



Escola Politécnica - EPBC



31200053607

BT/PEF-8709

ANÁLISE DAS PLACAS EM REGIME
ELASTO-PLÁSTICO PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

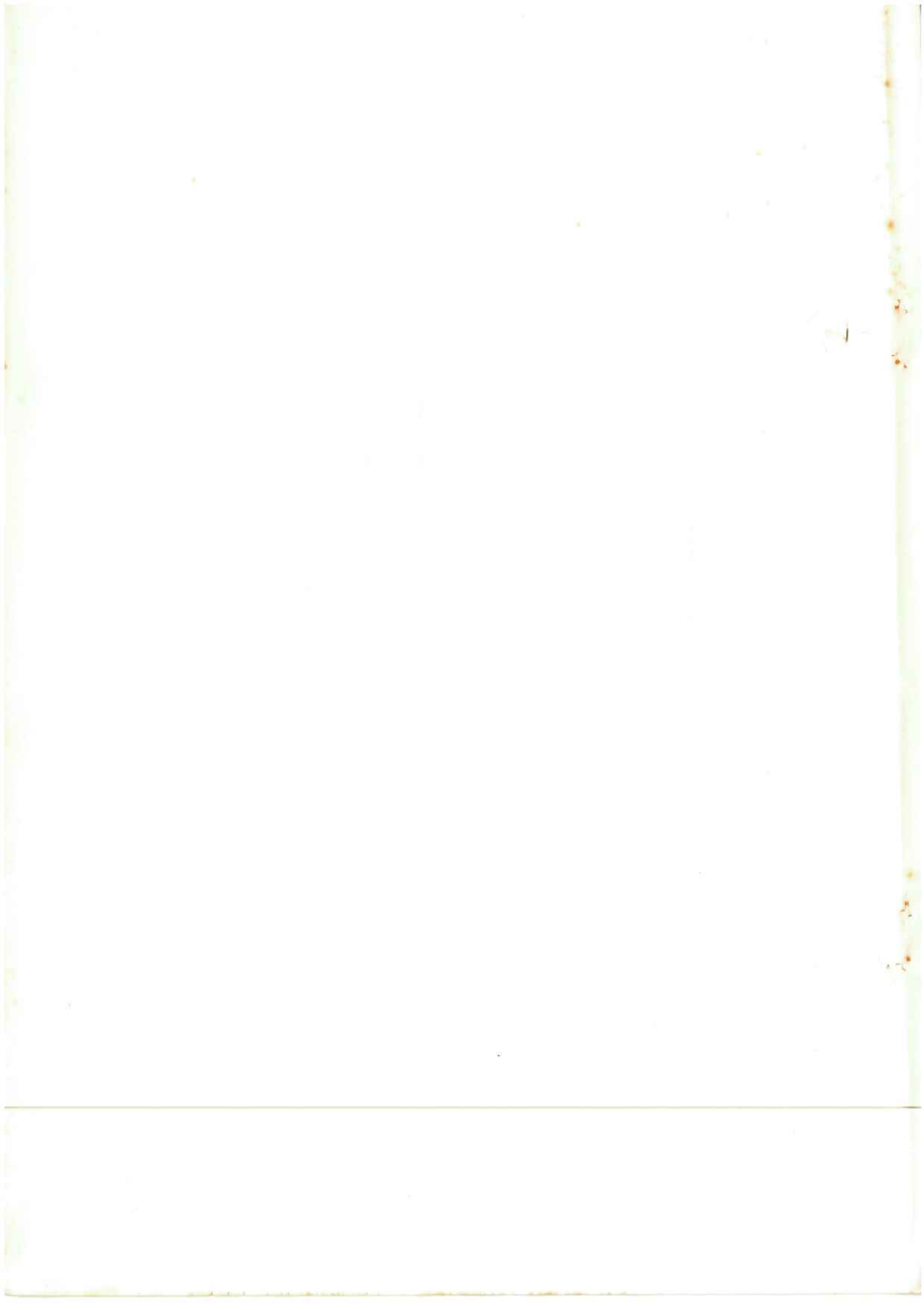
Luiz A. Cortese Diogo
Professor Assistente Doutor
(recebido em 01/06/87)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- Engenharia de Solos	W.Hachich
- Estruturas de Concreto	P.B.Fusco
- Estruturas Metálicas e de Madeira	P.B.Fusco
- Interação Solo-Estrutura	C.E.M.Maffei
- Mecânica Aplicada	D.Zagottis
- Métodos Numéricos	I.Q.Barros
- Pontes e Grandes Estruturas	J.C.Figueiredo Ferraz
- Teoria das Estruturas	V.M.Souza Lima



INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste trabalho, a sequência de operações que permitem a análise de placas pelo método dos elementos finitos, quando se consideram deformações pequenas, mas que conduzem à plasticização do material. Admite-se, porém, que seja válida a adoção de relações deformação - deslocamentos lineares.

Os casos de plasticidade com encruamento podem ser analisados com uma formulação análoga à que aqui se desenvolve.



1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Considere-se a placa da *fig. (1.1)* discretizada em um número finito de elementos, nos quais o deslocamento de um ponto P é caracterizado, segundo a teoria clássica, pelas componentes:

$$u = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z \quad v = -\frac{\partial w_0}{\partial y} z \quad w = w_0 \quad (1.1)$$

onde w_0 é o deslocamento na direção z do ponto P_0 , projeção de P na superfície média, dado em função dos deslocamentos nodais por meio de funções de interpolação, ou seja

$$w_0(x,y) = \sum [\psi_i(x,y) \cdot w_i + \xi_i(x,y) \cdot \theta_{xi} + \eta_i(x,y) \cdot \theta_{yi}] \quad (1.2)$$

com

$$\theta_{xi} = \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_i \quad \text{e} \quad \theta_{yi} = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_i \quad (1.3)$$

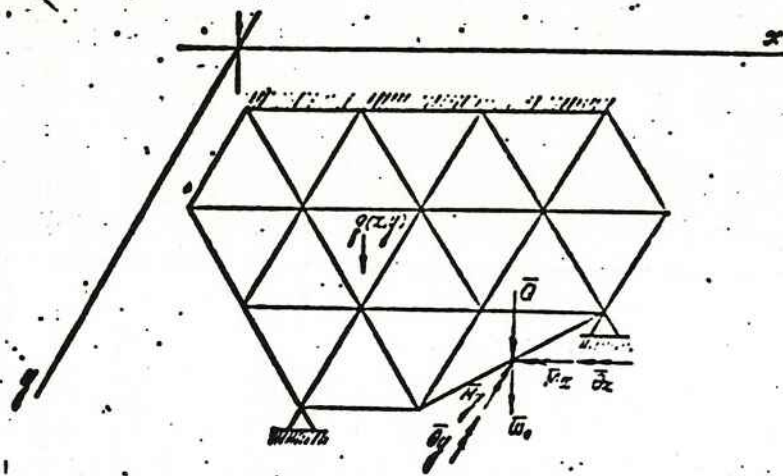


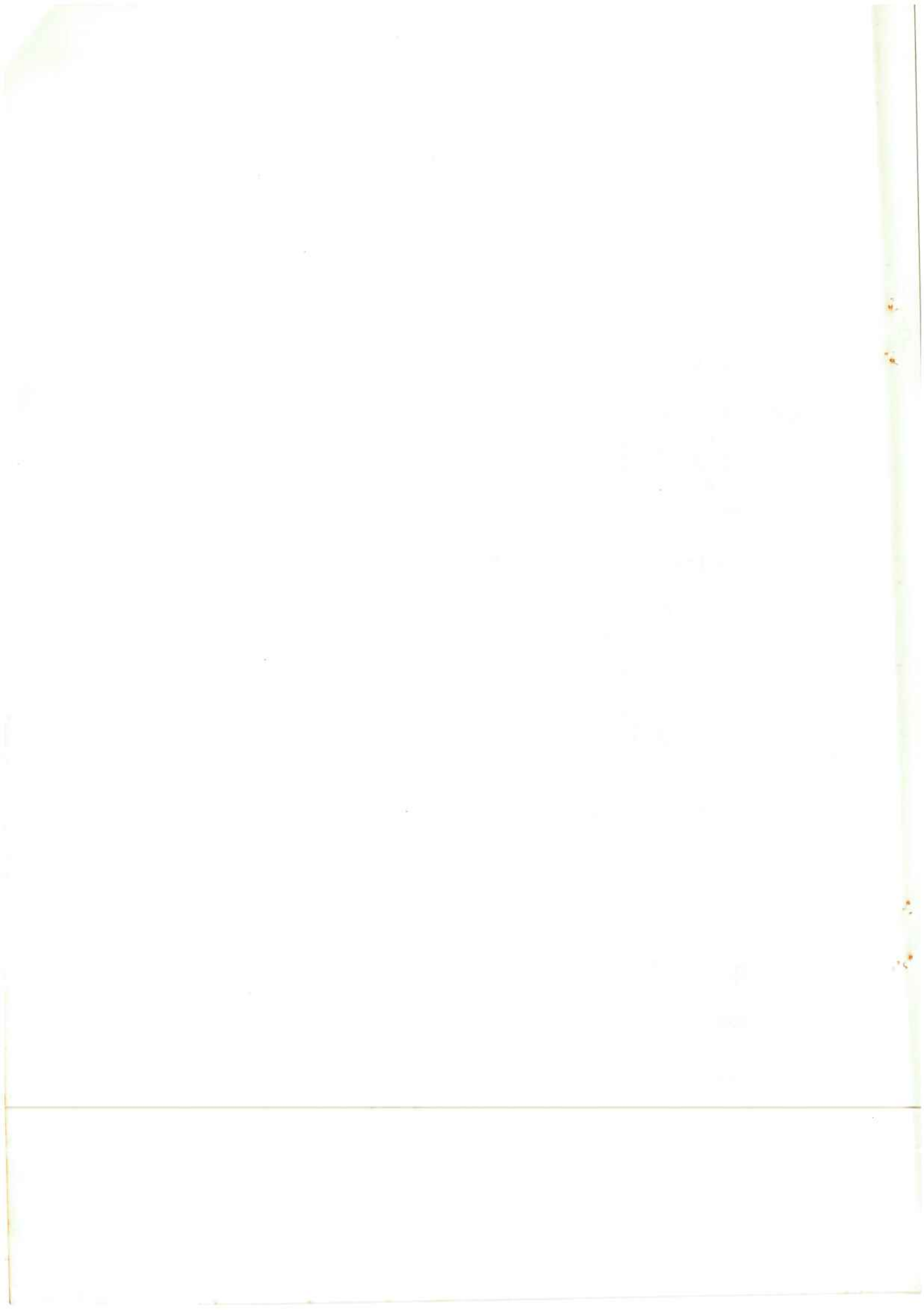
fig. (1.1)

Com notação matricial, tem-se

$$w_0(x,y) = \sum \underline{N}_i \underline{a}_i^e = \underline{N} \underline{a}^e \quad (1.4)$$

onde

$$\underline{N}_i = [\psi_i \quad \xi_i \quad \eta_i] \quad \text{e} \quad \underline{a}_i^e = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$



O campo de deformação $\underline{\varepsilon}$ é dado, considerando sucessivamente as equações (1.1) e

(1.4) por

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w_0 = \alpha \underline{L} \underline{N} \underline{a}^e = \underline{B} \underline{a}^e \quad (1.6)$$

onde

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad \text{e} \quad \underline{B}_i = \alpha \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

A uma variação δw_0 corresponde uma variação $\delta \underline{\varepsilon}$ de modo que o trabalho virtual dos esforços externos é dado por

$$\delta \mathcal{U}_e = \sum_{S_e} \int \delta \underline{u}^T \underline{f} \, h \, ds + \sum_{A_e} \int \delta \underline{u}_A^T \underline{A} \, h \, da \quad (1.8)$$

onde, de acordo com a fig. (1.1).

$$\underline{u} = \{w_0(x, y)\} = \underline{N} \underline{a}^e \quad \underline{u}_A = \begin{Bmatrix} \bar{w}_0(x, y) \\ \bar{\theta}_x(x, y) \\ \bar{\theta}_y(x, y) \end{Bmatrix} = \underline{N}_A \underline{a}^e$$

$$\underline{f} = \{q(x, y)\} \quad \underline{A} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}(x, y) \\ \bar{M}_x(x, y) \\ \bar{M}_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

enquanto que o trabalho virtual dos esforços internos é dado por

$$\delta \mathcal{U}_i = \sum_{V_e} \int \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, dV \quad (1.10)$$

onde



$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x,y,z) \\ \sigma_y(x,y,z) \\ \tau_{xy}(x,y,z) \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

As componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ correspondem os esforços solicitantes

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1.12)$$

Considerando, na situação de equilíbrio, a igualdade dos trabalhos virtuais internos e externos, pode-se escrever

$$\sum \int_{V_e} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV - \left[\sum \int_{S_e} \delta \underline{u}^T \underline{f} h ds + \sum \int_{A_e} \delta \underline{u}_A^T \underline{A} h dA \right] = 0 \quad (1.13)$$

Considerando, na expressão acima, as equações (1.6) e (1.9), obtém-se

$$\sum \int_{V_e} \delta \underline{a}^e T^T B^T \underline{\sigma} dV - \left[\sum \int_{S_e} \delta \underline{a}^e T^T N^T \underline{f} h ds + \sum \int_{A_e} \delta \underline{a}^e T^T N_s^T \underline{A} h dA \right] = 0 \quad (1.14)$$

Os deslocamentos modais $\underline{a}^e$ de um elemento relacionam-se ao conjunto dos deslocamentos modais $\underline{a}$ da placa da seguinte maneira

$$\underline{a}^e = \underline{T}^e \underline{a} \quad (1.15)$$

Quando os deslocamentos modais $\underline{a}^e$ e $\underline{a}$ se referem ao mesmo sistema de eixos, $\underline{T}^e$ representa a matriz que fornece a posição do elemento na estrutura.

Voltando à equação (1.14), pode-se escrever

$$\delta \underline{a}^T \left[\sum \underline{T}^e T^T \int_{V_e} B^T \underline{\sigma} dV - \left[\sum \underline{T}^e T^T \int_{S_e} N^T \underline{f} h ds + \sum \underline{T}^e T^T \int_{A_e} N_s^T \underline{A} h dA \right] \right] =$$

$$\delta \underline{a}^T \cdot \underline{\Psi}(\underline{a}) = 0 \quad (1.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(\underline{a}) &= \sum \underline{T}^e T^T \int_{V_e} B^T \underline{\sigma} dV - \left[\sum \underline{T}^e T^T \int_{S_e} N^T \underline{f} h ds + \sum \underline{T}^e T^T \int_{A_e} N_s^T \underline{A} h dA \right] \\ &= \sum \underline{T}^e T^T \int_{V_e} B^T \underline{\sigma} dV - \underline{P} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Tomando esforços externos concentrados nos nós, deve-se adicioná-los aos termos entre colchetes da expressão acima, que representa o sistema de equações de equilíbrio entre os esforços internos, representados pelo primeiro termo à direita, e os esforços externos, representados pelos termos entre colchetes.

Tomando variações de $\underline{\Psi}$, obtém-se

$$d\underline{\Psi} = \sum \underline{T}_e^T \int_{V_e} \underline{B}^T \delta \underline{\sigma} dV - \delta P \quad (1.18)$$

Nas regiões não plastificadas, ou quando há descarregamento nas regiões plastificadas

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{D} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.19)$$

onde $\underline{D}$ é a matriz de elasticidade, dada por

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Quando há carregamento nas regiões plastificadas

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{D}_{EP} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.21)$$

onde $\underline{D}_{EP}$ é a matriz de elasto-plasticidade

De um modo geral, portanto

$$\delta \underline{\Psi} = \left[\sum \underline{T}_e^T \left[\int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D}_{EP} \underline{B} dV \right] \underline{T}_e \right] \delta \underline{a} - \delta P = \underline{K}_T \delta \underline{a} - \delta P \quad (1.22)$$

onde $\underline{K}_T$ é a matriz de rigidez tangente com $\underline{D}_{EP} = \underline{D}$, quando não ocorrem deformações plásticas.

A matriz de elasto-plasticidade $\underline{D}_{EP}$ pode ser determinada considerando que nas regiões plastificadas, onde a função de plastificação $F(\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\tau}_{xy})$ se anula, a variação $\delta \underline{\epsilon}$ é dada, quando há carregamento, por

$$\delta \underline{\epsilon} = \delta \underline{\epsilon}_E + \delta \underline{\epsilon}_P \quad (1.23)$$

onde $\delta \underline{\epsilon}_E$, correspondente à parcela elástica, é dado por

$$\delta \underline{\epsilon}_E = \underline{D}^{-1} \delta \underline{\sigma} \quad (1.24)$$

e $\delta \underline{\epsilon}_P$, correspondente à parcela plástica, deve ser normal à superfície de plastificação, de modo que

$$\delta \underline{\epsilon}_P = \lambda \underline{\Phi} \quad (1.25)$$

onde

$$\underline{\Phi}^T = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (1.26)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} F(\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) &= F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \\ &= 0 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.27)$$

ou, em notação matricial

$$\underline{\Phi}^T \delta \underline{\sigma} = 0 \quad (1.28)$$

Substituindo sucessivamente as equações (1.24), (1.23) e (1.25), obtém-se

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{D} \delta \underline{\epsilon}_E = \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \delta \underline{\epsilon}_P) = \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \lambda \underline{\Phi}) \quad (1.29)$$

de modo que, pela equação (1.28)

$$\underline{\Phi}^T \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \lambda \underline{\Phi}) = 0 \quad (1.30)$$

ou seja

$$\lambda = \frac{\underline{\Phi}^T \underline{D}}{\underline{\Phi}^T \underline{D} \underline{\Phi}} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.31)$$

Substituindo o valor de λ na equação (1.29), obtém-se

$$\delta \underline{\sigma} = \left[\underline{D} - \frac{\underline{D} \underline{\Phi} \underline{\Phi}^T \underline{D}}{\underline{\Phi}^T \underline{D} \underline{\Phi}} \right] \delta \underline{\epsilon} = (\underline{D} - \underline{D}_P) \delta \underline{\epsilon} = \underline{D}_{EP} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.32)$$

2. O MÉTODO INCREMENTAL COM ITERAÇÕES EM CADA INCREMENTO

A análise da estrutura empregando o método incremental com iterações em cada incremento encontra-se descrito na referência R.2.

3 EXEMPLOS

Nos exemplos que seguim, a discretização das estruturas é feita com elementos retangulares, descritos na referência R1 nos quais, considerando, de acordo com a fig (3.1), as seguintes transformações

$$r = \frac{x - x_c}{a}$$

$$A = \frac{y - y_c}{b}$$

$$t = \frac{z}{h/2} \quad (3.1)$$

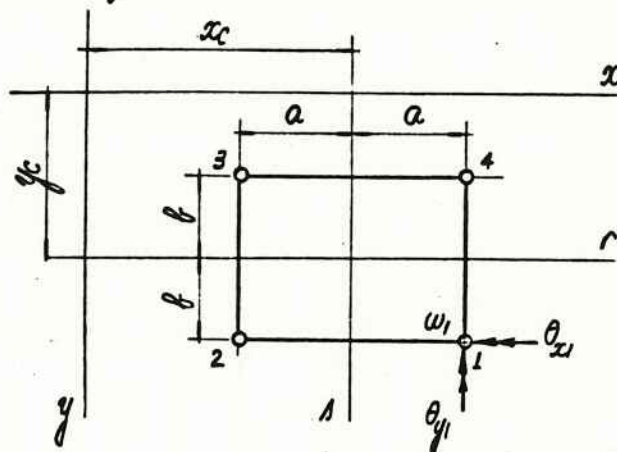


fig. (3.1)

as funções de interpolação, correspondentes ao nó i , são dadas por

$$\psi_i(r, A) = \frac{1}{8} (r_0 + 1)(A_0 + 1)(2 + r_0 + A_0 - r^2 - A^2)$$

$$\xi_i(r, A) = \frac{1}{8} b A_i (r_0 + 1)(A_0 + 1)^2 (A_0 + 1)$$

$$\eta_i(r, A) = \frac{1}{8} a r_i (r_0 + 1)^2 (r_0 - 1)(A_0 + 1) \quad (3.2)$$

onde

$$r_0 = r \cdot r_i \quad e \quad A_0 = A \cdot A_i \quad (3.3)$$

Considerando as transformações dadas pelas equações (3.1), pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial A^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial A} \end{Bmatrix} = \underline{R} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial A^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial A} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Da mesma forma, a matriz $\underline{B}$ é dada por

$$\underline{B} = \underline{R} \underline{C} = \underline{B}(r, A, t) \quad (3.5)$$

onde

$$\underline{C}_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r^2} & -\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial r^2} & -\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial r^2} \\ -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial A^2} & -\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial A^2} & -\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial A^2} \\ -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r \partial A} & -\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial r \partial A} & -\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial r \partial A} \end{bmatrix} \frac{h t}{2} \quad (3.6)$$

As integrais presentes nas equações (1.17) e (1.22) podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{\sigma} a b \frac{h}{2} dr d\lambda dt = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{Q}(r, \lambda, t) dr d\lambda dt \\ \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D}_{EP} \underline{B} dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D}_{EP} \underline{B} a b \frac{h}{2} dr d\lambda dt = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{Q}(r, \lambda, t) dr d\lambda dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

As integrais acima são calculadas pelo método de Gauss de integração numérica com 2 pontos de integração na direção r , 2 na direção λ e 4 na direção z . Nesses pontos de integração se calculam, também, as tensões.

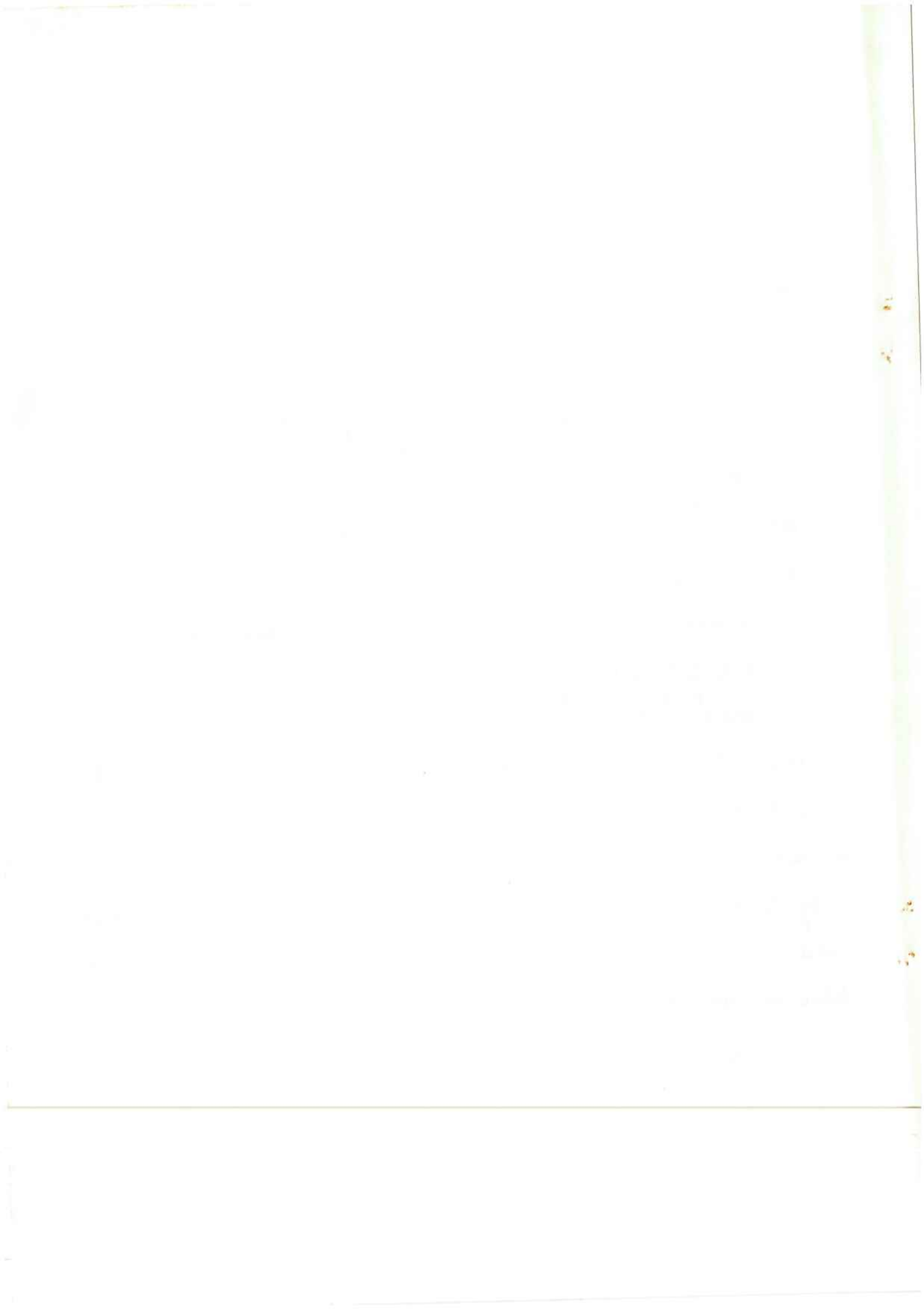
Adota-se o critério de Von Mises, em que a função de plastificação é dada por

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_e^2$$

onde σ_e é a tensão de escoamento do material.

EXEMPLO 1 Examina-se a estrutura da fig. (3.2), de material elasto-plástico de módulo de elasticidade $E = 2.100 \text{ t}^2/\text{cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, e tensão de escoamento $\sigma_e = 2.4 \text{ t}^2/\text{cm}^2$ submetida à carga $k q$, onde $q = 0.05 \text{ t}^2/\text{cm}$. Ao valor $k = 1$ corresponde o momento $M = 3,00 \text{ t}^2\text{-cm}$ no engastamento, numericamente igual ao momento de plastificação da região. Para que se possam comparar os resultados obtidos com os determinados segundo a formulação apresentada na referência R3, adota-se a função de plastificação

$$F(\sigma_x) = \sigma_x^2 - \sigma_e^2$$



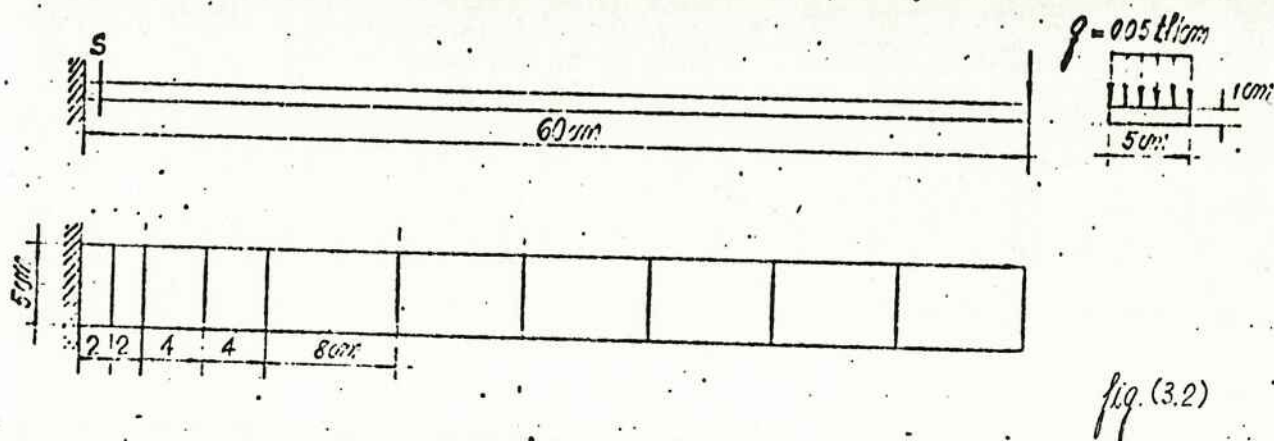
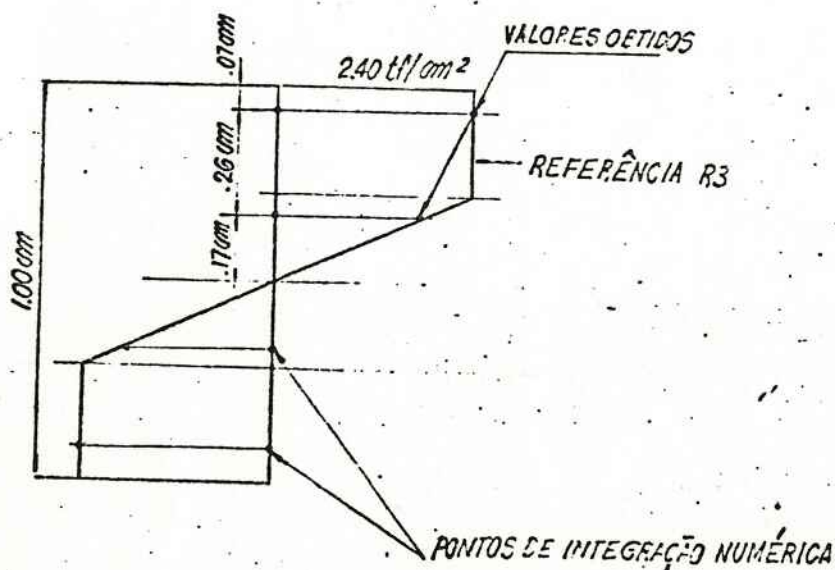


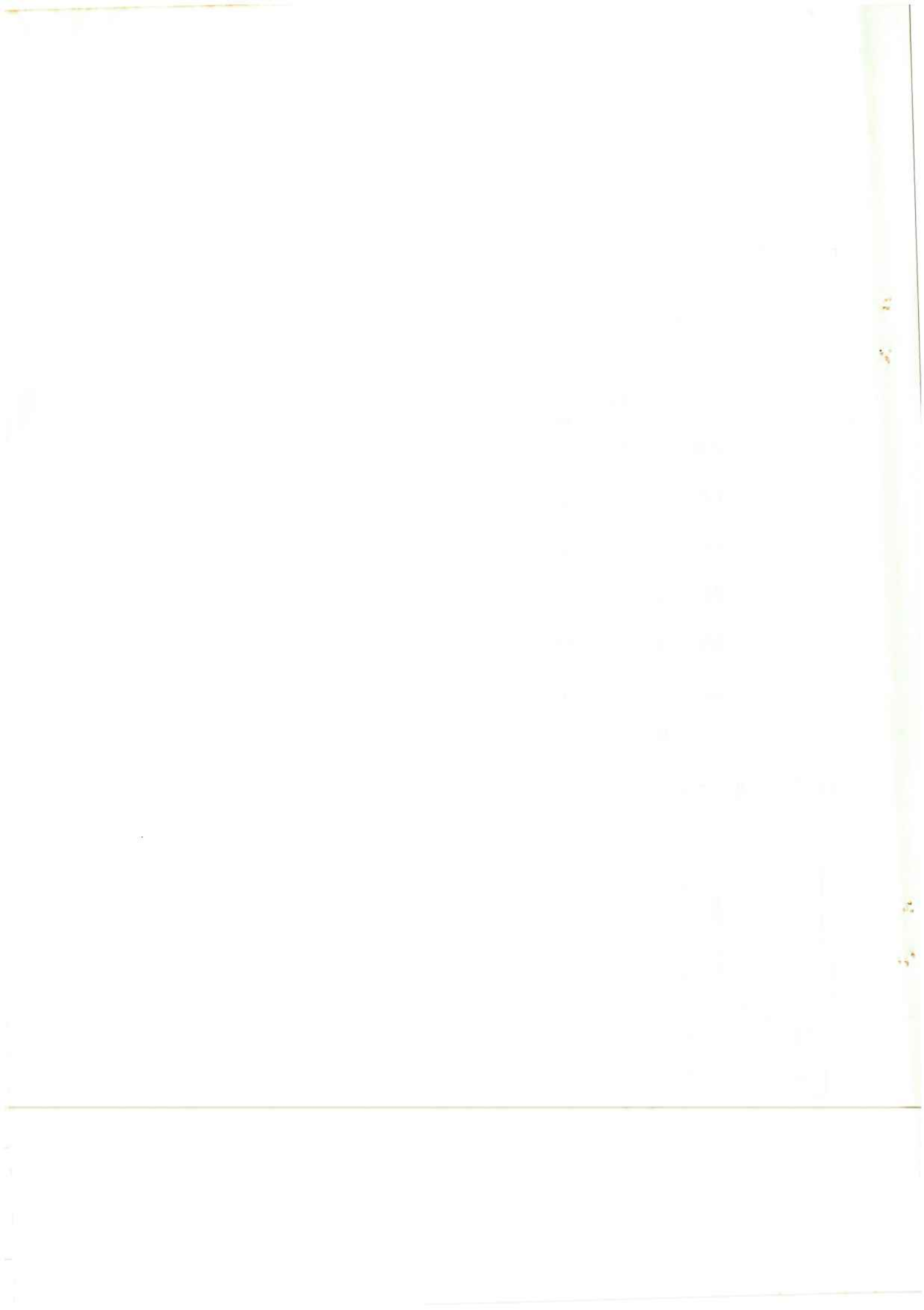
fig. (3.2)

DESLOCAMENTO VERTICAL DA EXTREMIDADE DIREITA

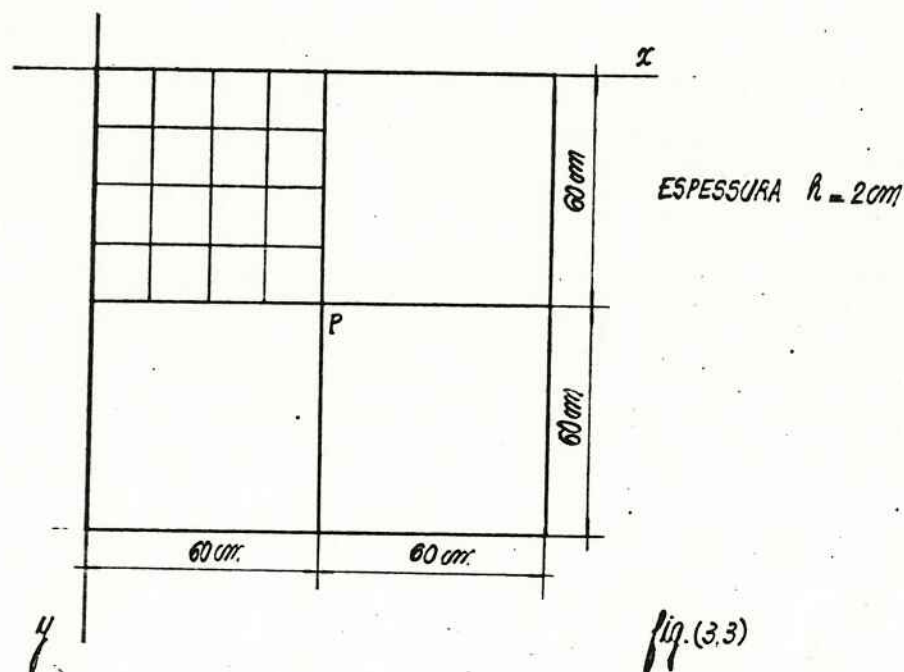
k	VAL. OBT. (cm)	VAL. R3 (cm)
0.70	2.878	2.881
0.80	3.309	3.327
0.90	4.056	3.939
0.95	4.551	4.439
1.00	5.099	6.095
1.05	5.793	8 ↓
	8 ↓	

TENSÕES NORMAIS NA SEÇÃO S PARA $k = 0.95$

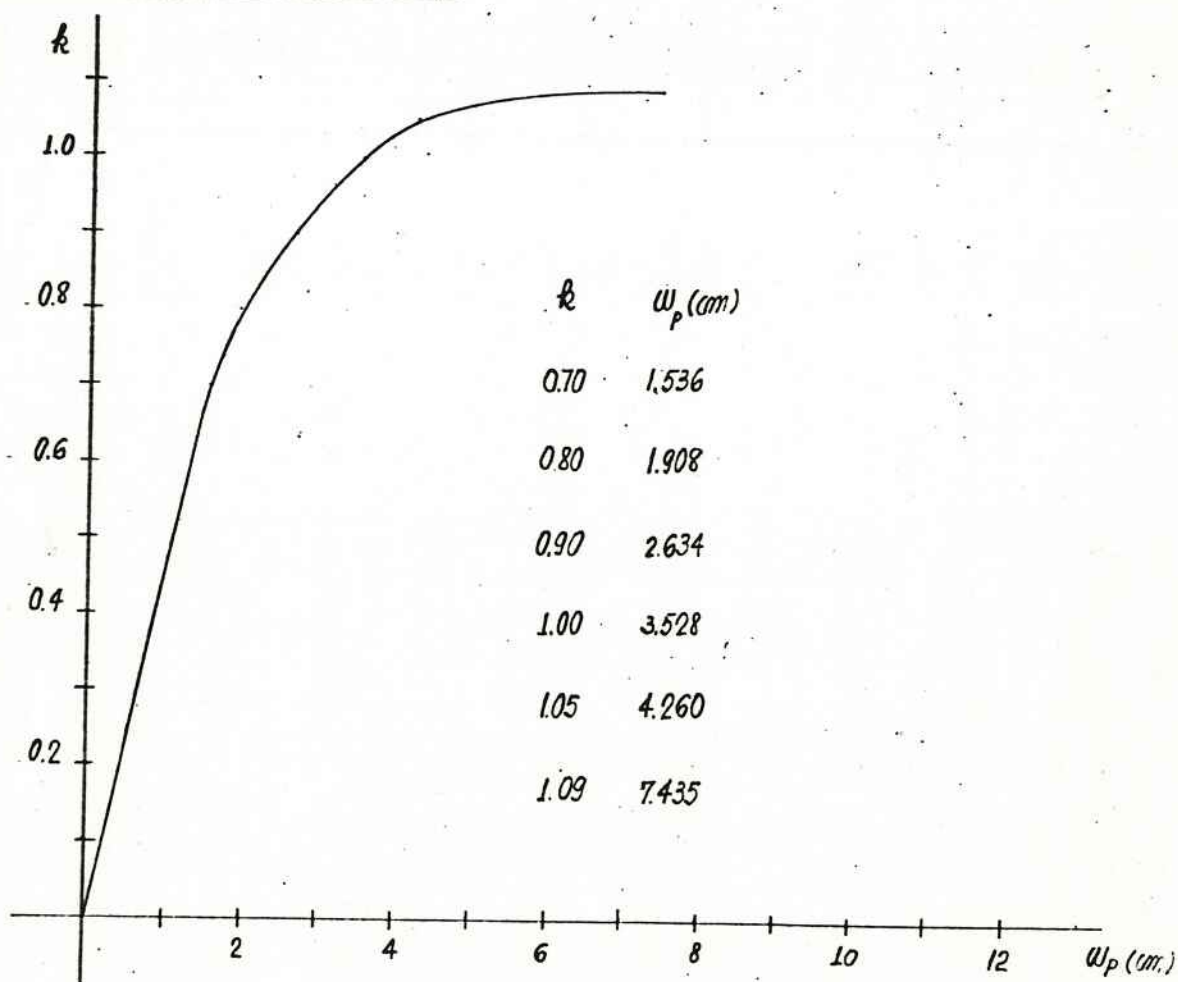


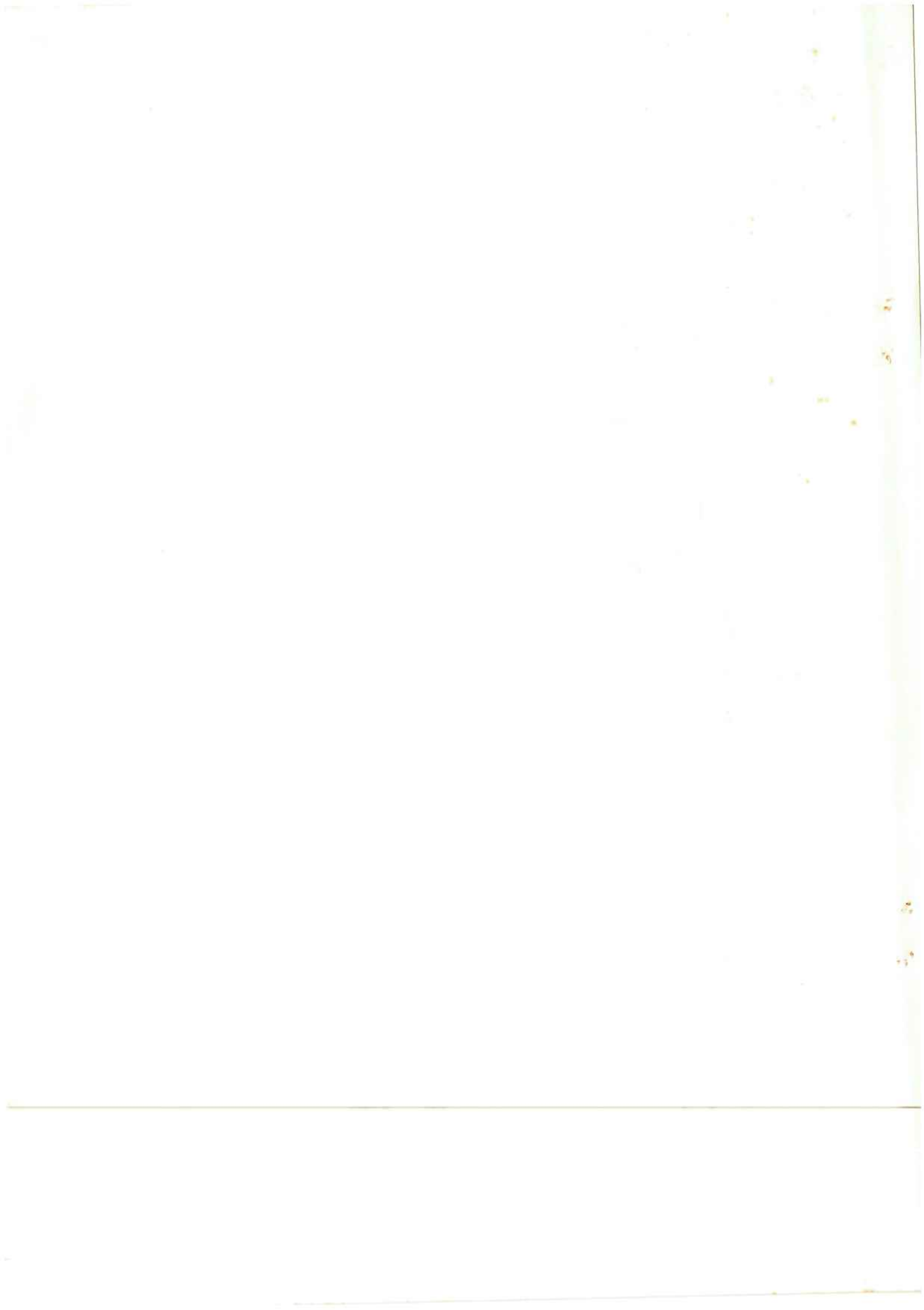


EXEMPLO 2 Examine-se, em seguida, a placa simplesmente apoiada da fig (3.3) de material elasto-linear, de módulo de elasticidade $E = 2100 \text{ tf/cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ e tensão de escoamento $\sigma_e = 2.4 \text{ tf/cm}^2$, submetida à carga uniformemente distribuída q , onde $q = 0.004 \text{ tf/cm}^2$.



DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO P (w_p)





REFERÊNCIAS

R.1. ZIENKIEWICZ, O.C.

"The finite element method in engineering science."

MCGRAW - HILL, 3rd ed., 1977.

R.2. DIOGO, L.A.C.

"Consideração da plastificação nas chapas."

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, BOLETIM TÉCNICO, 1987

R.3. BAKER, J. & HEYMAN, J.

"Plastic design of frames."

CAMBRIDGE, UNIVERSITY PRESS, 1969.

