no contexto da Análise Harmônica em que K é um grupo abeliano compacto (ou localmente compacto) e X um subespaço invariante por translação de $C(K)$ [1], quanto num contexto mais geral da Análise Funcional [2]. A abordagem desse trabalho se dá no contexto mais geral em que K é um compacto Hausdorff e $C(K)$ é o espaço das funções contínuas definidas sobre K a valores em $\mathbb{R}$ munido da norma uniforme $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Para toda parte compacta K_0 de K notamos que $\|f\|_{K_0} = \sup_{x \in K_0} |f(x)|$.

DEFINIÇÃO 1.

Seja X um subespaço fechado de $C(K)$. Dizemos que X admite compacto próprio associado se existe um $K_0 \subsetneq K$ compacto e existe $M > 0$ tal que $\|f\| \leq M \|f\|_{K_0}$, para toda função $f \in X$.

EXEMPLO 1.

Seja K um compacto Hausdorff infinito e p um ponto de acumulação de K . Seja $X = \{f \in C(K) : f(p) = 0\}$. Então X não admite compacto próprio associado.

Demonstração.

Seja $K_0 \neq \emptyset$ um compacto próprio de K , e seja $\emptyset = K - K_0$. Temos dois casos a considerar:

(i) $p \notin K_0$.

Então, $p \in \emptyset$ e, como p é ponto de acumulação de K , existe $q \in \emptyset$, com $p \neq q$.

Pelo teorema de Tietze, existe $f \in C(K)$ tal que $f|_{K_0 \cup \{p\}} = 0$ e $f(q) = 1$.

Dessa forma, $f(p) = 0$, e portanto, $f \in X$. Por sua vez, $f|_{K_0} = 0$, o que prova que K_0 não é compacto próprio associado a X .

(ii) $p \in K_0$.

Seja $q \in \emptyset$, e considere $f \in C(K)$ tal que $f|_{K_0} = 0$ e $f(q) = 1$. Então $f \in X$, e K_0 não é compacto associado a X .

Dessa forma, X não possui compacto próprio associado.

LEMA.

Seja K um compacto Hausdorff e X um subespaço de $C(K)$. Suponha que X não admite compacto próprio associado. Então, para todo ponto isolado $p \in K$, $\chi_{\{p\}} \in X$.

O próximo exemplo é consequência imediata do lema precedente.

EXEMPLO 2.

Seja K um compacto Hausdorff finito. Então todo subespaço próprio de $C(K)$ possui compacto próprio associado.

EXEMPLO 3.

Seja K um compacto Hausdorff infinito e X um subespaço de $C(K)$ de dimensão finita. Então X admite compacto próprio associado.

O proximo exemplo permite exibir toda uma classe de subespaços de $C(K)$ sem compacto proprio associado.

EXEMPLO 4.

Seja K um compacto Hausdorff infinito, e $F \subsetneq K$ fechado. Seja $X = \{f \in C(K): f|_F \equiv 0\}$. São equivalentes:

- (i) $\overset{0}{F} = \emptyset$.
- (ii) X não admite compacto proprio associado.

Introduziremos uma notação: dado um compacto K e F um subconjunto de K , denotamos por $C_0(K, F) = \{f \in C(K): f|_F \equiv 0\}$.

TEOREMA 1.

Seja K um compacto Hausdorff infinito e K' o conjunto dos pontos de acumulação de K . Considere $C_0(K, K') = \{f \in C(K): f|_{K'} \equiv 0\}$. São equivalentes:

- (i) $C_0(K, K')$ não tem compacto proprio associado;
- (ii) K é fecho dos seus pontos isolados;
- (iii) K' não possui interior em K .

Exemplos de espaços compactos que satisfazem a condição (ii) do teorema acima são os compactos dispersos. Mas existem outros:

- a) $K = \beta\Gamma$, o compactificado de Stone-Cech de um conjunto Γ infinito qualquer, considerado com a topologia discreta.
- b) Seja $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q}, p \neq 0 \text{ e } \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Considere $K = \{(x, f(x)): x \in [0,1]\} \cup ([0,1] \times \{0\})$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$. Então $K' = [0,1] \times \{0\}$ e $K = \overline{\{(x, f(x)): x \in [0,1]\}}$, isto é, K é fecho dos seus pontos isolados.

Ainda sobre tais compactos, vale citar o seguinte resultado:

TEOREMA 2.

Seja K um compacto Hausdorff infinito que é fecho dos seus pontos isolados. Seja X um subespaço fechado de $C(K)$. São equivalentes:

- (i) X não possui compacto próprio associado;
- (ii) $X \supseteq C_0(K, K')$.

Até agora, citamos subespaços de $C(K)$ sem compacto próprio associado que são do tipo $C_0(K, F)$, onde F é fechado de K com interior vazio. No entanto, é fácil produzir exemplos que não sejam deste tipo, e que justificam resultados como o do teorema acima.

Seja $K = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N} - N$ e $X = \text{span} [C_0(K, F) \cup \{f \equiv 1\}]$. X não possui compacto próprio associado, pois $Z = C_0(K, F)$ não o possui e $Z \subseteq X$. Mas X não é do tipo $C_0(K, F)$, pois as funções constantes estão em X .

O seguinte resultado caracteriza os subespaços de $C(K)$ sem compacto próprio associado no caso do compacto K ser fecho de seus pontos isolados.

TEOREMA 3.

Seja K um compacto Hausdorff infinito e I o conjunto dos pontos isolados de K . Suponha que $K = \bar{I}$. Seja X subespaço fechado de $C(K)$. São equivalentes:

- (i) X não possui compacto próprio associado;
- (ii) X contém subespaço isométrico a $C_0(I)$.

Mesmo quando o compacto K não é como acima, podemos tirar conclusões geométricas importantes se K possui infinitos pontos isolados.

TEOREMA 4.

Seja K um compacto Hausdorff com infinitos pontos isolados, e suponha que X é subespaço fechado de $C(K)$ sem compacto próprio associado. Então X contém subespaço isométrico a $C_0(\mathbb{N})$.

O proximo resultado é importante, pois independe da existência de pontos isolados no compacto.

TEOREMA 5.

Seja K um compacto Hausdorff infinito e X subespaço fechado de $C(K)$ sem compacto próprio associado. Então X contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.

Demonstração.

Vamos provar que existe uma sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ de funções de X verificando as seguintes condições:

- a) existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $0 < c_1 \leq \|f_n\| \leq c_2 < \infty, \forall n \geq 1$.
- b) $\sup_{x \in K} \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| < \infty$.

Peio teorema de A. Pelczynski ([4]), poderemos então concluir que X possui copia isomorfa de $C_0(\mathbb{N})$.

Seja K um compacto infinito, existe uma sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ de abertos de K , não vazios e dois a dois disjuntos. Como X não possui compacto próprio associado, para cada $n \geq 1$, existe $f_n \in X$ com $\|f_n\| = 1$ e $\|f_n|_{K-A_n}\| < \frac{1}{2^n}$.

Fazendo $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = 1$, obtemos que $0 < \frac{1}{2} \leq \|f_n\| = 1, \forall n \geq 1$. Além disso,

$$\sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \leq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K - \bigcup_{n \geq 1} A_n \\ 2 & \text{se } x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n \end{cases}$$

Citaremos exemplos que motivarão uma questão:

EXEMPLO 5.

Se $K = [0, \omega]$ e $F = \{\omega\}$ então $C_0(K, F) = \{f \in C(K): f(\omega) = 0\}$ é isométrico a $C_0(\mathbb{N})$, e portanto, isomorfo $C(K)$.

EXEMPLO 6.

Se $K = \beta\mathbb{N}$ e $F = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ então F é fechado sem interior, e portanto, $C_0(K, F) = \{f \in C(\beta\mathbb{N}): f|_F = 0\}$ não possui compacto próprio associado. Mas $C_0(K, F) \approx C_0(\mathbb{N})$, e portanto, não contém subespaço isomorfo a $C(K)$.

Uma pergunta natural é a seguinte: seja K um compacto Hausdorff infinito, e F um fechado sem interior em K . Quando é que $C_0(K, F)$ é isomorfo a $C(K)$?

O teorema seguinte responde a pergunta para o caso em que $K = [0,1]$.

TEOREMA 5.

Se F é um fechado não vazio e sem interior de $[0,1]$ então $C_0([0,1], F)$ é isomorfo a $C[0,1]$.

Demonstração.

Como F é fechado em $[0,1]$ então existe uma sequência $(]a_n, b_n[)_{n \geq 1}$ de intervalos abertos e dois a dois disjuntos em $[0,1]$ tal que $[0,1] - F = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[$.

Para cada função contínua $f: F \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos a extensão linear $\tilde{f}$ de f a $[0,1]$, dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in F \\ f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} (x - a_n), & \text{se } x \in]a_n, b_n[, \text{ para algum } n \geq 1. \end{cases}$$

Seja $Y = \{\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}: f \in C(F)\}$. Y é subespaço fechado de $C[0,1]$. Além disso, a função $P: C[0,1] \rightarrow Y$, dada por $P(f) = \tilde{(f|_F)}$ é uma projecção de $C[0,1]$ em Y , o que implica que Y é complementado em $C[0,1]$.

Como $\ker P = C_0(K, F)$, obtemos que $C[0,1] = C_0(K, F) \oplus Y$.

$C_0(K, F)$ é universal para separáveis: seja $n_0 \geq 1$ um número natural qualquer, e considere um intervalo $[p, q] \subseteq]a_{n_0}, b_{n_0}[$. Para cada $f \in C([p, q])$, considere a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [p, q] \\ \frac{f(p)}{p - a_{n_0}} (x - a_{n_0}), & \text{se } x \in [a_{n_0}, p] \\ \frac{f(q)}{b_{n_0} - q} (b_{n_0} - x), & \text{se } x \in [q, b_{n_0}] \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] - [a_{n_0}, b_{n_0}] \end{cases}$$

A aplicação $T: C([p, q]) \rightarrow C_0(K, F)$ é uma isometria, o que demonstra que $C_0(K, F)$ é universal para separáveis. Citamos aqui o teorema de Rosenthal ([5]): se X é subespaço complementado de $C[0, 1]$ e X° não separável então X é isomorfo a $C[0, 1]^\circ$.

No caso, $C_0(K, F)$ é complementado em $C[0, 1]$ e, como é universal para separáveis, possui dual não separável, e portanto, é isomorfo a $C[0, 1]$, o que termina a demonstração. Vale mais:

TEOREMA 6.

Seja K um compacto métrico perfeito e F um fechado sem interior em K . Então $C_0(K, F)$ é isomorfo a $C(K)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DECHAMPS-GONDIM, M. Sur les compacts associes aux ensembles lacunaires. les ensembles de Sidon et quelques problems ouverts. Publ. Math. D'Orsay, 84-01.
- [2] GILIOLI, A. et ROCHA FILHO, G. Compacts associes a des sous-espaces de $C(K)$. A. R. Acad. Sc. Paris, a paraitre et Publ. Math. D'Orsay, a paraitre.
- [3] DECHAMPS-GONDIM, M. Theorie isomorphique des frontieres et densite Harmonique. 24^o Seminario Brasileiro de Analise.
- [4] LACEY, H.E. The isometric theory of classical Banach spaces.
- [5] ROSENTHAL, H. On factors of $C([0,1])$ with non-separable dual, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 361-378.
- [6] LUST-PIQUARD, F. L'espace de fonctions presue periodique dont le spectro est contenu dans un ensemble compact denombrable a la propriete de Schur. Colloquim Math. 41 (1979), p. 273.