



**XL CILAMCE**  
IBERO-LATIN AMERICAN  
CONGRESS ON  
COMPUTATIONAL  
METHODS IN  
ENGINEERING

NOVEMBER  
11-14, 2019  
Praiamar Natal Hotel & Convention  
Natal, RN-BRAZIL

## AN EXTENDED BOUNDARY ELEMENT FORMULATION FOR PUNCTUAL BOUNDARY CONDITIONS MODELLING

**Matheus Rocha**

*rocha.matheus@usp.br*

*M.Sc. Student*

*Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil*

**Edson D. Leonel**

*edleonel@sc.usp.br*

*Associate Professor*

*Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil*

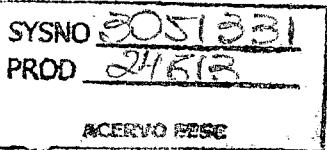
**Abstract.** The Boundary Element Method (BEM) is a numerical approach accurate in the solution of several elastostatic problems. Because the method formulation involves integrals written at the boundary, solely the bodies' boundaries are discretised. Then, in three-dimensional problems, the BEM mesh is composed of plane elements. However, the standard BEM formulation is limited in the solution of problems where punctual boundary conditions are present. Then, concentrated loads and punctual support conditions are not properly represented by the standard BEM. Such boundary conditions may be approximately represented through small BEM elements. However, this strategy may lead to the ill-positioned algebraic system of equations because of the small distance among the source points in such elements. In this regard, this study presents an enriched BEM formulation (XBEM) capable to represent properly punctual boundary conditions in three-dimensional problems. The Dirac's function is utilized in this enrichment process. Three numerical applications illustrate the accuracy of the proposed XBEM scheme. The results achieved by the proposed XBEM formulation are compared with responses provided by equivalent models constructed on Finite Element Method.

**Keywords:** Boundary Element Method, Enriched formulations, Three-dimensional modelling.

---

CILAMCE 2019

*Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019.*



## 1 Introdução

A mecânica dos materiais e das estruturas contempla um conjunto de teorias que permite o estudo e a compreensão do comportamento mecânico de sólidos e sistemas estruturais submetidos a ações externas, tais como peso próprio, vento, sobrecargas, dentre outras. De modo a determinar os efeitos dos esforços nas estruturas, abordagens analíticas podem ser utilizadas. No entanto, deve-se destacar que tais abordagens são limitadas na análise de estruturas que possuem geometria e condições de contorno complexas. Nesse contexto, a solução de problemas reais de engenharia requer a utilização de métodos numéricos. Neles, diversas ações podem ser simplificadamente idealizadas como pontuais, a depender das características das solicitações.

Nesse sentido, os métodos numéricos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), possibilitam, em sua formulação, a aplicação das condições de contorno concentradas diretamente no problema, ao aplicar o carregamento ou apoio pontual sobre o nó. Contudo, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é formulado a partir da imposição de deslocamentos e forças de superfícies prescritas de forma distribuída no contorno. Desse modo, se há o interesse em aplicar uma carga ou apoio pontual, é necessário o uso de um elemento de contorno de pequenas dimensões, e aplicar sobre ele a condição de contorno. Com isso, surgem pontos de colocação proximamente posicionados. Devido à natureza singular das soluções fundamentais, tal proximidade pode levar ao mal-condicionamento do sistema. Como alternativa a esse problema, este artigo apresenta uma formulação enriquecida para o MEC de modo a permitir o uso das vinculações e cargas concentradas sem prejudicar o condicionamento do sistema.

As formulações enriquecidas são definidas como alterações promovidas ao polinômio de aproximação dos campos mecânicos com base no conhecimento *a priori* do espaço de solução. Assim, o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos (MEFG/MEFX) é uma das abordagens que faz uso do conceito de enriquecimento das funções de aproximação, aplicado ao MEF. Uma aplicação comum do MEFG/MEFX é na representação de problemas da Mecânica da Fratura. Assim, as soluções conhecidas dos campos mecânicos próximos à ponta da fissura são adicionadas à aproximação de deslocamentos. Com isso, a influência das fissuras é melhor considerada na resposta do problema.

No que concerne ao MEC, a abordagem enriquecida se inicia com Simpson e Trevelyan [1]. Tais autores fizeram uso do Princípio da Partição da Unidade para acrescentar termos na aproximação do campo de deslocamentos. Assim, foram obtidas respostas mais precisas em problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura. Dessa forma, inicia-se o estudo do Método dos Elementos de Contorno Enriquecido (*eXtended Boundary Element Method*, XBEM). Alatawi e Trevelyan [2] e Hattori, Alatawi e Trevelyan [3] também fizeram uso do XBEM com objetivo de obter o cálculo direto dos Fatores de Intensidade de Tensão em problemas fissurados. Observa-se particularmente para o MEC que formulações enriquecidas são mais precisas em relação às tradicionais.

Contudo, nenhum dos trabalhos acima mencionados aborda problemas tridimensionais. Além disso, ações pontuais também não são tratadas. Desse modo, o presente estudo apresenta uma formulação enriquecida no MEC que permite a abordagem direta das condições de contorno pontuais em problemas tridimensionais. Dessa forma, o presente estudo contribui com a ampliação do campo de aplicação do MEC. Assim, é evidente o caráter inovador dessa abordagem, uma vez que não há nenhum trabalho na literatura que aborde tais tópicos. Serão apresentadas três aplicações, em que os resultados da formulação desenvolvida serão comparados a modelos equivalentes desenvolvidos no software ANSYS®.

## 2 Método dos Elementos de Contorno

### 2.1 Solução Fundamental e Equação Integral

O MEC, de acordo com Brebbia [4], pode ser deduzido a partir da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados no problema de valor de contorno da elasticidade linear, conforme Eq. (1).

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) w d\Omega = 0. \quad (1)$$

Em que  $\sigma_{ji,j}$  é o gradiente do tensor de tensões,  $b_i$  é o vetor de forças de volume aplicadas e  $\Omega$  é o domínio do corpo analisado. A função ponderadora  $w$  escolhida para a minimização do resíduo é a Solução Fundamental de Kelvin [5], em que um meio infinito, tridimensional e isotrópico é sujeito à ação de um carregamento pontual representado pela função Delta de Dirac. Para esta solução, o campo de deslocamentos é descrito pela Eq. (2), enquanto as forças de superfície são calculadas pela Eq. (3).

$$U_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i}]. \quad (2)$$

$$P_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{r_{,j}\eta_j [(1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,k}r_{,i}] - (1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i})\}. \quad (3)$$

Nas soluções fundamentais,  $\mathbf{x}^f$  é o ponto em que se deseja conhecer os campos mecânicos, também denominado ponto campo. Já a grandeza  $\mathbf{x}^s$  é denominada ponto fonte, em que a carga pontual é aplicada. A distância entre o ponto fonte e ponto campo é medida pela grandeza  $r$ , enquanto que  $\eta = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\}^T$  é o versor normal ao plano do ponto campo. O tensor Delta de Kronecker é definido como  $\delta$  e as constantes elásticas Módulo de Elasticidade Transversal e Coeficiente de Poisson são dados, respectivamente, por  $G$  e  $\nu$ .

A partir de desenvolvimentos matemáticos sobre as Eqs. (1) e (2), e aplicando a lei constitutiva linear isotrópica de Hooke, obtém-se a Equação Integral em Deslocamentos (EID), representada na Eq. (4).

$$u_k(\mathbf{x}^s) = \int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i(\mathbf{x}^f) d\Omega. \quad (4)$$

Na Eq. (4),  $u_k$  representa o deslocamento e  $p_i$  é a força de superfície do ponto campo ou fonte, dependendo do caso. Para os problemas em que as forças de volume são nulas, é possível desprezar a última parcela da Eq. (4). Além disso, a partir de um processo limite em que se considera o contorno tendendo ao ponto fonte, é possível obter a Eq. (5).

$$c_{ij}(\mathbf{x}^s) u_j(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma. \quad (5)$$

O termo livre  $c_{ij}$  vale  $1/2$  para contornos suaves, o que é garantido com o uso de pontos fontes afastados de arestas, denominada condição de contínuidade de Holder.

As integrais da Eq. (5) possuem singularidade, da ordem de  $1/r^2$  para a primeira e  $1/r$  para a segunda. A singularidade de ordem  $1/r$  é removida com o uso de coordenadas polares para a integração. Já a singularidade de ordem  $1/r^2$  requer o uso da integração no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC), além do uso da parametrização em coordenadas polares. A integração numérica de Gauss é utilizada para o cálculo das integrais no contorno do sólido. A remoção da singularidade de tais núcleos é efetuada a partir do Método da Subtração de Singularidade proposto por Guiggiani et. al.[6].

## 2.2 Discretização em elementos de contorno

A EID, Eq. (5), requer a discretização do corpo em elementos, denominados elementos de contorno. Para tanto, a superfície externa é mapeada e dividida em nós e elementos. A geometria do contorno é aproximada a partir dos polinômios completos de Lagrange. Assim, a função de forma que representa a aproximação da geometria é dada pela Eq. (6). O elemento utilizado é o quadrilateral linear, apresentado na Fig. 1.

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2. \quad (6)$$

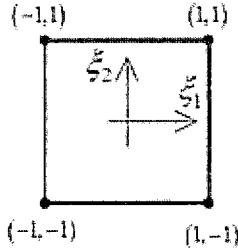


Figura 1. Elemento de contorno quadrilateral linear

Na Eq. (6),  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são as coordenadas adimensionais do elemento de contorno. Já a determinação dos coeficientes  $c_k^i$  é efetuada a partir da propriedade de Delta de Kronecker, conforme a Eq. (7).

$$M_i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4. \quad (7)$$

Uma vez definidas as funções de forma, as coordenadas do interior do elemento podem ser aproximadas com uso da Eq. (8).

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = M_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_i. \quad (8)$$

Em que  $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$  é o vetor de coordenadas de um ponto com coordenada adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , e  $\mathbf{x}_i$  é o vetor com as coordenadas dos nós que definem o elemento.

Com o uso dos elementos isoparamétricos, a integração numérica é efetuada neste espaço. Assim, a relação entre o diferencial de área do espaço físico e do espaço paramétrico deve ser calculada. Essa relação é expressa a partir do vetor jacobiano, de acordo com a Eq. (9).

$$d\Gamma_e = |\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (9)$$

Em que  $|\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)|$  representa a norma do vetor jacobiano, denotado simplesmente por  $J(\xi_1, \xi_2)$ . As componentes deste vetor são calculadas pela Eq. (10).

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi_2} \\ J_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial \xi_2} \\ J_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi_2} \end{aligned} \quad (10)$$

A aproximação dos campos mecânicos no interior do elemento de contorno é efetuada a partir de funções de forma  $N_\alpha(\xi_1^j, \xi_2^j)$ , cujas constantes são determinadas de forma análoga à  $M_i$ . A diferença fundamental entre as duas aproximações apresentadas decorre do uso de nós descontínuos quando o nó fizer parte de arestas, de acordo com a Fig. 2. Dessa forma, a condição de continuidade de Holder é garantida. Destaca-se que os campos mecânicos calculados com o MEC são associados aos pontos de colocação, isto é, os pontos deslocados das arestas.

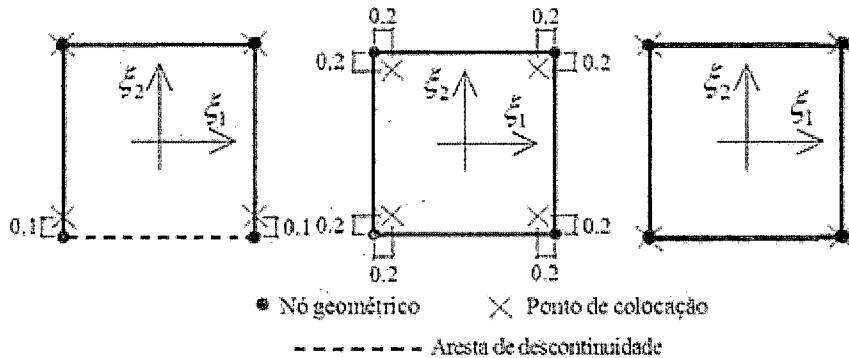


Figura 2. Elementos descontínuos de aresta, descontínuos e contínuos

Uma vez definida a função de forma para o elemento de contorno considerado, os campos mecânicos de deslocamentos e forças de superfície podem ser aproximados pela Eq. (11).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{p}_\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Com  $\mathbf{u}_\alpha = \{u_1^\alpha \ u_2^\alpha \ u_3^\alpha\}^T$  e  $\mathbf{p}_\alpha = \{p_1^\alpha \ p_2^\alpha \ p_3^\alpha\}^T$  sendo os campos mecânicos dos pontos de colocação.

### 2.3 Equações algébricas

A partir da discretização do contorno do sólido, a aplicação da EID, Eq. (5), é possível. Assim, são considerados como pontos fontes os pontos de colocação. Com isso, são incógnitas e condições de contorno do problema os deslocamentos e forças de superfície destes pontos. De maneira complementar, no ponto em que  $\mathbf{u}$  é conhecido,  $\mathbf{p}$  é incógnito, e vice-versa. Dessa forma, são substituídas as Eqs. (9) e (11) na Eq. (5), resultando na Eq. (12).

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{ij}}{2} u_j(x^s) + \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(x^s, x^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j \\ = \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x^s, x^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j \end{aligned} \quad (12)$$

Em que  $NE$  representa o número de elementos de contorno utilizado na discretização do sólido. As integrais são avaliadas no espaço paramétrico, por meio da integração numérica, em que quadraturas conhecidas são aplicadas. Quando o ponto de integração e o ponto de colocação pertencem ao mesmo elemento, as técnicas de subtração de singularidade são necessárias. Aplicando a Eq. (12) para todos os pontos de colocação existentes, o sistema algébrico do MEC é obtido, conforme a Eq. (13).

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (13)$$

Na Eq. (13), os vetores  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{p}_j$  representam os campos mecânicos do ponto de colocação  $j$ , de modo que  $\mathbf{u}^j = \{u_1^j \ u_2^j \ u_3^j\}^T$  e  $\mathbf{p}^j = \{p_1^j \ p_2^j \ p_3^j\}^T$  representam deslocamentos e forças de superfície em cada direção (1, 2 e 3). O somatório é definido para todos os  $N$  pontos de colocação do problema. Além disso, as matrizes de influência  $\mathbf{H}_{ij}$  e  $\mathbf{G}_{ij}$  são construídas a partir da integração das soluções fundamentais, conforme as Eqs. (14) e (15), respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\mathbf{I}}{2}, \text{ se } i = j \\ \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \text{ se } i \neq j \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (15)$$

As matrizes de influência apresentadas nas Eq. (14) e (15) são calculadas a partir da matriz de função de forma, obtida pelo produto entre a correspondente função de forma e a matriz identidade. Também são necessárias as matrizes  $\mathbf{U}_i^*$  e  $\mathbf{P}_i^*$ , definidas a partir da solução fundamental apresentada nas Eqs. (2) e (3), e calculadas conforme as Eqs. (16) e (17).

$$\mathbf{U}_i^* = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_i^* = \begin{bmatrix} P_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Destaca-se que o ponto campo utilizado é o ponto de integração, obtido a partir das quadraturas adotadas, que podem ser cartesianas ou polares, de acordo com a necessidade.

Assim, o sistema obtido na Eq. (13) deve ser rearranjado para o formato de sistema linear, por meio de uma operação de troca de colunas. Com isso, é obtida a Eq. (18).

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (18)$$

Na Eq. (18), a matriz  $\mathbf{A}$  possui as colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  que multiplicam as grandezas incógnitas. Já o vetor do lado direito  $\mathbf{b}$  é calculado pelo produto das colunas de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  com as condições de contorno associadas.

## 2.4 Técnica de Sub-Regiões

O MEC permite a análise de domínios não-homogêneos acoplados por interfaces. Para tanto, é utilizada a Técnica de Sub-Regiões, em que são calculadas as matrizes de influência de cada domínio, de maneira independente, e o sistema algébrico resultante é obtido a partir da imposição da condição de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças.

Nesse contexto, considera-se um sólido com  $N_{SR}$  sub-regiões. Para cada sub-região, é obtido o sistema apresentado na Eq. (13). Como as sub-regiões ainda não estão acopladas, a influência entre cada uma delas inexiste. Dessa forma, o sistema resultante é apresentado na Eq. (19).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N_{SR}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{N_{SR}} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Para a aplicação das condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de forças de superfície, o sistema é organizado em termos das grandezas do contorno externo e das grandezas pertencentes à interface  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ , de acordo com a Eq. (20).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}^+ & \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}^+ & \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Na Eq. (20),  $\mathbf{u}^c$  e  $\mathbf{p}^c$  são os deslocamentos e forças de superfície do contorno não pertencente à interface, enquanto que  $\mathbf{u}^+$ ,  $\mathbf{u}^-$ ,  $\mathbf{p}^+$  e  $\mathbf{p}^-$  pertencem ao contorno de interface. Assim, é possível impor as condições que correlacionam os subdomínios, de acordo com a Eq. (21).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}^- \\ \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (21)$$

Desse modo, impondo a Eq. (21) sobre a Eq. (20), tem-se a Eq. (22).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & (\mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

A partir do sistema obtido na Eq. (22), as condições de contorno podem ser impostas analogamente ao exposto para obtenção da Eq. (18).

### 3 Enriquecimentos Concentrados

#### 3.1 Forças concentradas

A proposta de enriquecimento para a representação de forças concentradas no MEC consiste no uso da função Delta de Dirac. A esta função é multiplicada a força concentrada  $F_j^l$  aplicada no ponto  $\mathbf{x}^l$  pertencente ao contorno do elemento. Assim, o campo mecânico de forças de superfície para o elemento sobre o qual a força é aplicada, anteriormente aproximado pela Eq. (11), se torna a Eq. (23).

$$p_j(\xi_1, \xi_2) = N^\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l. \quad (23)$$

Com isso, substitui-se a Eq. (23) na parcela correspondente a  $p_j$  da Eq. (5), obtendo a Eq. (24).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^l) d\Gamma &= \int_{\Gamma} U_{ij}^* \left[ N_\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l \right] d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} U_{ij}^* N_\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

A última integral da Eq. (24) é relacionada às forças concentradas. Nesta integral, o termo  $F_j^l$  é constante. Além disso, é aplicada a propriedade da filtragem da função Delta de Dirac. Assim, a integral se torna a avaliação do núcleo fundamental em relação ao ponto fonte e ao ponto de aplicação da carga. Tais procedimentos algébricos são representados na Eq. (25).

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l d\Gamma = F_j^l \int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) d\Gamma = U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^l) F_j^l. \quad (25)$$

O termo obtido na Eq. (25) é acrescido ao sistema final apresentado na Eq. (13), conforme a Eq. (26).

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{l=1}^{NC} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \mathbf{F}^l. \quad (26)$$

Em que  $NC$  é o número de cargas concentradas existentes no problema analisado. O vetor  $\mathbf{F}^l$  contém as forças concentradas aplicadas nos respectivos pontos  $\mathbf{x}^l$ . A matriz  $\mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l)$  é a matriz de influência associada à solução fundamental em deslocamentos, calculada de acordo com a Eq. (27).

$$\mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Assim, a parcela adicional referente às forças concentradas surge no problema final como um vetor, denominado  $\mathbf{b}^X$ , associado ao último termo da Eq. (26). Desse modo, sua adição ao sistema algébrico da Eq. (18) é apresentada na Eq. (28).

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{b}^X. \quad (28)$$

### 3.2 Apoios concentrados

Os apoios concentrados são considerados como forças pontuais, que representam as reações de apoio. Com isso, o enriquecimento apresentado na Eq. (23) é utilizado, substituindo a força concentrada conhecida pela incógnita  $R_j^l$ . Dessa forma, as reações são adicionadas como incógnitas aplicados do problema mecânico. Assim, para que o sistema admita solução, são utilizadas equações de compatibilidade associadas ao deslocamento prescrito do ponto, de acordo com a Eq. (29).

$$\bar{u}_j^l = N^\alpha(\xi_1^l, \xi_2^l) u_j^\alpha. \quad (29)$$

Em que as coordenadas adimensionais  $\xi_1^l$  e  $\xi_2^l$  são referentes ao apoio concentrado analisado e  $\bar{u}_j^l$  é o deslocamento prescrito na vinculação. Assim, a Eq. (29) acrescenta linhas ao sistema da Eq. (18). Tal sistema expandido é apresentado na Eq. (30).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\bar{\mathbf{G}}^X \\ \mathbf{A}^X & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{b}}^X \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{G}}^X$  multiplica as reações de apoio incógnitas, sendo obtida a partir de cada ponto fonte, preenchendo 3 linhas da matriz por vez. Sua montagem é efetuada com a Eq. (31), com uso da Eq. (2) aplicada ao ponto de colocação e ao ponto com apoio concentrado.

$$\bar{\mathbf{G}}_i^X = \begin{bmatrix} \bar{G}_{1l}^X \\ \bar{G}_{2l}^X \\ \bar{G}_{3l}^X \end{bmatrix}^i = \bar{\mathbf{U}}_k^* = \begin{bmatrix} U_{1k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{2k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{3k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Na Eq. (31), o índice  $k$  representa a direção associada ao deslocamento prescrito. Isso é interessante pois permite que seja aplicado o deslocamento prescrito apenas na direção que ele atua.

O vetor  $\bar{\mathbf{u}}$  da Eq. (30) contempla todos os deslocamentos prescritos. A matriz  $\mathbf{A}^X$  e o termo  $\bar{\mathbf{b}}^X$  contemplam a disposição da Eq. (29) em relação aos  $u_j$ , que podem ser incógnitos ou conhecidos. Quando os deslocamentos são incógnitos, a função de forma é introduzida na matriz que multiplica as incógnitas do problema. Caso sejam conhecidos, o produto da função de forma pelo respectivo valor é acrescentado ao lado direito. Esses procedimentos são apresentados na Eq. (32).

$$A_{ij}^X = \begin{cases} N_{\alpha(j,e)}(\xi_1^l, \xi_2^l) & \forall u_j \text{ incógnito} \\ 0 & \forall u_j \text{ conhecido} \end{cases} \quad (32)$$

$$\bar{b}_{ij}^X = \begin{cases} N_{\alpha(j,e)}(\xi_1^l, \xi_2^l)u_j & \forall u_j \text{ conhecido} \\ 0 & \forall u_j \text{ incógnito} \end{cases}$$

Embora a aplicação de apoios concentrados em elementos nos quais os deslocamentos são prescritos seja redundante, a formulação apresenta tal possibilidade para garantir sua generalidade.

### 3.3 Enriquecimentos concentrados e Técnica de Sub-Regiões

Os enriquecimentos concentrados em meios não-homogêneos são efetuados com o uso da Técnica de Sub-Regiões. Para tanto, o termo  $b^X$  da Eq. (28) deve ser calculado apenas se a carga concentrada pertencer ao subdomínio analisado. Essa relação é expressa pela Eq. (33).

$$(b^{iX})^j = \begin{cases} b^{iX}, \text{ se } j = (N_{SR})^e \\ 0, \text{ se } j \neq (N_{SR})^e \end{cases} \quad (33)$$

Em que  $(N_{SR})^e$  é o número da sub-região do elemento  $e$  em que a força é aplicada. Para o caso de apoios concentrados, apenas a montagem de  $(\bar{G}_{il}^X)^j$  é alterada, conforme a Eq. (34).

$$(\bar{G}_{il}^X)^j = \begin{cases} \bar{G}_{il}^X, \text{ se } j = (N_{SR})^e \\ 0, \text{ se } j \neq (N_{SR})^e \end{cases} \quad (34)$$

## 4 Exemplos Numéricos

São propostos três exemplos numéricos para verificar a precisão da formulação proposta. O primeiro exemplo possui um único carregamento pontual e condições de contorno em deslocamentos prescritas de maneira tradicional. No segundo exemplo, a força aplicada é distribuída ao longo da face, enquanto que os apoios são considerados como pontuais. Por fim, o terceiro modelo aborda a proposição dos enriquecimentos em um sólido não-homogêneo. Os resultados dos exemplos apresentados são confrontados com modelos equivalentes calculados pelo MEF com uso do software ANSYS®.

### 4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo trata da análise mecânica de um cubo de lado 5,0 (unidades de comprimento). A face superior está submetida a um carregamento concentrado em seu centro, de valor 100 (unidades de força). O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson são, respectivamente, 1.000 (unidades de tensão) e 0,30. A geometria deste exemplo é apresentada na Fig. 3.

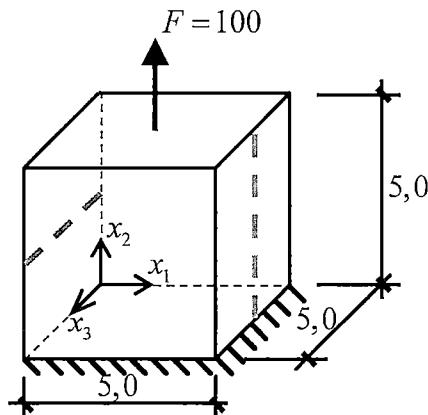


Figura 3. Geometria do primeiro exemplo

Na análise numérica, são utilizadas três malhas, as quais objetivam a realização de uma análise de convergência. A mais grosseira possui 194 elementos e 268 pontos de colocação, enquanto que a intermediária possui 621 elementos e 749 pontos de colocação, e a mais refinada, 2.441 elementos e 2689 pontos de colocação. Tais malhas são denominadas como A, B e C, e são ilustradas conforme Fig. 4.

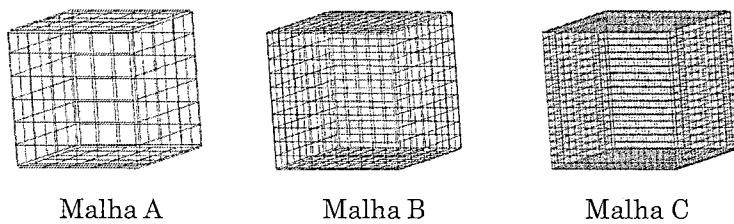


Figura 4. Malhas adotadas para o Exemplo 1

O campo de deslocamentos calculados na direção  $x_2$  para a malha C é ilustrado na Fig.5, para a malha C em sua configuração deformada.

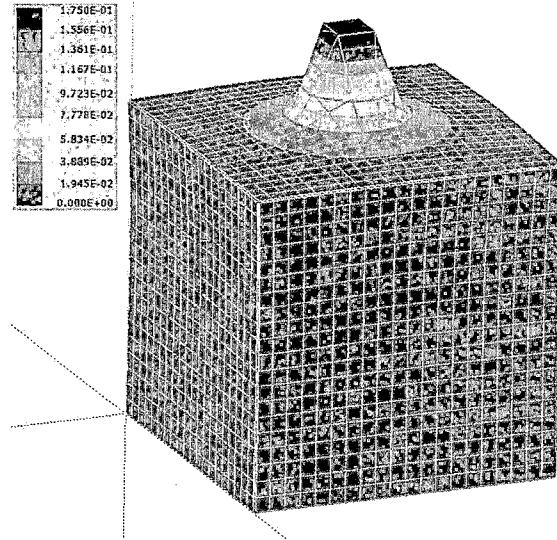


Figura 5. Deslocamentos na direção  $x_2$  para malha C.

Nota-se que o elemento em que a carga é aplicada se desloca de maneira uniforme. Isso deriva do grau de aproximação utilizado para a interpolação desse campo mecânico.

O modelo de elementos finitos faz uso de uma malha de 35.721 nós e 8.000 elementos hexaédricos de aproximação quadrática (SOLID 186). O modelo em MEF é apresentado na Fig. 6.

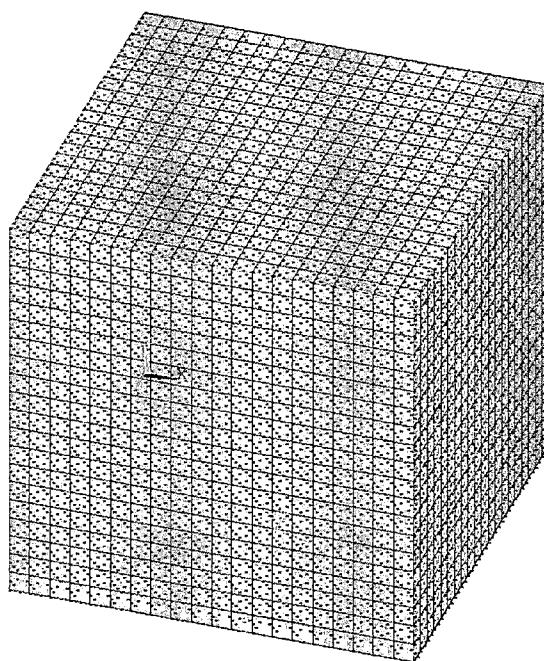
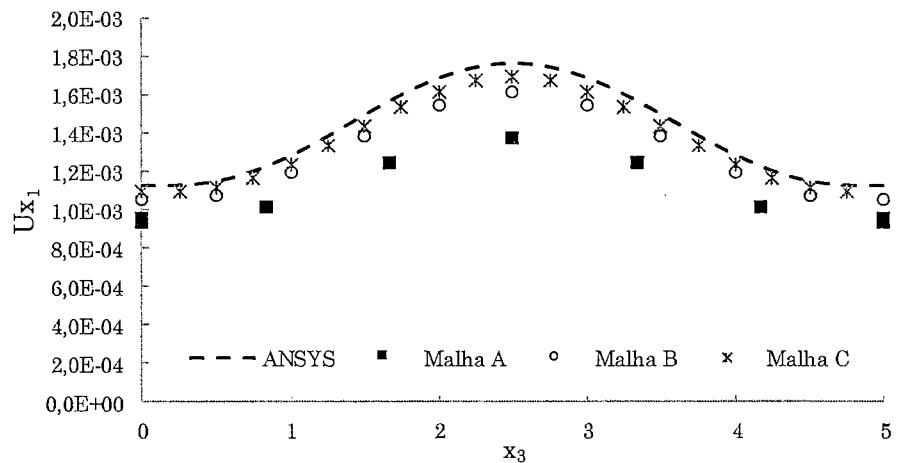


Figura 6. Discretização adotada no MEF para o exemplo 1

A comparação entre o resultado obtido no ANSYS® e as malhas adotadas é efetuada para os deslocamentos orientados na três direções ao longo da linha tracejada em vermelho da Fig. 3, em que  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2,5$  e  $0 \leq x_3 \leq 5$ . Tais comparações são apresentadas na Fig. 7, para deslocamento na direção  $x_1$  ( $U_{x_1}$ ), na Fig. 8, para os resultados da direção  $x_2$  ( $U_{x_2}$ ) e na Fig. 9, para deslocamento na direção  $x_3$  ( $U_{x_3}$ ), em unidades de comprimento compatíveis.

Figura 7. Deslocamentos orientados na direção  $x_1$  ao longo da linha vermelha tracejada

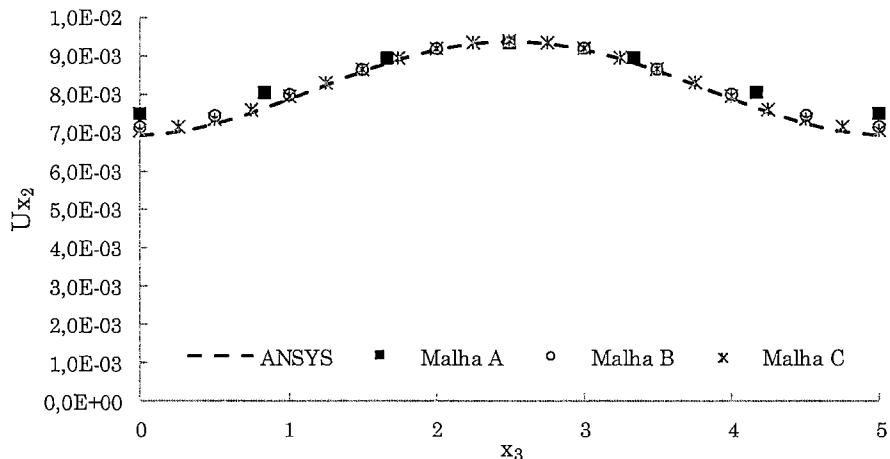


Figura 8. Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha vermelha tracejada

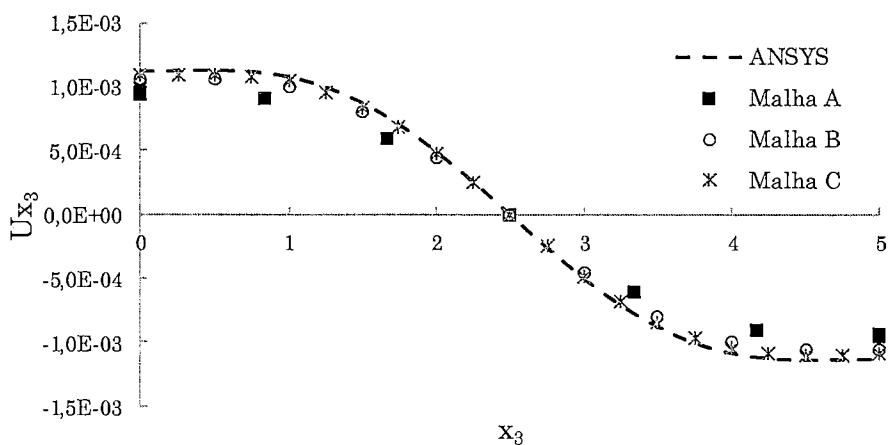


Figura 9. Deslocamentos orientados na direção  $x_3$  ao longo da linha vermelha tracejada

É efetuada também a análise dos deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ( $Ux_2$ ) ao longo da linha tracejada vermelha da Fig. 3. Nesta linha,  $x_1 = 5$ ,  $0 \leq x_2 \leq 5$  e  $x_3 = 2,5$ . Tais resultados são apresentados na Fig. 10.

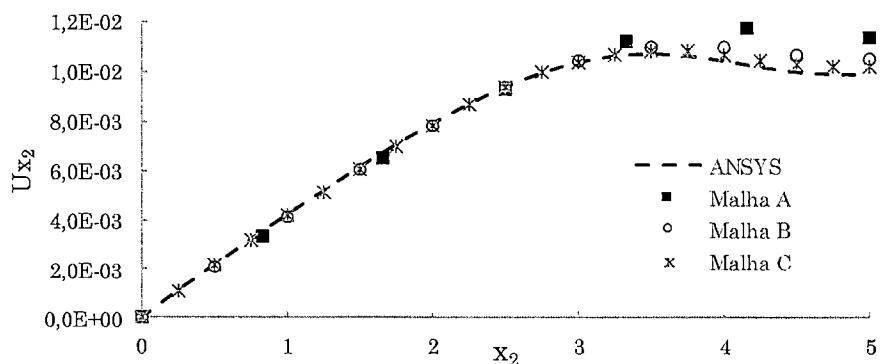


Figura 10. Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha vermelha tracejada

Com base nos resultados observados, calcula-se a diferença percentual entre a Malha C e o modelo do ANSYS®. Para a linha tracejada vermelha, na posição  $x_3 = 2,5$  tal diferença é de -4,42% para o deslocamento orientado na direção  $x_1$  e de -0,029% para o deslocamento na direção  $x_2$ . Já para a linha verde, esse desvio corresponde a 3,695% para  $Ux_2$  em  $x_2 = 5$ . Desse modo, nota-se que os deslocamentos calculados pelo MEC enriquecido se aproximam das respostas de referência à medida que a malha é refinada. Assim, o enriquecimento para força concentrada se mostra válido.

## 4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo consiste na análise mecânica de uma viga engastada e livre, com uma força de superfície distribuída em sua face superior, de valor 10,0 (unidades de força de superfície) orientado na direção  $x_2$  e para baixo. Não há forças externas aplicadas às direções  $x_1$  e  $x_3$ . O Módulo de Elasticidade é 10.000 (unidades de tensão) e o coeficiente de Poisson é 0,0. A Fig. 8 mostra a geometria deste exemplo.

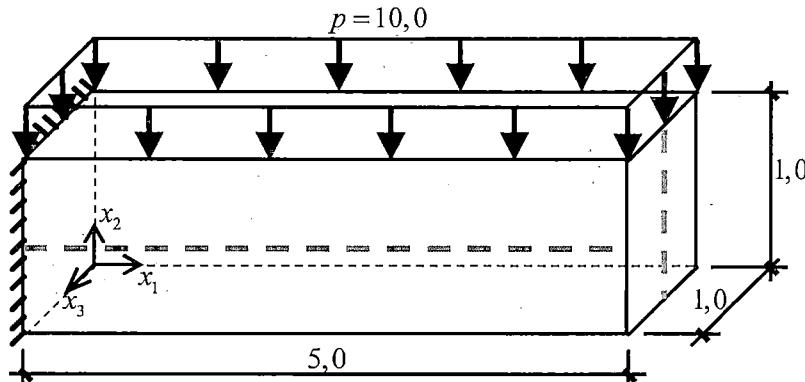


Figura 11. Geometria do exemplo 2

As quatro malhas adotadas para este exemplo possuem, respectivamente, 88, 352, 1408 e 5.632 elementos e 150, 470, 1638 e 6.086 pontos de colocação, conforme Fig. 9.

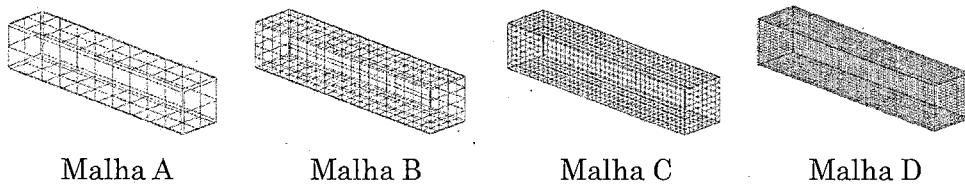


Figura 12. Malhas adotadas para o segundo exemplo

A vinculação da face com condição de contorno em deslocamentos é efetuada com uso de apoios concentrados nas três direções, aplicados no centro de cada elemento que a compõe. Desse modo, o comportamento mecânico de engaste é promovido a ela. A Fig. 13 apresenta a posição das vinculações para a malha A.

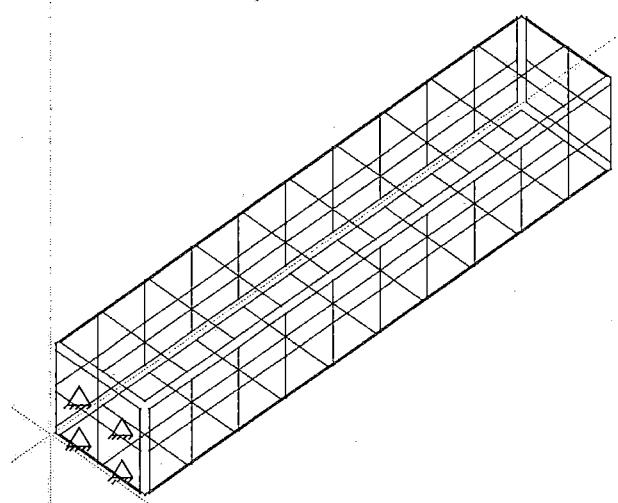


Figura 13. Posição dos apoios concentrados aplicados à malha A.

Os deslocamentos na direção  $x_2$  para a malha D estão representados na Fig. 14.

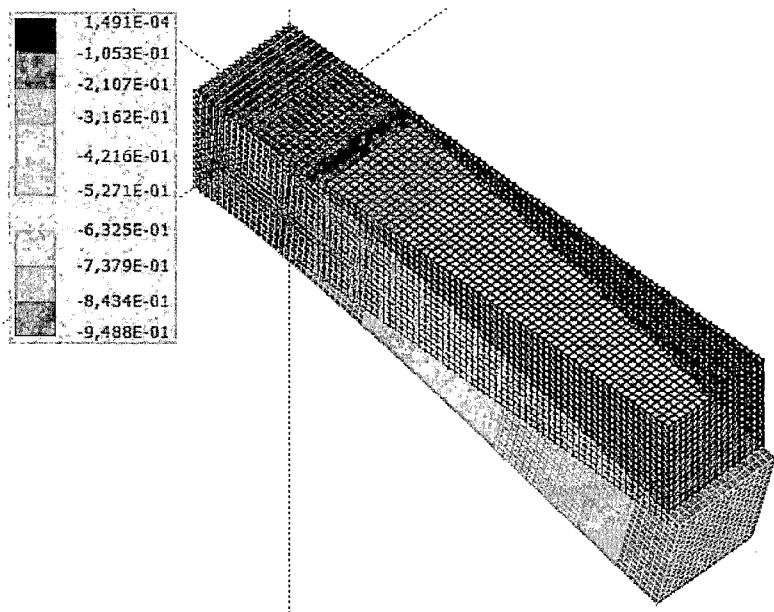


Figura 14. Deslocamentos na direção  $x_2$ : malha D deformada e indeformada

O modelo de referência em MEF possui uma malha com 40.000 elementos hexaédricos de aproximação quadrática (SOLID 186) e 1.333.361 nós, conforme Fig. 15.

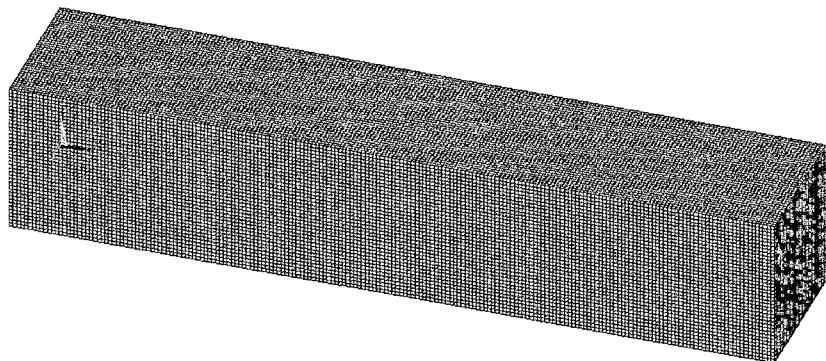


Figura 15. Discretização adotada para o modelo em MEF do exemplo 2

A validação deste exemplo é efetuada comparando-se os deslocamentos entre os modelos numéricos do MEC com a referência em dois intervalos. A primeira análise envolve os deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha tracejada em vermelha da Fig. 11, com  $0,0 \leq x_1 \leq 5,0$ ,  $x_2 = 0,5$  e  $x_3 = 1,0$ . Tais resultados são apresentados na Fig. 16.

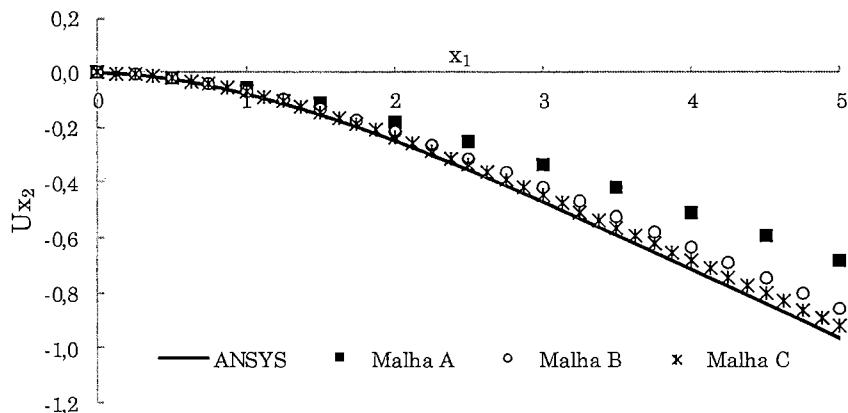


Figura 16. Deslocamentos na direção  $x_2$  ao longo da linha vermelha tracejada

É calculada também a diferença percentual para o deslocamento orientado na direção  $x_2$  em  $x_1 = 5,0$ . Esta análise é feita a partir da comparação entre o ANSYS® e a Malha D. Assim, a diferença obtida é de -1,95%.

O segundo intervalo analisado é delimitado por  $x_1 = 5, 0,0 \leq x_2 \leq 1,0$  e  $x_3 = 0,5$ . Na Fig. 11, este intervalo é simbolizado pela linha tracejada em verde. Os resultados comparados são os deslocamentos associados à direção  $x_1$ , e apresentados na Fig. 17.

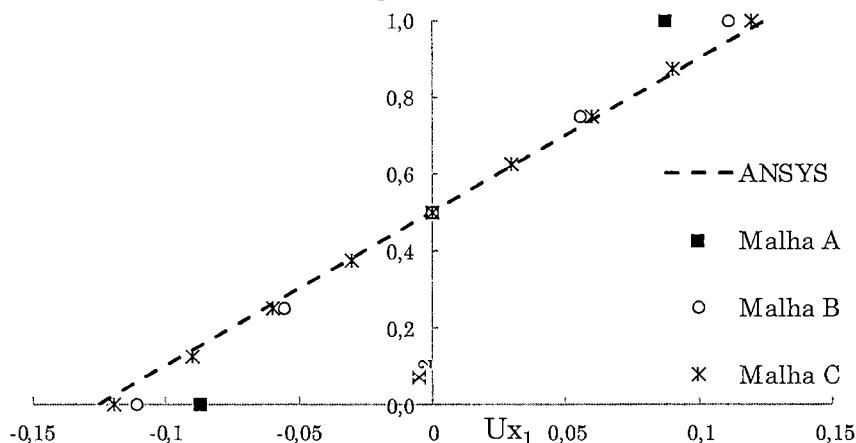


Figura 17. Deslocamentos na direção  $x_1$  ao longo da linha verde tracejada

A diferença percentual calculada para os resultados observados na Fig. 17 refere-se à coordenada  $x_2 = 1,0$ . São utilizados os dados associados ao modelo de referência e a Malha D. Assim, obtém-se como erro o valor de -1,73%.

Portanto, a partir dos resultados apresentados na Fig. 16 e na Fig. 17 nota-se boa concordância entre os deslocamentos do MEC enriquecido e do modelo em MEF. Além disso, também são calculadas as reações de apoio na resolução do sistema, apresentadas na Tabela 1 para as quatro malhas utilizadas.

Tabela 1. Somatório das reações de apoio para as quatro malhas do MEC e referência

Malha	$R_x$	$R_y$	$R_z$
A	4,83E-02	74,06	-4,32E-13
B	-2,25E-02	59,05	-1,02E-14
C	-1,28E-02	52,75	1,61E-12
D	-7,29E-03	50,79	-3,51E-04
ANSYS®	1,31E-07	50,00	-4,76E-08

Com os dados apresentados na Tabela 1, calcula-se o erro percentual entre a soma das reações na direção  $x_2$  na malha D e a força resultante aplicada (50,0 unidades de força), cujo resultado é 1,58%. Além disso, o somatório das forças reativas resulta aproximadamente nulo nas direções  $x_1$  e  $x_3$ , conforme esperado. Com isso, conclui-se que as condições de equilíbrio em forças são atendidas.

#### 4.3 Exemplo 3

O último exemplo deste estudo envolve a análise mecânica de um sólido não-homogêneo e perfeitamente conectado pela interface que une os materiais que compõem a estrutura. A sub-região 1 possui como propriedades elásticas o Módulo de Elasticidade de 1.000 (unidades de tensão) e coeficiente de Poisson 0,0. Para a segunda sub-região tais dados são, respectivamente, 500 (unidades de tensão) e 0,30. É aplicada uma força concentrada de 100 (unidades de força) na face superior do corpo, pertencente ao segundo subdomínio. A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 18.

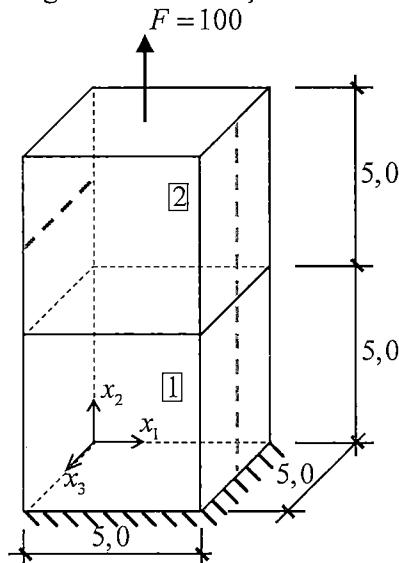


Figura 18. Geometria do terceiro exemplo

Para o MEC, são adotadas três malhas com, respectivamente, 410, 1661 e 6689 elementos, e 562, 1.955 e 7.267 pontos de colocação, de acordo com a Fig. 19.

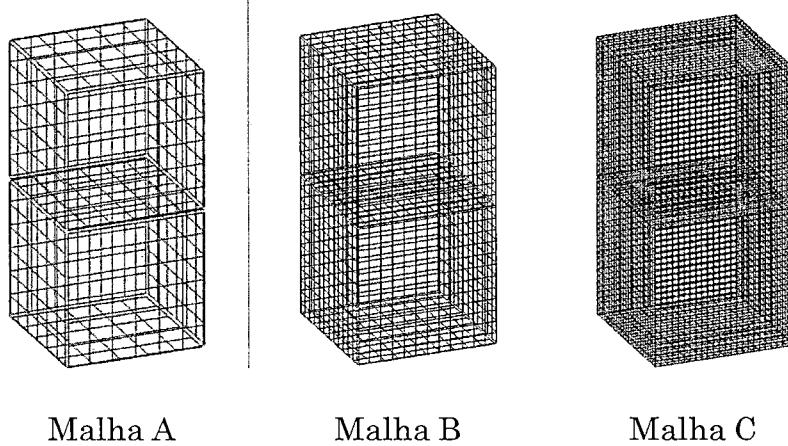


Figura 19. Malhas adotadas para o terceiro exemplo

A referência analisada para este exemplo é um modelo em MEF construído no *software* ANSYS®. Neste modelo, são utilizados 71.442 nós e 16.000 elementos hexaédricos de aproximação quadrática (SOLID 186). A malha adotada é apresentada na Fig. 20.

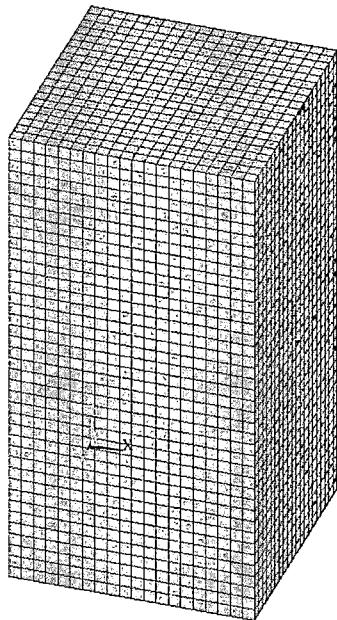


Figura 20. Modelo em MEF do exemplo 3

Os deslocamentos na direção  $x_2$  são mostrados para a configuração deformada da Malha C na Fig. 21.

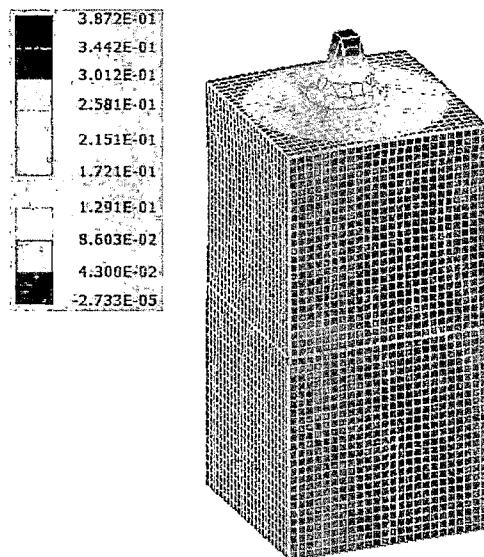


Figura 21. Deformada e deslocamentos em  $x_2$ , malha C.

A comparação dos resultados é efetuada a partir dos deslocamentos na direção  $x_1$  ao longo da linha vermelha tracejada da Fig. 18, em que  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 7,50$ , e  $x_3$  varia de 0,0 a 5,0. Os dados calculados para as três malhas do MEC, assim como para a malha em MEF, são apresentados na Fig. 22.

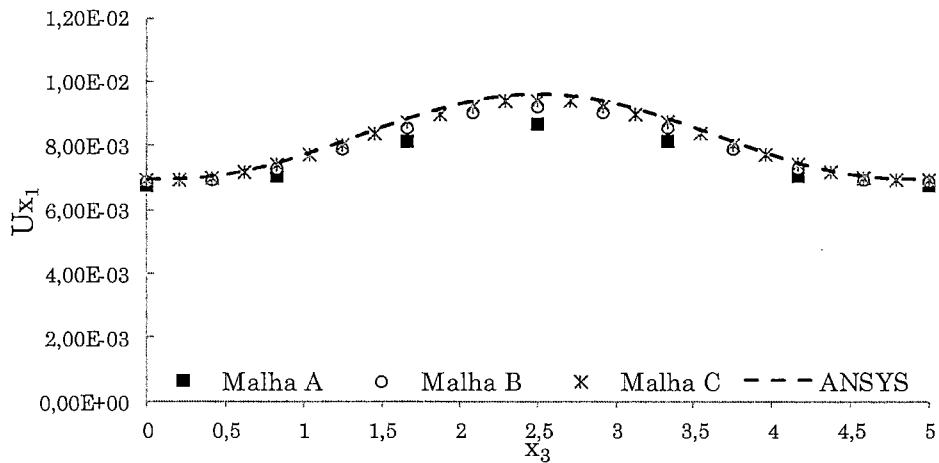


Figura 22. Deslocamentos na direção  $x_1$  na linha vermelha tracejada do exemplo 3

A diferença percentual do deslocamento associado à direção  $x_1$  entre a malha C e o modelo do MEF, no ponto  $x_3 = 2,5$  sobre a linha analisada, é de -2,98%.

É analisado também o campo de deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha tracejada em verde da Fig. 18. Neste intervalo, tem-se  $x_1 = 5,0$ ,  $0 \leq x_2 \leq 10$  e  $x_3 = 2,5$ . Com isso, os resultados obtidos são apresentados na Fig. 23.

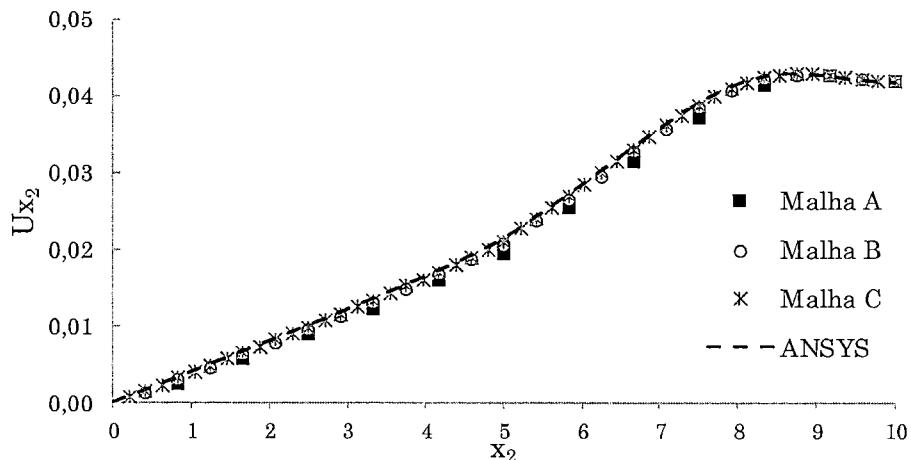


Figura 23. Deslocamentos na direção  $x_2$  na linha verde tracejada do exemplo 3

Calcula-se a diferença percentual para o deslocamento associado à direção  $x_2$  na posição  $x_2 = 10$  na linha verde tracejada entre a Malha C e o modelo em MEF. Com isso, obtém-se o erro percentual de 0,15%.

Portanto, diante dos resultados obtidos, é evidente a boa conformidade dos resultados obtidos ao passo que é efetuado o refinamento da malha do MEC. Assim, atesta-se a validade da formulação também para meios não-homogêneos analisados com uso da Técnica de Sub-Regiões.

## 5 Conclusões

De posse dos resultados apresentados, conclui-se que a estratégia de enriquecimento para forças e vinculações concentradas é eficaz. Isso é garantido devido a boa conformidade dos resultados obtidos pelo MEC em comparação aos modelos numéricos calculados pelo MEF.

O caráter de convergência dos resultados também é evidente, uma vez que os resultados concordam com os resultados da referência à medida que malhas mais refinadas são utilizadas.

No presente trabalho foram utilizados elementos de contorno isoparamétricos de aproximação linear. No entanto, os enriquecimentos propostos podem ser aplicados a elementos de contorno com outros tipos de aproximação.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem também ao CNPq pelo financiamento concedido.

## Referências

- [1] R. Simpson and J. Trevelyan. A partition of unity enriched dual boundary element method for accurate computations in fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 1-10, 2011.
- [2] I. A. Alatawi and J. Trevelyan. A direct evaluation of stress intensity factors using the Extended Dual Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 52, pp. 56-63, 2015.
- [3] G. Hattori, I. A. Alatawi and J. Trevelyan. An extended boundary element method formulation for the direct calculation of the stress intensity factors in fully anisotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 109, pp. 965-981, 2017.
- [4] C.A. Brebbia. *The Boundary Element method for engineers*. Pentech Press, 1978.
- [5] W.T. Kelvin. Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid. *Cambridge Dublin Math J*, vol. 3, pp. 87-89, 1848.
- [6] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolphi e F.J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, pp. 604-614, 1992.

