

3166041
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Cadeira nº 9: "RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES"

Prof. Catedrático: Telemaco van Langendonck

ARCOS HÍPERESTÁTICOS

Notas de aula redigidas pelo
assistente: Milton Mautoni

1957

São Paulo - BRASIL

ARCOS HIPERESTÁTICOS

A - INTRODUÇÃO

1) Generalidades - Os arcos podem ser classificados em:

1) arcos isostáticos

- a) com uma articulação
- b) biarticulados
- c) atirantados
- d) engastados

Os arcos hiperestáticos são em geral estruturas mais econômicas quando comparados com os triarticulados; porém, os esforços solicitantes dos arcos hiperestáticos são modificados por recalques de apoio e variação de temperatura. Entre os arcos hiperestáticos, o mais econômico é o engastado: sua construção é aconselhável quando não há possibilidade de recalques nos apoios.

Quando são previstos grandes recalques nos apoios recomendam-se os arcos triarticulados e os atirantados.

Em casos intermediários, com recalques previstos pequenos, recomendam-se os biarticulados e os atirantados. Os arcos biarticulados apresentam algumas das vantagens dos isostáticos e outras dos hiperestáticos: assim, recalques não muito grandes, na direção normal à linha das articulações, não afetam praticamente os esforços solicitantes; este tipo de arco é sensível aos recalques na direção da linha das articulações de imposta.

Os arcos atirantados reunem, de fato, as vantagens das estruturas isostáticas e das hiperestáticas: são internamente hiperestáticos e externamente isostáticos.

A escolha entre a construção de um arco triarticulado e um atirantado é quase sempre condicionada pelo fato de se desejar um vão inteiramente livre, o que, de início, elimina o tirante e consequentemente o arco atirantado.

Os arcos a uma articulação não são utilizados na prática por reunirem apenas as desvantagens dos isostáticos e hiperestáticos. Na figura 1 são apresentados os arcos utilizados na prática, e os respectivos graus de hiperestaticidade.

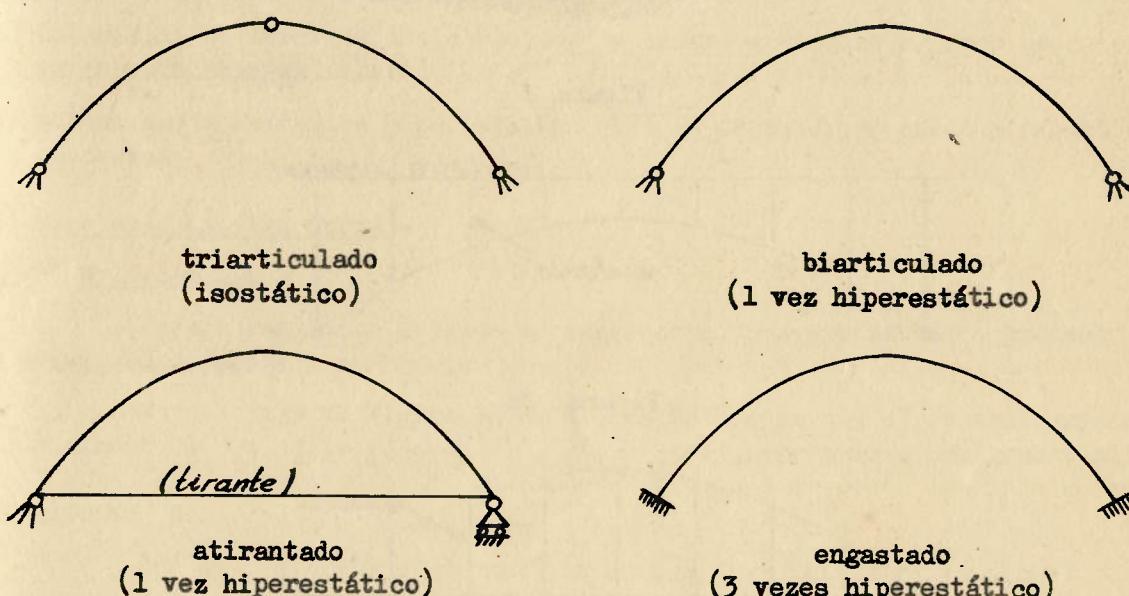


Figura 1

Nas grandes construções, o peso próprio das estruturas em arco é uma parcela grande da carga que atua sobre os mesmos, e as características do solo de

fundaçāo geralmente determinam o tipo de arco a ser escolhido; procurando coorde-
nar êsses dois fatores aliados, a um esquema mais econômico de funcionamento pa-
ra a estrutura, utilizam-se atualmente arcos de funcionamento misto, cuja cons-
trução passamos a explicar.

Constroe-se inicialmente um arco triarticulado, e em seguida retira-se
o escoramento. Dessa forma, resulta que para o peso próprio o arco é triarticu-
lado, e a fundaçāo é solicitada por grande parte do peso total da estrutura, pro-
vocando-se assim grande parte dos recalques sem afetar o arco.

Após êsse estágio, bloqueiam-se as articulações, resultando para os a-
créscimos de carga um funcionamento hiperestático que poderá provocar, agora, re-
calques de apoio sensivelmente menores.

Em resumo, o arco é isostático para o peso próprio e hiperestático pa-
ra as cargas accidentais.

2) Terminologia dos arcos -

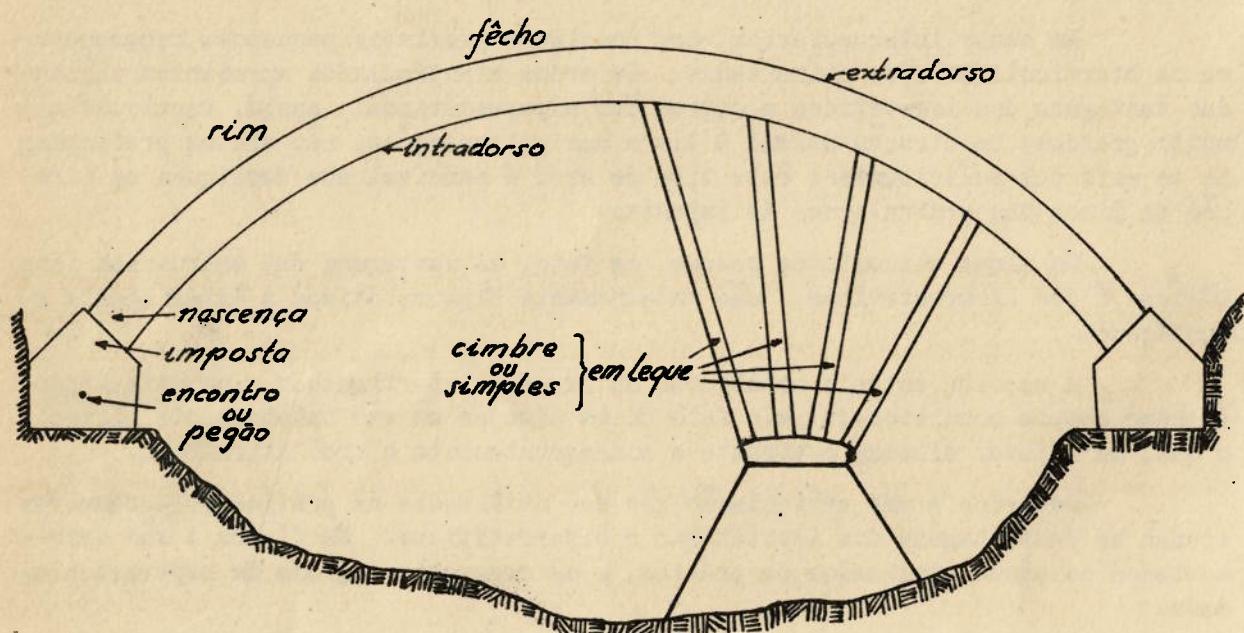


Figura 2

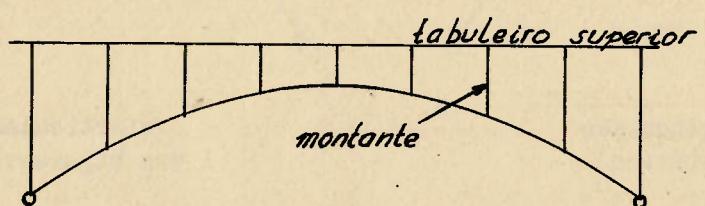


Figura 2a

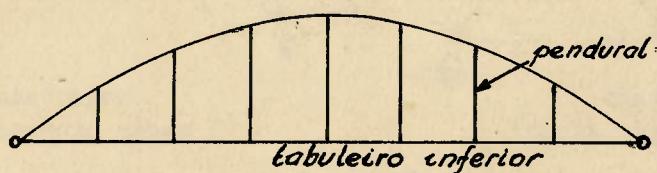


Figura 2b

B - ARCO BIARTICULADO

3) Estrutura isostática fundamental do arco biarticulado - Um arco biarticulado qualquer, estrutura uma vez hiperestática, pode ser transformado em uma viga curva, substituindo uma das suas articulações por um apoio articulado móvel; aplicando nesse apoio móvel uma força H paralela à direção dos deslocamentos do mesmo, que reconduz a articulação à posição inicial, vem a coincidência das duas estruturas (fig. 3).

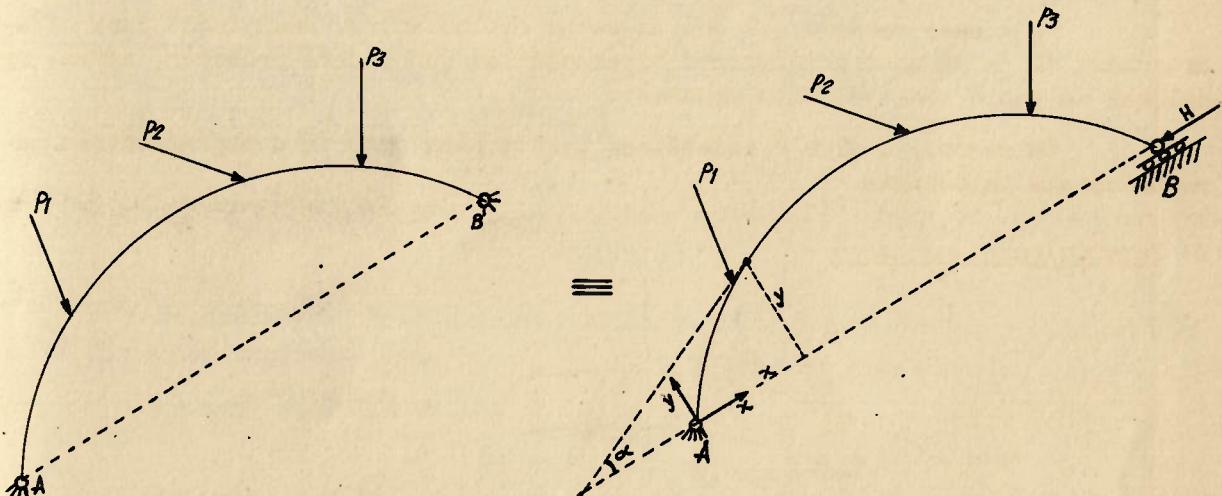


Figura 3

Chamando M , N e Q , respectivamente, momento fletor, força normal e força cortante na secção genérica da viga curva (com $H = 0$), e H o valor do empuxo que anula o deslocamento da articulação B , teremos na secção genérica os esforços finais M , N e Q a saber:

$$M = M_0 - H \gamma \quad N = N_0 - H \cos \alpha \quad \text{e} \quad Q = Q_0 - H \sin \alpha$$

Observe-se que os esforços M , N e Q contêm um termo proveniente da viga curva (M_0 , N_0 e Q_0) e um termo função de H .

Dois são, então, os problemas a resolver para o cálculo dos esforços em arco biarticulado:

- determinar os esforços que o sistema de cargas aplicadas ao arco produz, na viga curva correspondente;
- determinar a incógnita hiperestática (H) e os esforços que ela produz na viga curva.

4) Resolução da viga curva -

a) Gráficamente

Para a resolução gráfica da viga curva, pode-se adotar o processo que a seguir se descreve.

Seja a viga da figura 4a submetida às forças que aí se indicam; com polo qualquer O' e raios polares $1'$, $2'$, $3'$ e $4'$ traça-se o polígonos funicular da figura 4a; a intersecção M dos lados extremos é um ponto da linha de ação de R .

Por se tratar de viga curva, a reação R_B terá direção normal a mn ; a reação R_A deve ser tal que as três forças R , R_A e R_B estejam em equilíbrio.

Daí se conclui que o ponto N (intersecção da linha de ação de R_B com R) é um ponto da linha de ação de R_A . Conhecidas as direções das forças R_A e

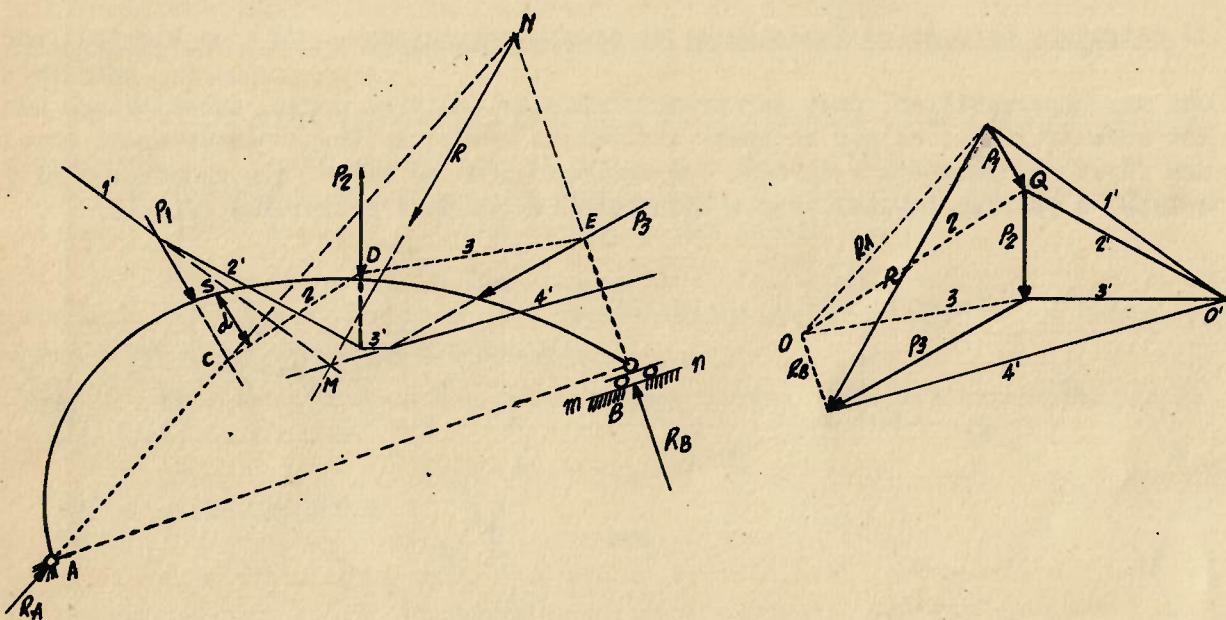


Figura 4

R_B , seus módulos resultam determinados no polígono das fôrças (fig. 4b).

O polígono funicular que passa por A e B corresponde ao polígono das fôrças de polo 0 e raios polares R_A , 2, 3 e R_B é a linha das pressões correspondente ao carregamento dado.

O traçado da linha das pressões permite determinar o momento fletor numa secção qualquer da viga curva; de fato, cada um dos segmentos de reta que forma a linha das pressões desenhada na figura 4a representa a linha de ação da resultante de um determinado número de fôrças que agem sobre a viga (por exemplo, o lado CD é a linha de ação da resultante de R_A e P_1). A intensidade dessas resultantes parciais é obtida diretamente no polígono das fôrças.

Suponha-se, por exemplo, que se deseje determinar o momento fletor na secção S (fig. 4a); as fôrças que atuam à esquerda da secção S são R_A e P_1 ; a resultante dessas duas fôrças tem como linha de ação a reta CD e sua intensidade é \overline{OQ} .

O momento fletor procurado é, então:

$$M_S = -\overline{OQ} \cdot d,$$

com sinal negativo porque produz tração no extradorso.

Para obter as fôrças normal e cortante numa secção qualquer da viga curva, basta decompôr a resultante das fôrças aplicadas à esquerda (ou à direita) da secção considerada, segundo as direções respectivamente normal e tangencial à secção.

Pelo mesmo processo se obtêm os momentos nucleares numa secção qualquer e, portanto, as tensões extremas nessa secção.

Quando se trata de calcular as tensões normais máximas produzidas por carga móvel, é interessante calcular os momentos nucleares, pois estando o arco sujeito à flexão composta, nem sempre o carregamento que produz o máximo momento fletor é o mesmo que produz a máxima fôrça normal.

b) Analiticamente

A resolução analítica da viga curva não apresenta dificuldades por se

tratar de uma estrutura isostática.

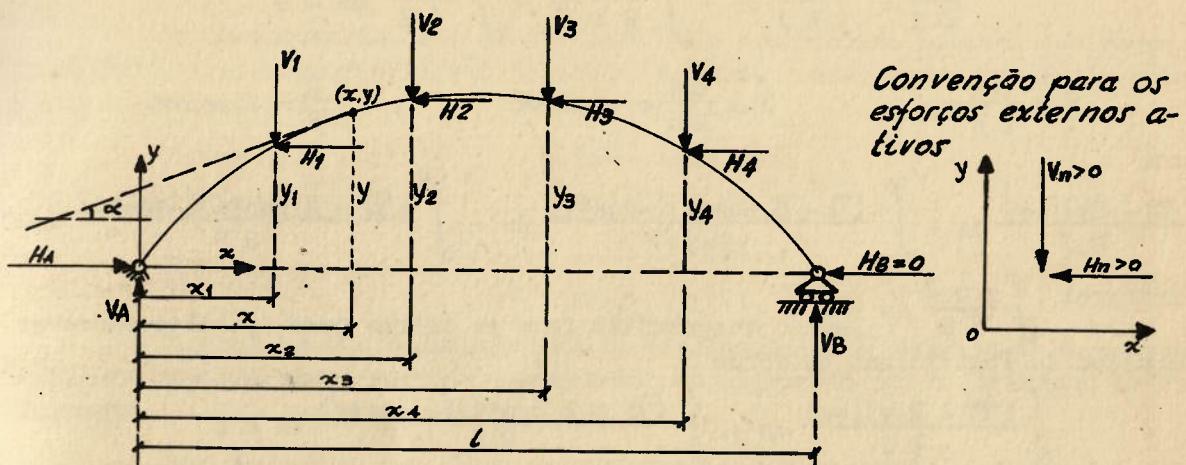


Figura 5

Decompoem-se, inicialmente, todas as forças normalmente e paralelamente à linha das impostas (fig. 5).

Pode-se escrever então:

$$H_A = H_B + \sum_1^m H_n \quad (H_B = 0)$$

$$V_A + V_B = \sum_1^m V_n$$

O momento do sistema em relação a A é

$$V_B l + \sum H_n y_n - \sum V_n x_n = 0$$

onde

$$V_B = \frac{\sum V_n x_n - \sum H_n y_n}{l} \quad \text{e} \quad V_A = \sum V_n - V_B$$

Então

$$M = V_B (l - x) - \sum_x V_n (x_n - x) - \sum_x H_n (y - y_n)$$

$$M = (V_B - \sum_x V_n) \operatorname{sen} \alpha - \sum_x H_n \cos \alpha$$

$$Q = (V_B - \sum_x V_n) \cos \alpha + \sum_x H_n \operatorname{sen} \alpha$$

Nos casos em que as cargas, que atuam sobre o arco, são todas paralelas, e de direção normal à linha das impostas, o diagrama de momentos fletores para a viga curva coincide com o diagrama de momentos fletores da viga sobre dois apoios de mesmo vão que o arco e sujeita ao mesmo carregamento (fig. 6).

5) Determinação de H - Vimos que no arco biarticulado, $M = M - H y$, $N = N - H \cos \alpha$ e $Q = Q - H \operatorname{sen} \alpha$.

Aplicando-se a equação de Font-

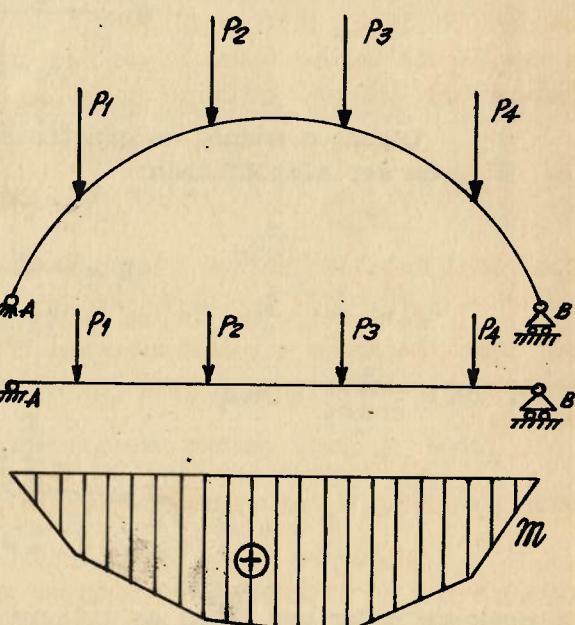


Figura 6

violent vem:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial H} = \int \frac{M \bar{M}}{E J} ds + \int \frac{N \bar{N}}{E S} ds + \int \frac{x Q \bar{Q}}{G S} ds = 0$$

$$\bar{M} = \frac{\partial M}{\partial H} = -y \quad \bar{N} = \frac{\partial N}{\partial H} = -\cos \alpha \quad \bar{Q} = \frac{\partial Q}{\partial H} = -\sin \alpha$$

onde

$$\int \frac{(M - Hy)(-y)}{E J} ds + \int \frac{(N - H \cos \alpha)(-\cos \alpha)}{E S} ds + \int \frac{x(Q - H \sin \alpha)(-\sin \alpha)}{G S} ds = 0$$

A integral $\int \frac{x Q \bar{Q}}{G S} ds$ sendo desprezível face as outras duas, permite escrever a equação de Fontviolent na forma

$$\int \frac{(M - Hy)(-y)}{E J} ds + \int \frac{(N - H \cos \alpha)(-\cos \alpha)}{E S} ds = 0$$

$$- \int \frac{M_y}{E J} ds + H \int \frac{y^2}{E J} ds - \int \frac{N \cos \alpha}{E S} ds + H \int \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds = 0$$

onde

$$H = \frac{\int \frac{M_y}{E J} ds + \int \frac{N \cos \alpha}{E S} ds}{\int \frac{y^2}{E J} ds + \int \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds}$$

A integral $\int \frac{N \cos \alpha}{E S} ds$ é pequena face a $\int \frac{M_y}{E J} ds$

por se tratar de viga curva.

Chamando

$$\vartheta = \frac{\int \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds}{\int \frac{y^2}{E J} ds}$$

vem:

$$H = \frac{\int \frac{M_y}{E J} ds}{(1 + \vartheta) \int \frac{y^2}{E J} ds}$$

Quando o módulo de elasticidade não varia ao longo do arco, a fórmula de H pode ser simplificada:

$$H = \frac{\int \frac{M_y}{J} ds}{(1 + \vartheta) \int \frac{y^2}{J} ds}$$

Como $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$, vem

$$H = \frac{\int \frac{M_y}{J \cos \alpha} dx}{(1 + \vartheta) \int \frac{y^2}{J \cos \alpha} dx}$$

devendo-se notar que todas as integrais que estamos considerando são definidas e se extendem a todo o arco, onde x varia de 0 a $.$

Na maioria dos casos da prática ϑ pode ser feito igual a zero; observa-se que ϑ representa o efeito da parcela $H \cos \alpha$, da força normal, no va-

lor de H .

Em consequência desse efeito será mais pronunciado no caso dos arcos muito abatidos (relações flecha/vão pequenas) e mesmo nesses casos atingirá quando muito o valor $\nu = 0,07$.

Chamando $j = \frac{v}{J \cos \alpha}$ pode-se escrever:

$$H = \frac{\int m_j dx}{(1+\nu) \int j y dx}$$

Observe-se que o denominador da expressão de H independe do carregamento que atua no arco; somente o numerador da expressão de H é função do carregamento.

Considerou-se, até aqui, a convenção clássica para M , N e Q .

Porém, nos arcos, predomina sempre N de compressão; para facilidade nos cálculos, convencionaremos daqui por diante, que a força normal será positiva quando de compressão e negativa quando de tração.

6) Influência da temperatura e do recalque de apoio - Como vimos, a expressão de H foi obtida de

$$\int \frac{H v}{E J} y ds + \int \frac{H \cos \alpha}{E S} \cos \alpha ds - \int \frac{m v}{E J} ds = \frac{\partial \zeta}{\partial H} = 0 \quad (\text{Fontvielant})$$

Conclui-se facilmente que um recalque vertical, não muito grande, não influe no valor de H , pois y , x e $\cos \alpha$ não sofrem variações sensíveis na expressão acima.

Porém, se houver deslocamento horizontal relativo, entre as duas articulações, a equação de Fontvielant apresentará o segundo membro igual ao deslocamento do ponto B na direção e sentido de H .

Se o ponto B se desloca para B' , o deslocamento $\delta = \overline{BB'}$ tem sentido contrário ao de H (fig. 7).

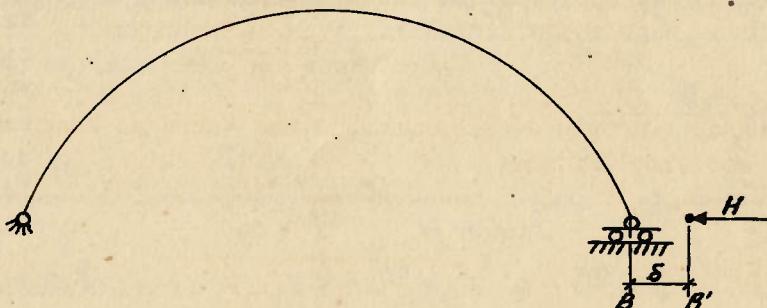


Figura 7

Assim a equação de Fontvielant terá segundo membro igual a $-\delta$:

$$\int \frac{H v^2}{E J} ds + \int \frac{H \cos^2 \alpha}{E S} ds - \int \frac{m v}{E J} ds = -\delta$$

onde

$$H = \frac{\int m_j dx - E \delta}{(1+\nu) \int \frac{v^2}{J \cos \alpha} dx}$$

No caso em que o arco é submetido, além das cargas aplicadas, a um acréscimo de temperatura Δt (uniforme ao longo de todo o seu comprimento) a viga curva teria no início \bar{l} igual a $\bar{l} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot \bar{l}$ e devido ao empuxo H o vão seria reduzido no fim para \bar{l} . Portanto pode-se imaginar que o apoio B sofra um deslocamento horizontal igual a $\alpha_t \cdot \Delta t \cdot \bar{l}$, de mesma direção e sentido de H . Aplicando a equação de Fontvielant, obtém-se:

$$\int \frac{H y^2}{E J} ds + \int \frac{H \cos^2 \alpha}{E S} ds - \int \frac{m_y}{E J} ds = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot \bar{l}$$

Donde

$$H = \frac{\int \frac{m_y}{J \cos \alpha} dx + E \alpha_t \Delta t \cdot \bar{l}}{(1 + \nu) \int \frac{y^2}{J \cos \alpha} dx}$$

em que α_t = coeficiente de dilatação linear do material do arco

Δt = acréscimo de temperatura.

A expressão geral do empuxo H , de um arco sujeito a deslocamento horizontal no apoio, e variação de temperatura Δt é

$$H = \frac{\int \frac{m_y}{J \cos \alpha} dx - E \delta + E \alpha_t \Delta t \cdot \bar{l}}{(1 + \nu) \int \frac{y^2}{J \cos \alpha} dx}$$

7) Arco sujeito a forças paralelas e impostas desniveladas -

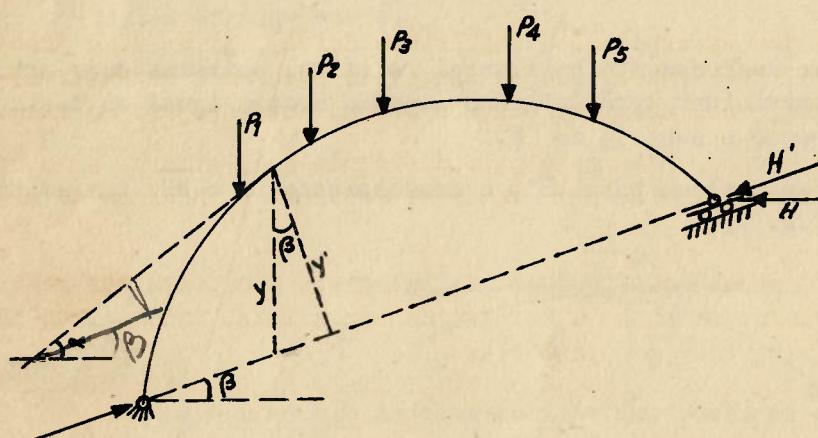


Figura 8

$$M = m - H' y' = m - H y \quad \therefore \quad \bar{M} = -y$$

$$N = n + H \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \quad \bar{N} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

Aplicando a equação de Fontvielant vem:

$$H = \frac{\int \frac{m_y}{E J} ds}{\int \frac{y^2}{E J} ds + \int \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{E S \cos^2 \beta} ds}$$

Lembrando que $\int \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{E S \cos^2 \beta} ds$ só apresenta valor sensível no caso de arcos mui-

$$H = H' \cos \beta$$

$$y' = y \cos \beta$$

onde:

$$H y = H' y'$$

Quando os apoios do arco biarticulado não se situam no mesmo nível (fig. 8), é às vezes mais interessante considerar como incógnita hipotética a projeção horizontal do empuxo.

to abatidos, resulta para os casos comuns

$$H = \frac{\int \frac{M}{EJ} ds}{\int \frac{y^2}{EJ} ds}$$

O cálculo das tensões normais máximas nos arcos pode ser feito utilizando-se os momentos nucleares.

As tensões extremas em uma secção, sujeita a flexão composta, são dadas por

$$\sigma' = \frac{N}{S} + \frac{M}{W'} = \frac{M'}{W'} \quad \text{e} \quad \sigma'' = \frac{N}{S} - \frac{M}{W''} = \frac{M''}{W''}$$

onde M' e M'' são os momentos em relação aos pontos nucleares (fig. 9).

$$M_s = M_s - H y_s$$

$$M_i = M_i - H y_i$$

8) Cálculo de H - Atualmente o cálculo analítico apresenta grande vantagem sobre o cálculo gráfico devido ao uso das máquinas de calcular.

a) Processo analítico

Se forem conhecidas as expressões analíticas de M , j e y , o problema será de fácil resolução, pois resolvendo as integrais poderemos calcular facilmente o valor do empuxo: isso acontece, entretanto, no ante-projeto do arco.

Em seguida altera-se o ante-projeto, modificando-se o eixo do arco e a lei de variação do momento de inércia, procurando-se reduzir os esforços ao mínimo possível.

Geralmente, após essas modificações, as integrais não podem ser resolvidas analiticamente: recorre-se então à integração aproximada, construindo tabelas e substituindo as integrais por somatórias.

Assim:

$$H = \frac{\int M j dx}{(1 + \gamma) \int j y dx} \approx \frac{\sum M_j \Delta x}{(1 + \gamma') \sum j y \Delta x} \quad \text{onde} \quad \gamma' = \frac{\sum \frac{\cos \alpha}{S} \Delta x}{\sum j \cdot y \cdot \Delta x}$$

A integração aproximada é feita dividindo-se o arco em trechos de $\Delta x = \text{const.}$, e tomando-se as ordenadas y que correspondem ao ponto médio de cada um dos trechos Δx (fig. 10).

Assim, as coordenadas do ponto 2 do arco serão:

$$x = 1,5 \Delta x \quad y = y_2$$

O cálculo do empuxo se rá feito admitindo que sejam constantes, em cada um dos tre-

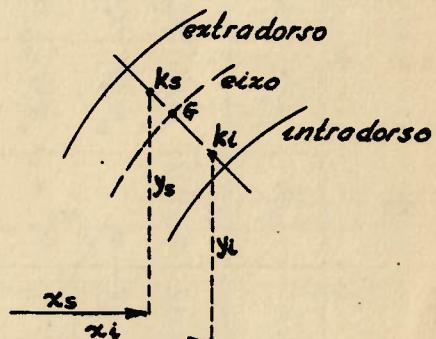


Figura 9

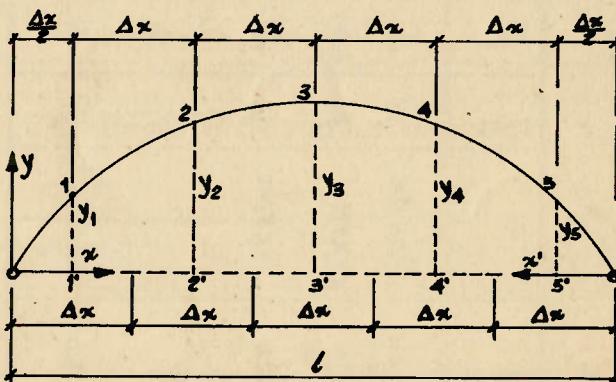


Figura 10

chos $1', 2', 3', \dots$, os valores de $y, \cos\alpha, J$ e M .

Pode-se preparar uma tabela, como a que se mostra abaixo, que facilita o cálculo do empuxo.

x	x'	y	y'	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$j = \frac{y-y'}{J \cos\alpha}$	$\frac{y-y'}{J \sin\alpha}$	$\frac{x-x'}{J \cos\alpha}$	$\frac{x-x'}{J \sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{J}$	$\frac{\sin\alpha}{J}$
$0.5 \Delta x$	$l - 0.5 \Delta x$	y_1	y_1'	$\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$	j_1	$\frac{0.5}{J}$	$\frac{l - 0.5}{J}$	$\frac{0.5}{J}$	$\frac{\cos\alpha_1}{J}$	$\frac{\sin\alpha_1}{J}$
$1.5 \Delta x$	$l - 1.5 \Delta x$	y_2	y_2'	$\cos\alpha_2$	$\sin\alpha_2$	j_2	$\frac{1.5}{J}$	$\frac{l - 1.5}{J}$	$\frac{1.5}{J}$	$\frac{\cos\alpha_2}{J}$	$\frac{\sin\alpha_2}{J}$
$2.5 \Delta x$	$l - 2.5 \Delta x$	y_3	y_3'	$\cos\alpha_3$	$\sin\alpha_3$	j_3	$\frac{2.5}{J}$	$\frac{l - 2.5}{J}$	$\frac{2.5}{J}$	$\frac{\cos\alpha_3}{J}$	$\frac{\sin\alpha_3}{J}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$l - 0.3 \Delta x$	$0.5 \Delta x$	y_n	y_n'	$\cos\alpha_n$	$\sin\alpha_n$	j_n	$\frac{0.5}{J}$	$\frac{l - 0.3}{J}$	$\frac{0.5}{J}$	$\frac{\cos\alpha_n}{J}$	$\frac{\sin\alpha_n}{J}$

$$H = \sum \frac{S M_j / \Delta x + \sum j y / \Delta x}{\cos \alpha \Delta x + \sum j y} = \sum \frac{S M_j'}{\cos \alpha + \sum j y} = \frac{\sum M_j'}{\sum \cos \alpha + \sum j y} = \frac{\rho L_1}{\sum \cos \alpha + \sum j y}$$

Na tabela acima não fizemos colunas para M_j e $M_{j'}$. No caso de arcos sujeitos exclusivamente a carga permanente, seria mais interessante e mais rápido fazer colunas para M_j e $M_{j'}$. Porém nos arcos sujeitos a cargas móveis é mais interessante determinar a linha de influência, ou as somatórias que correspondem ao numerador da expressão de H ; por este motivo aparecem na tabela colunas de j_x , $\sum j_x$, j'_x e $\sum j'_x$.

Vejamos então como essas colunas permitem determinar o numerador de H para uma carga móvel.

$$\int_0^l M_j dx = \int_0^z \frac{Pz'}{l} x j dx + \int_0^{z'} \frac{Pz}{l} x' j dx = \text{numerador de } H$$

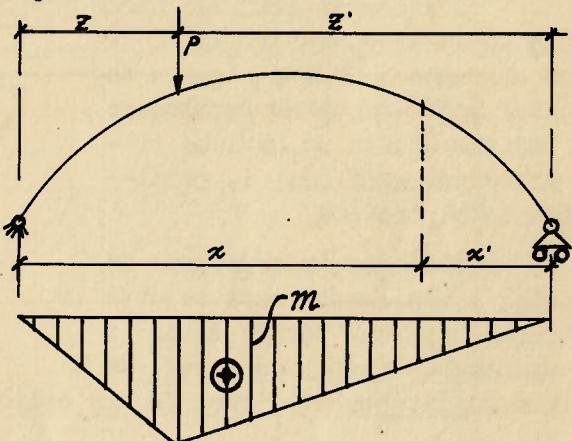
O momento fletor M_j , na secção genérica x ou x' da viga curva, é:

$$z \leq x \quad M_j = \frac{Pz x'}{l}$$

$$z \geq x \quad M_j = \frac{Pz' x}{l}$$

Assim

$$\int_0^l M_j j dx = \frac{Pz'}{l} \int_0^z j x dx + \frac{Pz}{l} \int_0^{z'} j x' dx$$



Na integração aproximada temos:

$$\begin{aligned} \sum M_j j dx &= \frac{z'}{l} \Delta x \sum_0^z j x + \frac{z}{l} \Delta x \sum_0^{z'} j x' = P \cdot \Delta x \left[\frac{z'}{l} \sum_0^z j x + \frac{z}{l} \sum_0^{z'} j x' \right] \\ &= \Delta x \cdot P \left[\frac{z'}{l} \sum_0^z j x + \frac{z}{l} \sum_0^{z'} j x' \right] = \Delta x \sum_1 \end{aligned}$$

Figura 11

Conhecido o valor de H , o cálculo das tensões extremas é simples: basta calcular os momentos nucleares, e dividí-los pelos respectivos módulos de resistência para obter as tensões extremas. Assim, pode-se construir nova tabela que forneça os momentos nucleares.

x	H	y_i	y_s	M_i	M_s	M_i	M_s

Para o traçado da linha de influência de H é bastante útil, também, a seguinte propriedade:

"O diagrama de momentos fletores de uma viga simplesmente apoiada, de mesmo vão que o arco biarticulado, e carregada com a carga fictícia j (correspondente à secção do arco de mesma abscissa que a da viga), é a linha de influência do numerador de H ."

De fato, considere-se o arco biarticulado da figura 12 na qual se representou a viga sobre dois apoios carregada com j (x). O momento fletor na secção n da viga é

$$M' = \int_0^z j \, dx \frac{x}{l} z' + \int_0^{z'} j \, dx' \frac{x'}{l} z$$

$$M' = \frac{z'}{l} \int_0^z j \, x \, dx + \frac{z}{l} \int_0^{z'} j \, x' \, dx'$$

como queríamos demonstrar.

b) Processo gráfico

O processo gráfico para o cálculo do arco biarticulado é pouco empregado. Com a máquina de calcular podem-se obter resultados tão rápidos quanto os obtidos pelos processos gráficos, e, geralmente, mais precisos.

Além das imperfeições de desenho, a que sempre está sujeita a solução gráfica, tem-se ainda a necessidade de fazer uma parte do cálculo analiticamente, para depois aplicar o processo gráfico.

Vejamos, então, como se resolveria o arco biarticulado (fig. 11) pelo processo gráfico. Tendo em vista as mesmas considerações feitas no caso do processo analítico, o problema se resume em determinar o empuxo H .

Distinguem-se, também, dois casos: aquele em que só se devem considerar cargas permanentes, e o caso das cargas móveis.

1) Carga permanente

Para a determinação, pelo processo gráfico, de:

$$H = \frac{\int_0^l m_j \, dx}{(1 + v) \int_0^l y \, j \, dx} \quad \text{sendo} \quad v = \frac{\int_0^l \frac{\cos \alpha}{s} \, dx}{\int_0^l y \, j \, dx} \quad \text{e} \quad j = \frac{v}{J \cos \alpha}$$

observamos que

$$\int_0^l m_j \, dx = \int_0^l \frac{m}{J \cos \alpha} y \, dx ,$$

isto é, a integral do numerador de H é o momento estático de $\frac{m \, dx}{J \cos \alpha}$ em relação ao eixo x .

A integral

$$\int_0^l j \, y \, dx = \int_0^l \frac{v}{J \cos \alpha} y \, dx$$

é o momento estático de $\frac{v \, dx}{J \cos \alpha}$ ao eixo x .

Daí se conclui que essas duas integrais podem ser obtidas, facilmente, com o traçado de dois polígonos funiculares.

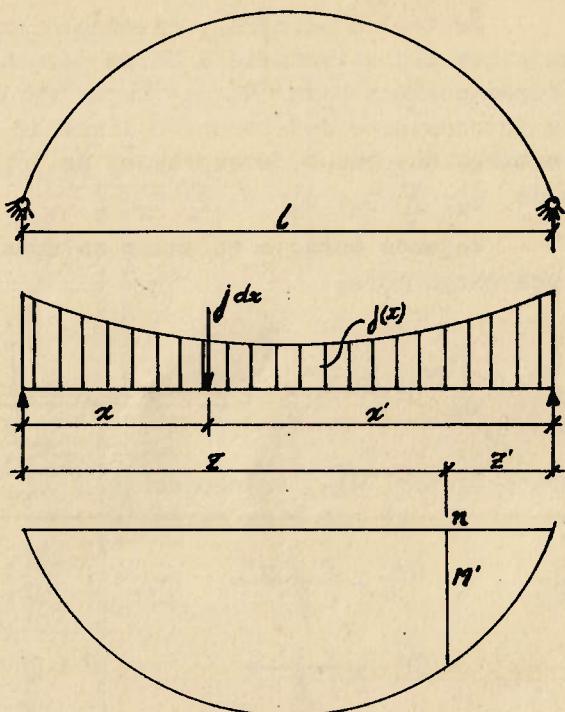


Figura 12

A integral

$$\int_0^l \frac{\cos \alpha}{s} dx$$

pode ser obtida, quando necessária, pelo processo analítico anteriormente descrito.

Vejamos como se calculam as duas referidas integrais.

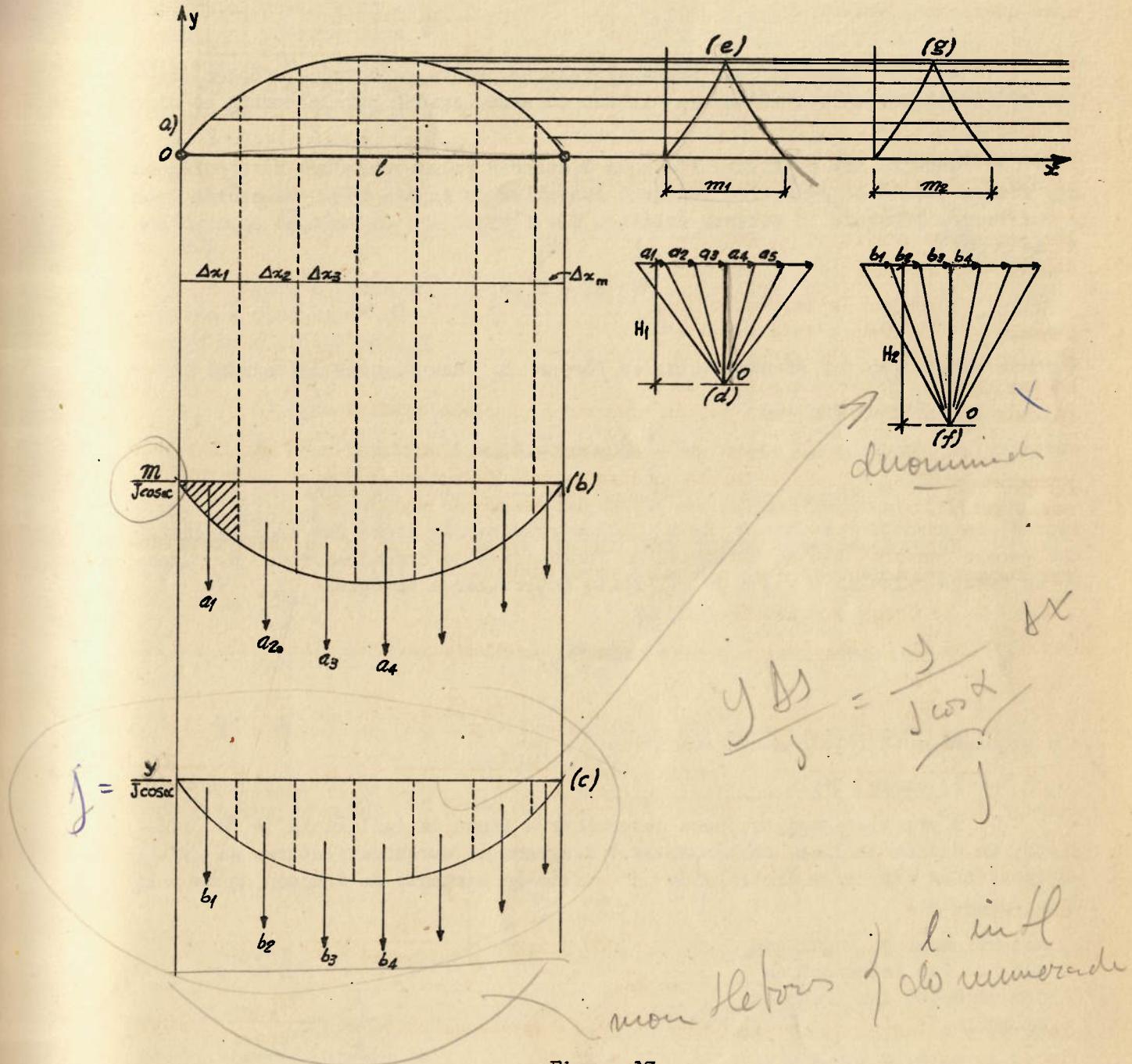


Figura 13

Na figura 13a, dividimos inicialmente o arco em um certo número de partes Δx_i . Para os pontos de divisão calculamos os valores de

$$\frac{m}{J \cos \alpha}$$

e

$$\frac{y}{J \cos \alpha}$$

com os quais traçamos os diagramas (b) e (c).

Calculamos, a seguir, para cada um dos trechos de divisão, a área do

diagrama correspondente, isto é,

$$a_1 = \left(\frac{m}{J \cos \alpha} \right)_2 \frac{\Delta x_1}{2}$$

$$b_1 = \left(\frac{v}{J \cos \alpha} \right)_1 \frac{\Delta x_1}{2}$$

$$a_2 = \left[\left(\frac{m}{J \cos \alpha} \right)_1 + \left(\frac{m}{J \cos \alpha} \right)_2 \right] \frac{\Delta x_2}{2}$$

$$b_2 = \left[\left(\frac{v}{J \cos \alpha} \right)_1 + \left(\frac{v}{J \cos \alpha} \right)_2 \right] \frac{\Delta x_2}{2}$$

⋮

⋮

Agiremos, agora, como se êsses valores, assim calculados, fôssem fôrças aplicadas nos pontos médios de divisão do arco, agindo paralelamente ao eixo dos x.

Construimos na figura 13d, com distância polar qualquer H , o polígono das fôrças a_i e o respectivo polígono funicular da figura 13e. De acordo com a construção efetuada, o momento estático das fôrças a_i em relação ao eixo dos x é:

$$\int_0^l m_j dx = H_1 \cdot m_1$$

A mesma construção foi efetuada para as fôrças b_i nas figuras 13f e 13g.

Da figura resulta

$$\int_0^l j y dx = H_2 \cdot m_2$$

isto é, os produtos $H_1 \cdot m_1$ e $H_2 \cdot m_2$, cujos valores são lidos nas escalas adotadas para o desenho, são as integrais do numerador e do denominador de H . Quando se deseja calcular o valor de H basta determinar a integral

$$\int_0^l \frac{\cos \alpha}{s} dx$$

e o problema está inteiramente resolvido.

2) Carga móvel

O processo gráfico, para determinar a linha de influência de H consiste, em última análise, em traçar-se o diagrama de momentos fletores de uma viga isostática com carga distribuída j : trata-se portanto do traçado de um polígono funicular.

c) Determinação do lugar geométrico das intersecções das direções das reações de apoio.

Na viga curva da figura 14, a reta BD é o lugar geométrico das intersecções das reações de apoio, pois R_B tem como única linha de ação a reta BD . Assim, aplicada a carga P , determina-se o ponto C , intersecção da linha de ação da carga P com BD , e unindo

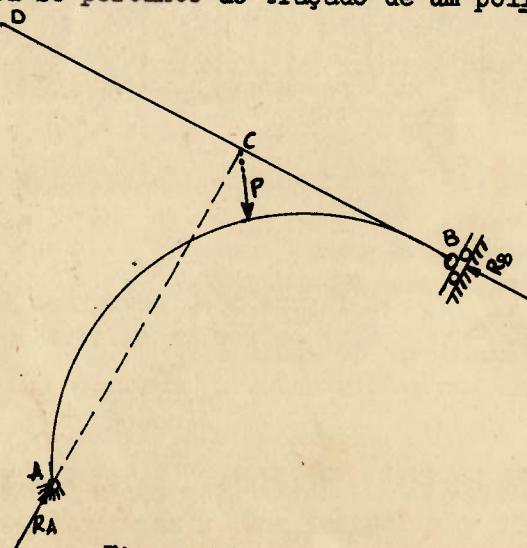


Figura 14

A a C, determina-se a reta AC que é a linha de ação da reação R_A .

2) Arco triarticulado

No arco triarticulado da figura 15, o lugar geométrico das intersecções é dado pelas retas CD e CE. Assim, aplicada a carga P , à esquerda de C, determina-se o ponto F, intersecção da linha de ação de P com a reta CD, e unindo F a A determina-se a reta AF que é a linha de ação da reação R_A . A linha de ação de R_B é a reta ECD.

Para a carga aplicada à direita de C, repete-se o raciocínio, usando agora o trecho CE.

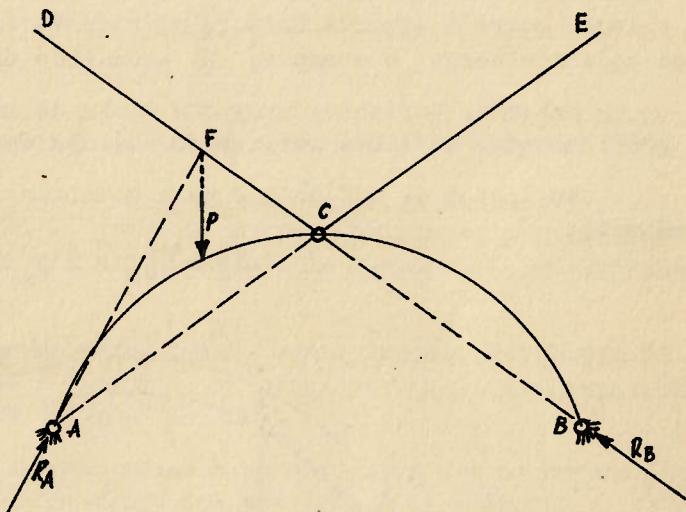


Figura 15

3) Arco biarticulado

No arco biarticulado não conhecemos os pontos de encontro das reações.

Por semelhança de triângulos podemos escrever:

$$\frac{y_0}{z} = \frac{V_A}{H}$$

Para $P = 1$,

$$V_A = \frac{z'}{l}$$

que substituída na equação anterior fornece:

$$\frac{y_0}{z} = \frac{z'}{Hl}$$

onde

$$y_0 = \frac{z z'}{Hl}$$

O momento fletor, na viga sobre dois apoios, de mesmo vão que o arco sujeito à carga P situada à distância z do apoio A, na secção distante z do apoio A é $M = P \frac{z z'}{l}$.

Fazendo $P = 1$ vem

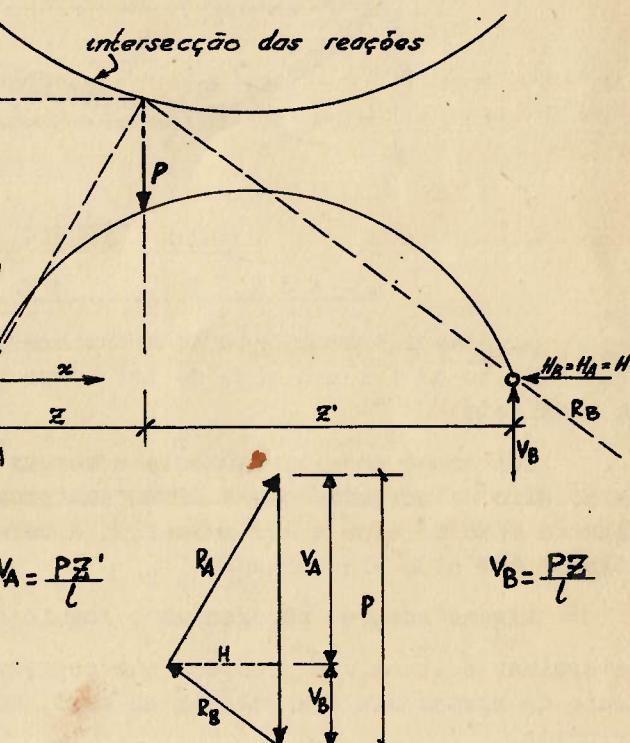


Figura 16

$$M = \frac{z z'}{l}$$

A carga $P = 1$, situada nessa posição, produz no arco o empuxo H . Podemos afirmar, então, que

$$y_0 = \frac{M}{H} = \frac{z z'}{H \ell}$$

é a relação entre o momento fletor, na viga de mesmo vão que o arco, na secção onde se aplica a carga, e o empuxo H produzido no arco pelo mesmo carregamento.

Sabemos, portanto, traçar a linha de influência para H analiticamente, gráficamente, ou ainda utilizando a linha das intersecções das reações.

As linhas de influência para momentos nucleares apresentarão o seguinte aspecto:

$$M_s = M_s - H y_s$$

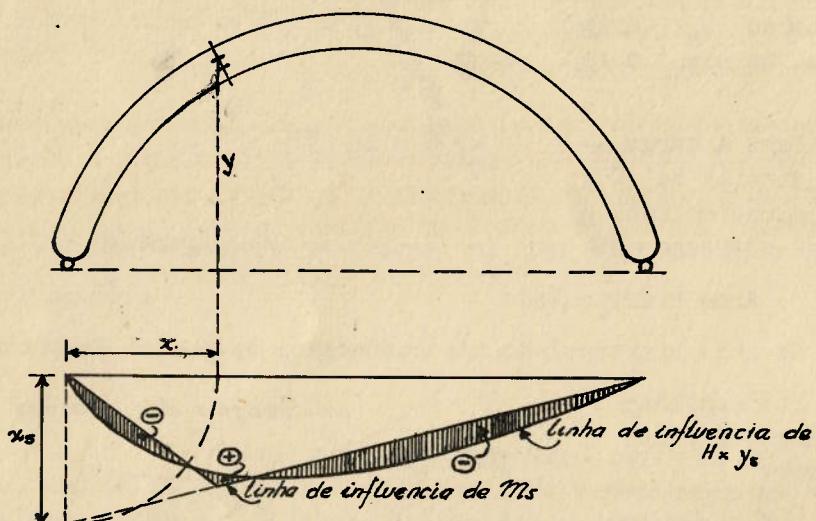


Figura 17

C - ESTUDO DO PROJETO

No dimensionamento de um arco, nas grandes construções, impõe-se, em geral, a condição de fixar o eixo de tal forma que os momentos fletores sejam os menores possíveis.

Nos arcos sujeitos sómente a cargas permanentes, a escolha do eixo é imediata; eixo coincidente com a linha das pressões do carregamento dado. Para a escolha do eixo do arco a ser submetido a cargas permanentes e móveis, várias orientações têm sido preconizadas.

Alguns autores recomendam o seguinte procedimento.

- Determinar a linha das pressões que corresponde ao peso próprio e ao carregamento de apenas uma das metades do arco, com a carga móvel uniformemente distribuída.
- Determinar a linha das pressões que corresponde ao peso próprio e ao carregamento da outra metade do arco com a carga móvel uniformemente distribuída.
- Adotar para eixo do arco a curva média das obtidas de acordo com os itens anteriores.

A maior parte dos autores modernos, tendo em vista as diversas objeções que se levantam a êsses critérios para a escolha do eixo do arco e admitindo mesmo que, dos vários critérios, o acima citado seja o mais defensável, recomendam, por uma questão de facilidade dos cálculos, a seguinte orientação:

- Adotar, inicialmente, uma lei simples para a variação da altura ou do momento de inércia, das secções transversais.
- Adotar, na fase de ante-projeto, uma parábola por exemplo do segundo ou quarto grau, para eixo do arco.
- Com essas hipóteses, fazer um cálculo rápido de algumas secções; para isso podem ser utilizadas as diversas tabelas já calculadas e que se encontram nas publicações referentes ao assunto.

Com esses elementos pode-se fixar, com maior exatidão, as secções transversais da estrutura e, portanto, a lei de variação de seu peso próprio; finalmente

- Adotar para eixo do arco a linha de pressões correspondente ao peso próprio, ou ao peso próprio acrescido de uma certa parcela da carga móvel transformada em carregamento uniforme.

Depois disso, um cálculo de verificação, com o traçado das linhas de influência, poderá sugerir algumas modificações, em geral pequenas, quer nas dimensões das secções transversais, quer no eixo do arco.

Convém observar ainda, um procedimento na colocação dos pendurais, devido a Nielsen que permite diminuir as ordenadas das linhas de influência (fig. 18), pois qualquer carga que atue sobre o tabuleiro será aplicada ao arco em três pontos no máximo, e em dois pontos no mínimo.

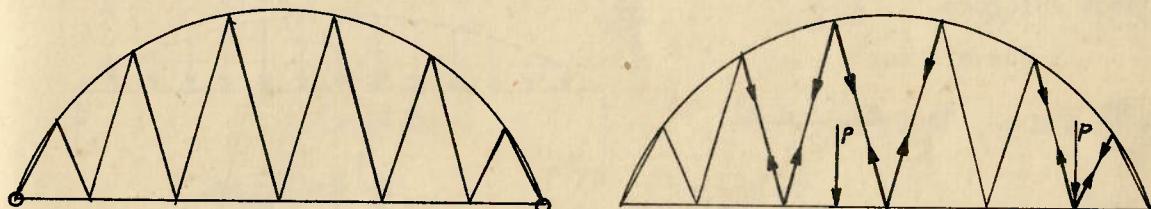


Figura 18

D - EXERCÍCIOS

- Determinar, para o arco parabólico da figura 19, o momento fletor na secção genérica para a carga uniformemente distribuída g , e a linha de influência de H .

Equação do eixo do arco:

$$y = 4 f x \frac{l - x}{l^2} \quad (\text{parábola})$$

Variação de J

$$J = \frac{1}{c \cos \alpha} \quad \therefore \quad J \cos \alpha = \frac{1}{c}$$

$$j = \frac{V}{J \cos \alpha} = c \cdot y \quad \mathfrak{D} = 0$$

$$m = \frac{g \cdot x (l - x)}{2}$$

$$H = \frac{\int m_j dx}{\int y j dx} = \frac{\frac{4 f c g}{2 l^2} \int x^2 (l - x)^2 dx}{\frac{16 f^2 c}{l^4} \int x^2 (l - x)^2 dx} = \frac{g l^2}{8 f}$$

No arco triarticulado, o empuxo H é dado por:

$$H = \frac{m_c}{f}$$

e como

$$m_c = \frac{g l^2}{8}$$

vem

$$H = \frac{g l^2}{8 f}$$

que coincide com o obtido para o arco biarticulado em questão.

Isto se explica facilmente se considerarmos que a linha das pressões para a carga uniformemente distribuída é parabólica, e como o eixo do arco também é parabólico, resultará momento fletor nulo para qualquer secção; portanto, a retirada da articulação central do arco triarticulado não modificou em nada os seus esforços.

Com efeito:

$$M = M - H y, \quad m = \frac{g x (l-x)}{2},$$

$$H = \frac{g l^2}{8 f} \quad \text{e} \quad y = 4 f \frac{x(l-x)}{l^2}$$

$$M = \frac{g x (l-x)}{2}$$

$$- \frac{g l^2}{8 f} \cdot \frac{4 f}{l^2} \cdot x (l-x) \equiv 0$$

Linha de influência de H

$$H = \frac{\int m_j dx}{\int y_j dx} = \frac{N^{or}}{D^{or}}$$

linha de intersecção das reações

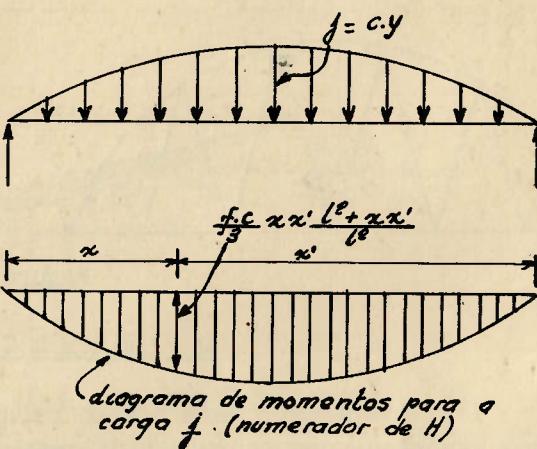
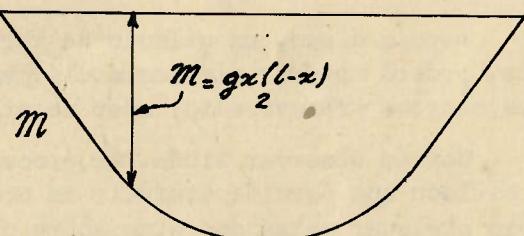
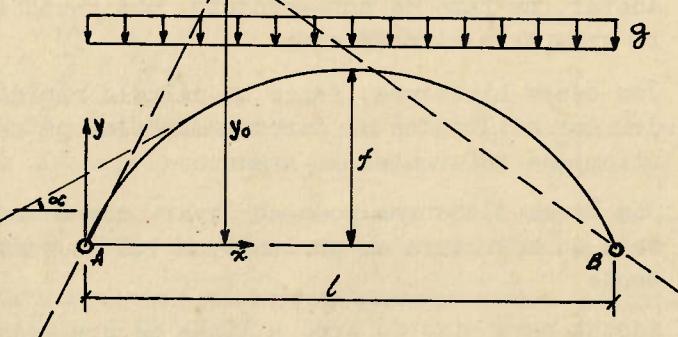


Figura 19

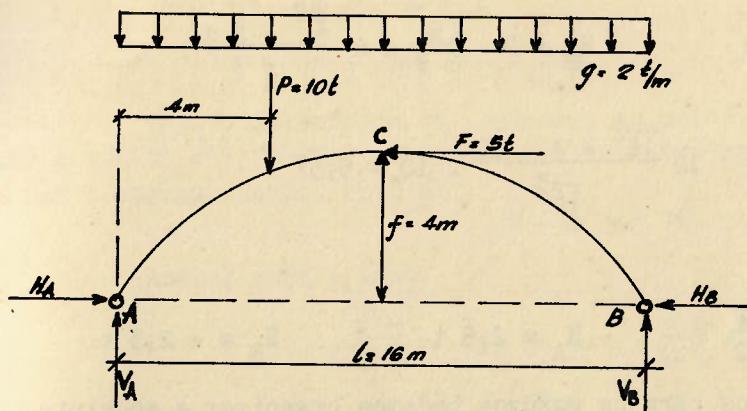
$$\int y_j dx = D^{or} = \frac{8}{15} f^2 \cdot l \cdot c.$$

$$\int m_j dx = N^{or} = \frac{f c}{3} x x' \frac{l^2 + x x'}{l^2}$$

$$H_{infl} = \frac{f c}{3} x x' \frac{l^2 + x x'}{l^2} \cdot \frac{15}{8 f^2 c \cdot l} = \frac{5}{8 f} x x' \frac{l^2 + x x'}{l^3}$$

$$y_o = \frac{x x'}{H \cdot l} = \frac{8 f l^2}{5 (l^2 + x x')} \quad (\text{hipérbole cúbica})$$

2º) Determinar os esforços no fecho do arco parabólico com $f = 4m$, $l = 16 m$ e $J = 1/c \cos \alpha$, sujeito ao carregamento indicado na figura 20.



$$H = \frac{\int m_j \, dx}{\int y_j \, dx} = \frac{N_{\text{or}}}{\frac{8}{15} f^2 \cdot l.c}$$

Figura 20

Cálculo do N^{or} de H para a carga F atuando isoladamente (figura 21).

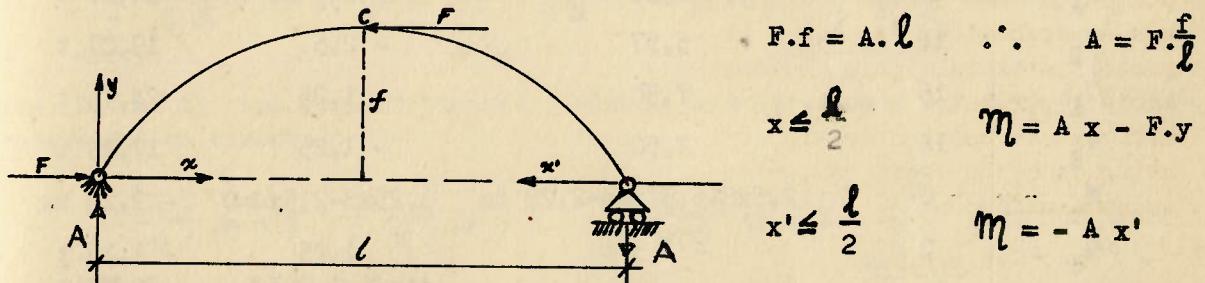


Figura 21

$$\begin{aligned}
 N^{or} &= \int_0^l \vec{m} \cdot \vec{j} \, dx = \int_0^{l/2} \vec{m} \cdot \vec{j} \, dx + \int_0^{l/2} \vec{m} \cdot \vec{j} \, dx' = \\
 &= \int_0^{l/2} A \cdot x \cdot j \, dx - \int_0^{l/2} F \cdot y \cdot j \, dx + \int_0^{l/2} -A \cdot x' \cdot j \, dx' \\
 N^{or} &= -F \int_0^{l/2} y \cdot j \, dx
 \end{aligned}$$

Cálculo de H para a carga F :

$$H_{B_F} = \frac{N^{or}}{\int_0^L y j \, dx} = \frac{-F}{2 \int_0^{L/2} y j \, dx} = -\frac{F}{2}$$

Cálculo numérico dos empuxos:

a) carga uniforme g

$$H_g = \frac{g f^2}{8 f} = \frac{2 \times 256}{8 \times 4} = 16 \text{ t}$$

b) carga $P = 10$ t

$$x = 4 \text{ m} \quad x' = 12 \text{ m} \quad H_P = P \cdot \frac{5}{8f} x x' \cdot \frac{\ell^2 + x x'}{\ell^3}$$

$$H_P = \frac{5}{8 \cdot 4} 4 \cdot 12 \cdot \frac{\frac{16^2}{16^3} + 4 \cdot 12}{16^3} \cdot 10 = 5,57 \text{ t}$$

c) carga $F = 5$ t

$$H_A = \frac{F}{2} \quad H_B = -\frac{F}{2} \quad H_A = 2,5 \text{ t} \quad H_B = -2,5 \text{ t}$$

Com os valores obtidos para os empuxos podemos organizar a seguinte tabela (unidades, t e m).

Esforço	$g = 2 \text{ t/m}$	Efeito de		Total
		$P = 10 \text{ t}$	$F = 5 \text{ t}$	
H_A	16 t	5,57 t	2,5	24,07 t
H_B	16	5,57	-2,5	19,07 t
V_A	16	7,50	1,25	24,75 t
V_B	16	2,50	-1,25	17,25 t
M_C	0	$2,5 \times 8 - 5,57 \times 4 = -2,28 \text{ tm}$	$1,25 \times 8 - 2,5 \times 4 = 0$	-2,28 tm
Q_C	0	-2,5 t	1,25	-1,25 t
N_C	16	5,57	dir. -2,5 esq. +2,5	19,07 t 24,07 t

E - ARCO ATIRANTADO

O arco atirantado é uma estrutura externamente isostática e internamente hiperestática; é de grau de hiperestaticidade um, e resulta de uma viga curva na qual se introduz um tirante (fig. 22).

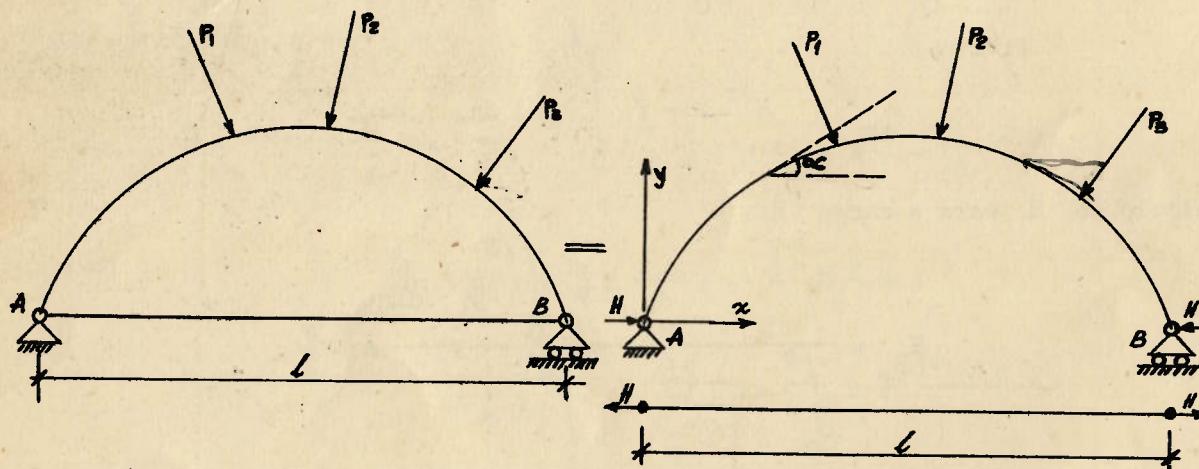


Figura 22

Se considerarmos como incógnita hiperestática a força H que aparece no tirante pela aplicação dos esforços externos, podemos escrever, de maneira análoga ao caso do arco biarticulado:

$$\begin{aligned}
 M &= M - H y \\
 \text{arco} \quad N &= N + H \cos \alpha & \text{tirante} \quad N &= H \\
 Q &= Q - H \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Para o cálculo de H podemos, na maioria dos casos da prática, desprezar o efeito das fôrças cortantes, e considerar na expressão da fôrça normal, apenas o segundo termo, isto é:

$$N \approx H \cos \alpha$$

Assim, para o arco

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial H} = \cos \alpha$$

e para o tirante

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1.$$

Aplicando a equação de Fontvielant vem:

$$\int_{\text{arco}} \frac{M - H y}{E J} (-y) ds + \int_{\text{arco}} \frac{H \cos \alpha}{E S} \cos \alpha ds + \int_{\text{tirante}} \frac{H}{E_t S_t} \cdot 1 \cdot ds = 0$$

onde E_t e S_t são respectivamente o módulo de elasticidade e a área da seção transversal do tirante.

$$- \int_{\text{arco}} \frac{M y}{E J} ds + H \int_{\text{arco}} \frac{y^2}{E J} ds + H \int_{\text{arco}} \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds + H \int_{\text{tirante}} \frac{1}{E_t S_t} ds = 0$$

$$H \left[\int_{\text{arco}} \frac{y^2}{E J} ds + \int_{\text{arco}} \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds + \frac{l}{E_t S_t} \right] = \int_{\text{arco}} \frac{M y}{E J} ds$$

$$H = \frac{\int \frac{M \cdot y}{E J} ds}{\int \frac{y^2}{E J} ds + \int \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds + \frac{l}{E_t S_t}}$$

Fazendo

$$j = \frac{y}{J \cos \alpha} \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{\int \frac{\cos^2 \alpha}{E S} ds}{\int \frac{y^2}{E J} ds}$$

e por ser E em geral constante ao longo do arco, vem finalmente:

$$H = \frac{\int_0^l M \cdot j \cdot dx}{(1 + \vartheta) \int_0^l j \cdot y \cdot dx + \frac{E \cdot l}{E_t S_t}}$$

F - ARCO ENGASTADO

1) Estrutura isostática fundamental

Considere-se o arco engastado da fig. 23 submetido a um sistema qualquer de esforços atuando no plano em que está contido o seu eixo.

A eliminação de um dos engastamentos, com a decorrente supressão de três vínculos, transforma a estrutura hiperestática em viga curva em balanço. Trata-se, portanto, de uma estrutura três vezes hiperestática.

Para determinar as três incógnitas hiperestáticas, considere-se como estrutura isostática fundamental, a viga em balanço ABG da figura 23b. Tal viga é a que resulta do arco engastado quando se suprime o engastamento B e se liga a essa extremidade uma barra qualquer, de rigidez infinita, GB. A razão pela qual se escolhe normalmente essa estrutura isostática como fundamental será apresentada a seguir.

Com origem em G, considere-se dois eixos quaisquer, G_x e G_y , normais entre si (pela hipótese feita, de GB ser qualquer, o ponto G é um ponto qualquer do plano da estrutura). Considere-se então, como incógnitas hiperestáticas do arco engastado, os esforços H_o , V_o e M_o aplicados em G (fig. 23b). Seus valores deverão ser tais que tornem mínimo o trabalho armazenado na estrutura; como a barra GB tem por hipótese rigidez infinita, não armazena trabalho ($EJ=\infty$) e os valores de H_o , V_o e M_o que tornam mínimo o trabalho armazenado em ABG são os mesmos que tornam mínimo o trabalho armazenado no arco AB.

Os esforços solicitantes no arco são:

$$M = \bar{M} + M_o - H_o y - V_o x$$

$$N = \bar{N} + H_o \cos \alpha - V_o \sin \alpha \quad (\text{compressão +})$$

$$Q = \bar{Q} - H_o \sin \alpha - V_o \cos \alpha$$

Para o cálculo das incógnitas hiperestáticas podemos desprezar o efeito das forças cortantes e considerar $N = H_o \cos \alpha$.

Assim

$$M = \bar{M} + M_o - H_o y - V_o x$$

$$N = H_o \cos \alpha$$

teremos portanto os seguintes valores para $\frac{\partial M}{\partial M_o}$, $\frac{\partial M}{\partial H_o}$, $\frac{\partial M}{\partial V_o}$ e $\frac{\partial N}{\partial H_o}$ -:

$$\frac{\partial M}{\partial M_o} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial H_o} = -y$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_o} = -x$$

$$\frac{\partial N}{\partial M_o} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial H_o} = \cos \alpha$$

$$\frac{\partial N}{\partial V_o} = 0$$

Aplicando a equação de Fontvielant, isto é,

$$\int \frac{M \bar{M}}{E J} ds + \int \frac{N \bar{N}}{E S} ds = 0$$

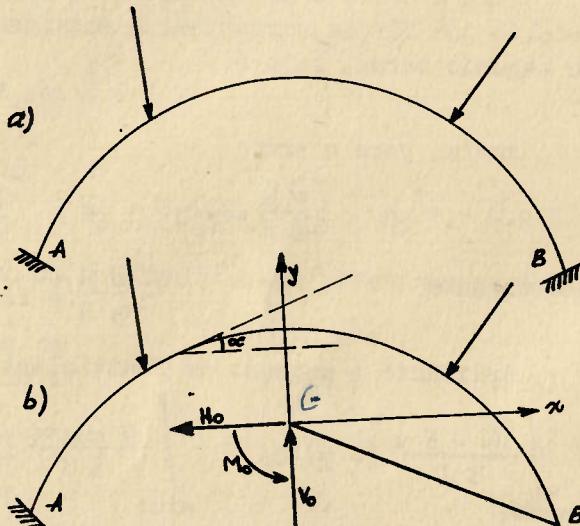


Figura 23

vem ($E = \text{const.}$):

$$1) \int (M_o + m_o - H_o y - V_o x) \cdot 1 \frac{ds}{J} = 0$$

$$2) \int (M_o + m_o - H_o y - V_o x)(-y) \frac{ds}{J} + \int \frac{H_o \cos \alpha (\cos \alpha)}{s} ds = 0$$

$$3) \int (M_o + m_o - H_o y - V_o x)(-x) \frac{ds}{J} = 0$$

Desenvolvendo as integrais, vem:

$$\begin{aligned} M_o \int \frac{ds}{J} - H_o \int y \frac{ds}{J} - V_o \int x \frac{ds}{J} &= - \int m_o \frac{ds}{J} \\ - M_o \int y \frac{ds}{J} + H_o \left[\int y^2 \frac{ds}{J} + \int \frac{\cos^2 \alpha}{s} ds \right] + V_o \int x y \frac{ds}{J} &= \int m_o y \frac{ds}{J} \\ - M_o \int x \frac{ds}{J} + H_o \int x y \frac{ds}{J} + V_o \int x^2 \frac{ds}{J} &= \int m_o x \frac{ds}{J} \end{aligned}$$

O ponto G da figura 23 é arbitrário, bem como os eixos Gx e Gy .

Para facilitar os cálculos, visando diminuir o número de integrais a calcular, podemos tomar o ponto G de tal modo que

$$\int x \left(\frac{ds}{J} \right) = 0 \quad \int y \left(\frac{ds}{J} \right) = 0,$$

e orientar Gx e Gy de modo a obter

$$\int x y \frac{ds}{J} = 0.$$

Lembrando que

$$\int x \frac{ds}{J} \quad \text{e} \quad \int y \frac{ds}{J}$$

são momentos estáticos de $\frac{ds}{J} = d\gamma$ (pêso elástico) relativos aos eixos Gx e Gy , e

$$\int x y \frac{ds}{J}$$

é o momento centrífugo, segue-se que, na escolha feita, G é o centro de gravidade e Gx e Gy os eixos centrais de inércia, dos pesos elásticos.

Assim

$$M_o = \frac{- \int m_o \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} = - \frac{\int m_o d\gamma}{\int d\gamma}$$

$$H_o = \frac{\int m_o y \frac{ds}{J}}{\int y^2 \frac{ds}{J} + \int \frac{\cos^2 \alpha}{s} ds} = \frac{\int m_o y d\gamma}{(1 + \gamma) \int y^2 d\gamma}$$

$$V_o = \frac{\int m_o x \frac{ds}{J}}{\int x^2 \frac{ds}{J}} = \frac{\int m_o x d\gamma}{\int x^2 d\gamma}$$

Conhecidos êsses valores, basta transportar o sistema de esforços M_o , H_o e V_o para o ponto B, para obter os esforços solicitantes no engastamento do arco.

Assim, (x_B e y_B as coordenadas do ponto B):

$$H_B = H_o$$

$$V_B = V_o$$

$$M_B = M_o - H_o y_B - V_o x_B$$

As três condições

$$\int x \, d\gamma = 0 \quad \int y \, d\gamma = 0 \quad \text{e} \quad \int x y \, d\gamma = 0$$

permitem, então, determinar o ponto G e a direção dos eixos Gx , e Gy normal a Gx .

Quando o arco é simétrico, o eixo Gy coincide com o eixo de simetria da estrutura e é necessário determinar, apenas, uma coordenada do ponto G, visto que êsse ponto está situado sobre o eixo de simetria.

Observe-se, também, que o momento fletor numa secção qualquer do arco é:

$$M = M + M_o - H_o y - V_o x .$$

Mas

$$M_B = M_o - H_o y_B - V_o x_B \quad \therefore \quad M_o = M_B + H_o y_B + V_o x_B$$

Portanto

$$M = M + M_B + H_o y_B + V_o x_B - H_o y - V_o x ,$$

isto é,

$$M = M' - H_o (y - y_B)$$

onde

$$M' = M + M_B + V_o (x_B - x) , \quad \text{não depende de } y .$$

Daí se conclui que M' é o momento fletor na secção de abscissa $x' = x_B - x$ de uma viga engastada nas duas extremidades, de mesmo vão que o do arco engastado, com momento de inércia variável de acordo com a mesma lei de variação de $J \cos \alpha = f(x)$, do arco considerado, e com carregamento análogo ao do arco.

2) Influência da temperatura e do recalque de apoio

A aplicação da equação de Fontvielant com segundo membro nulo (equações 1, 2 e 3), no caso anterior foi correta, pois sendo B engastamento perfeito e GB barra de rigidez infinita, os deslocamentos de G, angulares e lineares segundo as direções Gx e Gy , serão todos nulos.

Suponha-se, porém, que o arco engastado tenha sofrido recalques no apoio B (angular e lineares) e seja também submetido ao acréscimo de temperatura Δt .

Chamando de α o coeficiente de dilatação do material do arco, o acréscimo de temperatura Δt produz em B (e portanto também em G), os deslocamentos lineares (fig. 24)

$$u_1 = \alpha \cdot \Delta t \cdot l$$

$$v_1 = -\alpha \cdot \Delta t \cdot f$$

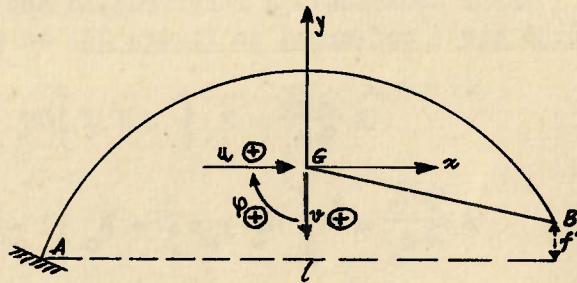
Quanto aos recalques de apoio pode-se considerar a possibilidade de uma rotação do apoio B e de recalques horizontais e verticais, cuja resultante poderá ser decomposta segundo as direções de G_x e G_y .

De acordo com o que se indica na figura 26, o deslocamento angular θ do apoio B se transmite integralmente ao ponto G mas produz, ainda, deslocamento linear nesse ponto.

Os deslocamentos do ponto G, devidos a θ , segundo as direções G_x e G_y , são:

$$u_\theta = \overline{GM} = \overline{GG'} \operatorname{sen} \beta$$

$$v_\theta = -\overline{G'M} = -\overline{GG'} \operatorname{cos} \beta$$



(convenção de sinais - deslocamentos positivos quando contrários aos esforços H_0 , V_0 e M_0)

Figura 24

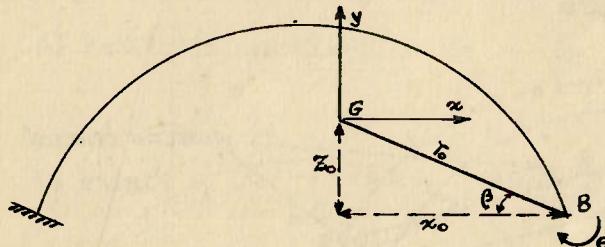
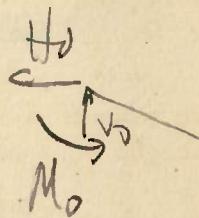


Figura 25

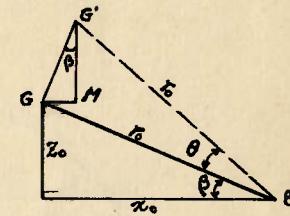


Figura 26

$$\overline{GG'} = r_0 \theta$$

$$x_0 = r_0 \cos \beta$$

$$z_0 = r_0 \operatorname{sen} \beta$$

onde:

$$u_\theta = r_0 \theta \operatorname{sen} \beta = z_0 \theta$$

$$v_\theta = -r_0 \theta \cos \beta = -x_0 \theta$$

Pode-se admitir, ainda, a possibilidade de um deslocamento do apoio B, paralelamente a G_x , e de um recalque na direção G_y , respectivamente Δ_u e Δ_v , que se transmitem integralmente ao ponto G.

Vejamos os efeitos, isoladamente, para os três casos apresentados, dos movimentos do ponto G.

Estudaremos esses efeitos, considerando a estrutura sem carregamento externo.

Lembraremos que as equações 1, 2 e 3, no caso de recalques de apoio, ex primem

$$\frac{\partial \zeta}{\partial M_0} = \theta$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial H_0} = u$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial V_0} = v$$

onde θ , u e v são os deslocamentos (angulares e lineares) do ponto G na direção e sentido do respectivo esforço.

Essas equações, já referidas ao centro de gravidade dos pesos elásticos e de acordo com a convenção da figura 24, se escrevem:

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial M_0} = M_0 \int d\gamma + \int m d\gamma = -\varphi E$$

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial H_0} = - \int m \cdot y d\gamma + H_0 (1 + \delta) \int y^2 d\gamma = -u E$$

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial V_0} = - \int m \cdot x d\gamma + V_0 \int x^2 d\gamma = -v E$$

Como estamos admitindo o arco descarregado, $m = 0$.

Assim, finalmente, obtem-se:

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial M_0} = M_0 \int d\gamma = -\varphi E$$

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial H_0} = H_0 (1 + \delta) \int y^2 d\gamma = -u E$$

$$E \frac{\partial \zeta}{\partial V_0} = V_0 \int x^2 d\gamma = -v E$$

a) Variação de temperatura

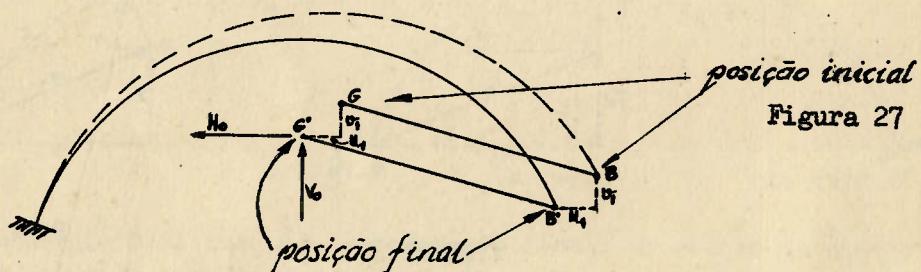


Figura 27

$$\text{Em } G \quad \varphi = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \zeta}{\partial M_0} = 0 \quad \text{onde} \quad M_0 = 0$$

$$\text{Em } G \quad u = -\alpha \cdot \Delta t \cdot l \quad (H_0 \text{ desloca } G \text{ para } G'; u \text{ tem o mesmo sentido de } H_0: \text{ figura 27})$$

$$H_0 (1 + \delta) \int y^2 d\gamma = \alpha \cdot \Delta t \cdot l \cdot E \quad H_0 = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot l \cdot E}{(1 + \delta) \int y^2 d\gamma}$$

$$\text{Em } G \quad v = \alpha \cdot \Delta t \cdot f' \quad (V_0 \text{ desloca } G \text{ para } G'; v \text{ tem sentido contrário ao de } V_0: \text{ figura 27})$$

$$V_0 \int x^2 d\gamma = -\alpha \cdot \Delta t \cdot f' \cdot E \quad \therefore \quad V_0 = \frac{-\alpha \cdot \Delta t \cdot f' \cdot E}{\int x^2 d\gamma}$$

b) rotação no apoio B

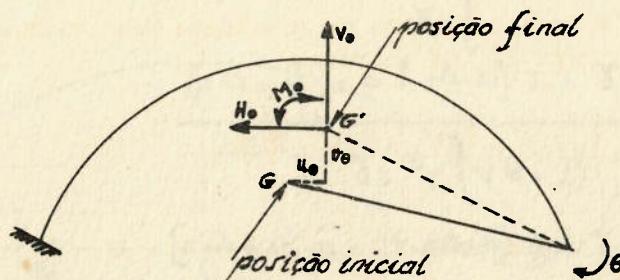


Figura 28

Em G $\varphi = \theta$ (sentido contrário ao de M_o : figura 28)
 $u_\theta = z_o \theta$ (sentido contrário ao de H_o : figura 28)
 $v_\theta = -x_o \theta$ (mesmo sentido de V_o : figura 28)

onde

$$M_o \int d\gamma = -E\theta \quad \therefore \quad M_o = -\frac{E\theta}{\int d\gamma}$$

$$H_o (1+\vartheta) \int y^2 d\gamma = -z_o \theta E \quad \therefore \quad H_o = -\frac{E z_o \theta}{(1+\vartheta) \int y^2 d\gamma}$$

$$V_o \int x^2 d\gamma = x_o \theta E \quad \therefore \quad V_o = \frac{E x_o \theta}{\int x^2 d\gamma}$$

c) Recalques nas direções G_x e G_y

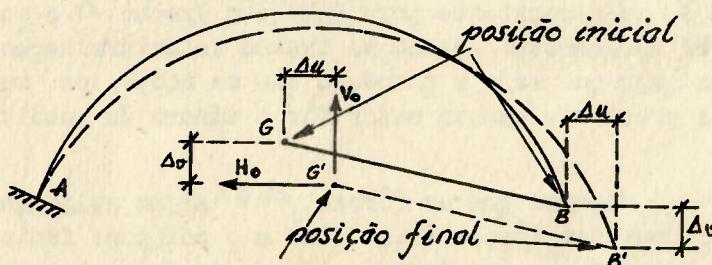


Figura 29

Em G $\varphi = 0$
 $u = \Delta u$ (sentido contrário ao de H_o : figura 29)
 $v = \Delta v$ (sentido contrário ao de V_o : figura 29)

onde

$$M_o \int d\gamma = 0 \quad \therefore \quad M_o = 0$$

$$H_o (1+\vartheta) \int y^2 d\gamma = -\Delta u \cdot E \quad \therefore \quad H_o = -\frac{E \cdot \Delta u}{(1+\vartheta) \int y^2 d\gamma}$$

$$V_o \int x^2 d\gamma = -\Delta v \cdot E \quad \therefore \quad V_o = -\frac{E \cdot \Delta v}{\int x^2 d\gamma}$$

d) fórmulas finais, levando em conta o carregamento, variação de temperatura, rotação no apoio B e recalques nas direções G_x e G_y .

$$M_o = - \frac{\int m \cdot d\gamma + E \theta}{\int d\gamma}$$

$$H_o = \frac{\int m \cdot y \cdot d\gamma + E [\alpha \cdot \Delta t \cdot l - z_o \theta - \Delta u]}{(1 + \nu) \int y^2 d\gamma}$$

$$V_o = \frac{\int m \cdot x \cdot d\gamma - E [\alpha \cdot \Delta t \cdot f - x_o \theta + \Delta v]}{\int x^2 d\gamma}$$

3) Processo Gráfico

Como vimos, as expressões de M_o , H_o e V_o são:

$$M_o = \frac{- \int m \cdot d\gamma}{\int d\gamma} \quad H_o = \frac{\int m \cdot y \cdot d\gamma}{(1 + \nu) \int y^2 d\gamma} \quad V_o = \frac{\int m \cdot x \cdot d\gamma}{\int x^2 d\gamma}$$

O processo gráfico consiste, em última análise, na resolução aproximada das integrais das expressões de M_o , H_o e V_o .

a) Determinação do centro de gravidade dos pesos elásticos

Para determinar G , dividamos o arco em vários trechos Δs , no centro de gravidade dos quais aplicaremos a força (peso elástico a menos da constante E)

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta s}{J} = \frac{\Delta x}{J \cos \alpha}$$

Essa divisão do arco pode ser feita de tal forma que Δx seja constante, ou de tal forma que $\Delta \gamma$ seja constante para qualquer trecho Δs considerado (processo de Schönhofen apresentado quando se tratou da determinação gráfica da linha elástica). Qualquer que seja o processo que se adote, os resultados finais serão tanto mais precisos, quanto maior for o número de subdivisões consideradas.

Para determinar y_o supomos que as forças $\Delta \gamma$ sejam aplicadas horizontalmente; traçamos o polígono das forças (fig. 30a) e o polígono funicular correspondente (fig. 30b). A intersecção dos lados extremos do funicular determina o ponto G e consequentemente y_o .

Repetindo a construção (figs. 30c e 30d) para os pesos elásticos aplicados verticalmente, obteríamos, no caso geral, a posição do ponto G (intersecção das duas linhas de ação das resultantes dos pesos elásticos aplicados horizontal e verticalmente).

No caso do arco simétrico é suficiente, para determinar o ponto G , o traçado do funicular da figura 30b. Nesse caso os eixos Gx e Gy , resultam imediatamente determinados, pois um eixo de simetria é sempre um eixo central de inércia; se o arco não fosse simétrico, depois de determinado o ponto G , seria necessário determinar as direções dos eixos centrais, de inércia dos pesos elásticos para definir os eixos Gx e Gy .

b) Determinação das incógnitas hiperestáticas

Nas expressões de H_o , V_o e M_o , M é o momento fletor produzido numa secção qualquer da viga em balanço, pelo sistema de cargas que age sobre o arco: calculemos para cada trecho Δs do arco, o valor correspondente de $M \cdot \Delta \gamma$. A somatória dos $M \cdot \Delta \gamma$ é o numerador de M_o ; o momento estático das forças $m \cdot \Delta \gamma$

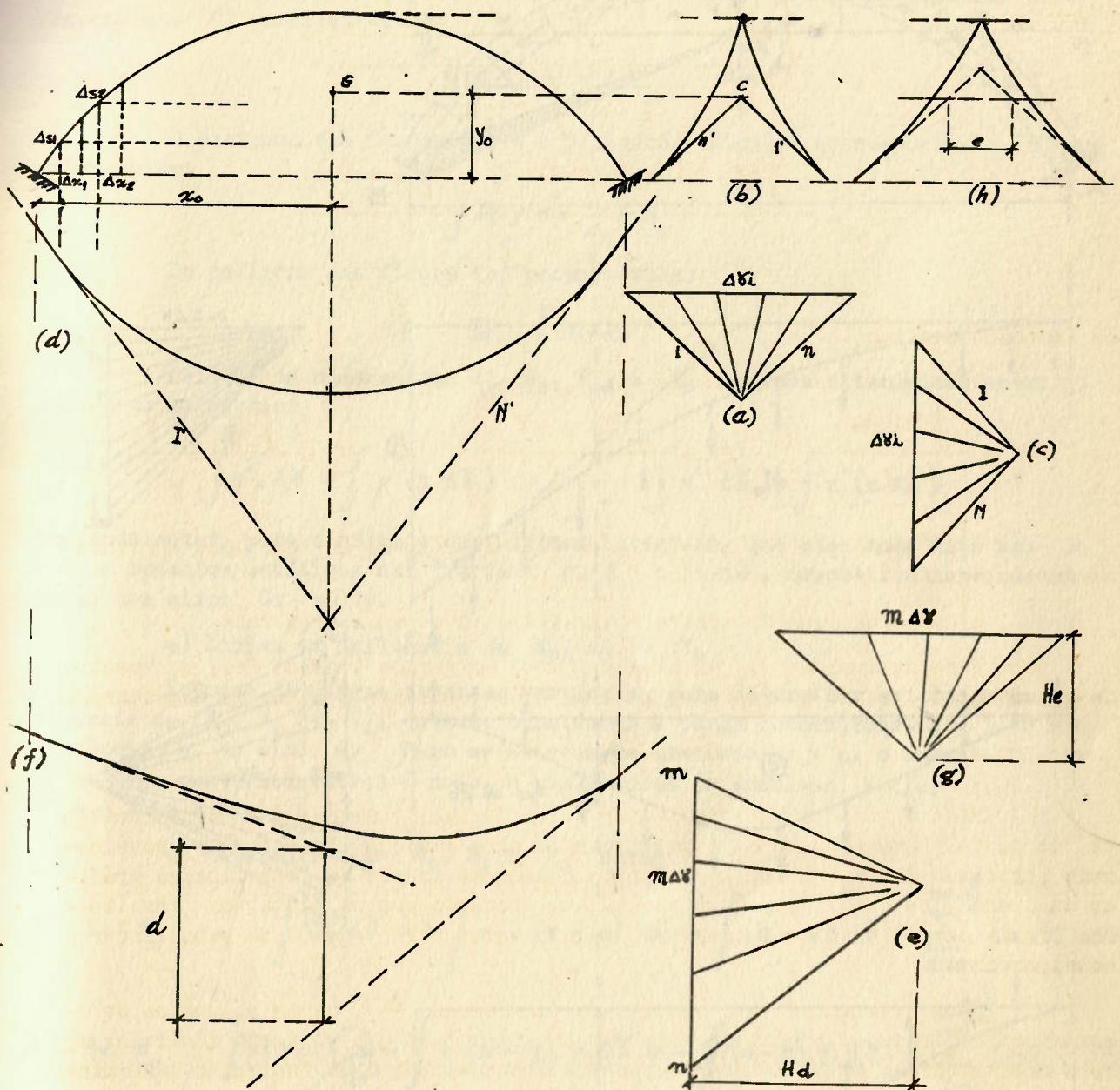


Figura 30

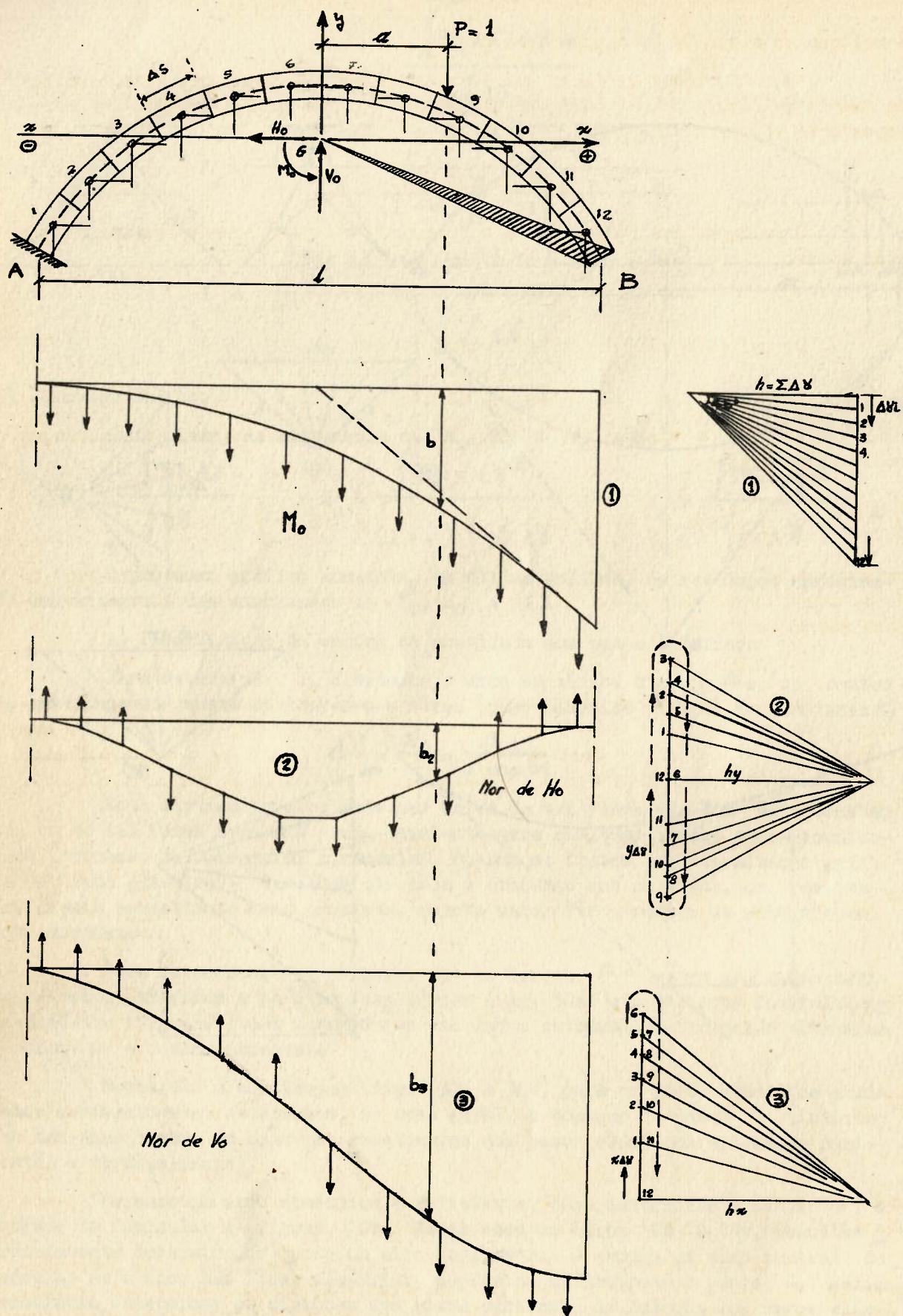


Figura 31

em relação ao eixo Gy é o numerador de V_0 .

As construções gráficas que permitem obter esses valores estão indicadas também na figura 30. O polígono das forças (e) e o polígono funicular correspondente (f) permitem obter:

$$\int M \cdot x \cdot d\gamma \approx d \cdot H_d$$

O polígono das forças (g) e o polígono funicular correspondente (h) permitem obter:

$$\int M \cdot y \cdot d\gamma \approx e \cdot H_e$$

Do polígono das forças (e) podemos tirar:

$$\bar{m} = \int m \cdot d\gamma$$

Obtidos os numeradores de H_0 , V_0 e M_0 podemos obter, pelo mesmo processo, as integrais:

$$\int d\gamma \quad \int y^2 \cdot d\gamma = \int y \cdot (y \cdot d\gamma) \quad \text{e} \quad \int x^2 \cdot d\gamma = \int x \cdot (x \cdot d\gamma)$$

bastando notar, para o cálculo das últimas integrais, que elas nada mais são do que os momentos estáticos das "forças" $y \cdot d\gamma$ e $x \cdot d\gamma$, respectivamente, em relação aos eixos Gx e Gy .

c) Linhas de influência de M_0 , H_0 e V_0

No caso de cargas externas verticais, para determinar as linhas de influência de M_0 , H_0 e V_0 , deve-se considerar a carga concentrada $P = 1$ e sua distância a ao eixo Gy. Para as secções de abscissa $x > a$, o momento fletor M na viga curva isostática é nulo, e nas secções de abscissa $x < a$, $M = -1(a - x)$.

Os numeradores de M_0 , H_0 e V_0 serão:

$$\text{N}^{\text{or}} \text{ de } M_0 \quad - \int M \cdot d\gamma = - \int -1(a - x) d\gamma = \int (a - x) d\gamma = \sum_{x=a}^{\frac{l}{2}} (a - x) \cdot \Delta \gamma$$

$$\text{N}^{\text{or}} \text{ de } H_0 \quad \int M \cdot y \cdot d\gamma = - \int 1(a - x) \cdot y \cdot d\gamma = - \int (a - x) \cdot y \cdot d\gamma = - \sum_{x=a}^{\frac{l}{2}} (a - x) (y \cdot \Delta \gamma)$$

$$\text{N}^{\text{or}} \text{ de } V_0 \quad \int M \cdot x \cdot d\gamma = - \int 1(a - x) x \cdot d\gamma = - \int (a - x) x \cdot d\gamma = - \sum_{x=a}^{\frac{l}{2}} (a - x) (x \cdot \Delta \gamma)$$

Na figura 31 se indica o cálculo gráfico das linhas de influência dos numeradores de M_0 , H_0 e V_0 , com auxílio dos polígonos funiculares dos "pesos elásticos" $\Delta \gamma$, $y \cdot \Delta \gamma$ e $x \cdot \Delta \gamma$ respectivamente.

Já que conhecemos o processo gráfico para a determinação dos denominadores de M_0 , H_0 e V_0 , e por serem os denominadores, independentes das cargas, o cálculo das linhas de influência de M_0 , H_0 e V_0 fica reduzido à determinação das linhas de influência de seus respectivos numeradores.

- 1) Linha de influência de M_0 - O polígono das forças 1 (figura 31) dos pesos elásticos $\Delta \gamma$, com distância polar $h = \sum \Delta \gamma$ se utiliza para o traçado do funicular 1, com o primeiro lado da esquerda horizontal.

Para a abscissa a da carga $P = 1$ se obtém:

$$- \sum M \cdot \Delta \gamma = \sum_a^{\ell/2} (a - x) \cdot \Delta \gamma = b \cdot h = b \cdot \sum \Delta \gamma$$

Portanto

$$M_o = \frac{- \sum M \cdot \Delta \gamma}{\sum \Delta \gamma} = \frac{b \sum \Delta \gamma}{\sum \Delta \gamma} = b$$

e conclui-se que o funicular 1 é a linha de influência de M_o , sendo suas ordenadas b , medidas na escala do desenho do arco.

2) Linha de influência do numerador de H_o - Com auxílio do polígono de "fôrças" 2 (figura 31), dos pesos $(y \cdot \Delta \gamma)$, que será fechado porque $\int y \cdot d\gamma = 0$, traça-se, partindo de A, o polígono no funicular 2, onde o primeiro e "o último" lado são horizontais.

O momento estático dos pesos elásticos $y \cdot \Delta \gamma$ situados à esquerda da carga, em relação à secção de abscissa a , é igual à ordenada b_2 do polígono funicular multiplicada, pela distância polar h_y . O numerador de H_o é portanto

$$\int M \cdot y \cdot d\gamma \approx - \sum_{x=a}^{\ell/2} (a - x)(y \cdot \Delta \gamma) = b_2 \cdot h_y,$$

sendo ainda positivo pois os primeiros "pesos elásticos" da esquerda são negativos ($y < 0$).

3) Linha de influência do numerador de V_o - O polígono de fôrças 3 (figura 31) dos pesos $(x \cdot \Delta \gamma)$, que também será fechado por ser $\int x \cdot d\gamma = 0$, se utiliza para o traçado do funicular 3 com o primeiro lado horizontal.

Aqui também foram tomados os pesos negativos orientados para cima e os positivos para baixo.

O numerador de V_o é portanto

$$\int M \cdot x \cdot d\gamma \approx - \sum_{x=a}^{\ell/2} (a - x)(x \cdot \Delta \gamma) = b_3 \cdot h_x,$$

sendo b_3 a ordenada do funicular 3 na vertical da linha de ação de $P = 1$.

Todas as ordenadas são, aqui também, positivas por serem negativos os primeiros pesos elásticos $(x \cdot \Delta \gamma)$ a partir da esquerda.

4) Linha de influência de momentos nucleares - Sendo x_s e y_s as coordenadas de um ponto nuclear qualquer, o momento em relação a esse ponto para uma carga concentrada $P = 1$ situada à distância a do eixo y será:

$$M_s = -1(a - x_s) + M_o - V_o x_s - H_o y_s,$$

onde os valores de M_o , V_o e H_o são tirados das linhas de influência apresentadas na figura 31.

Para os pontos nucleares situados à direita da carga $P = 1$, isto é, $x_s \geq a$, o termo $-1(a - x_s)$ não existe, e a expressão de M_s fica reduzida a

$$M_s = M_o - V_o x_s - H_o y_s$$

5) Linha de intersecção das reações - Para o caso dos arcos engastados podemos obter as reações R_A e R_B gráficamente com auxílio das curvas 1, 2 e 3 da figura 32; a vertical da carga P corta a curva 3 no ponto C. Pelo ponto C, traçamos tangentes às curvas 1 e 2, tan-

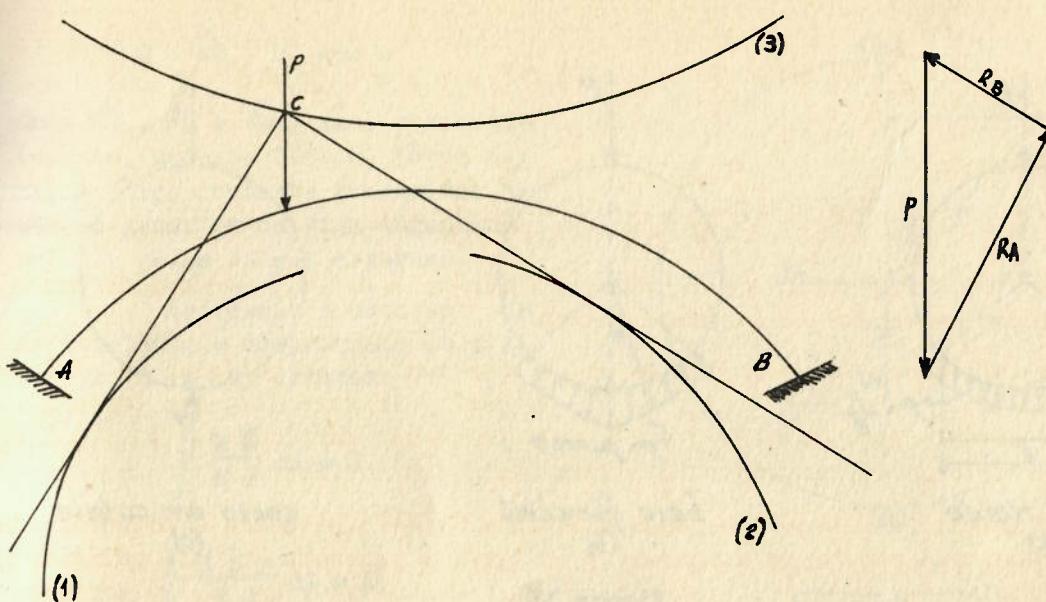


Figura 32

gentes essas que têm a direção de R_A e R_B respectivamente.

Essas curvas 1, 2 e 3 apresentam o inconveniente de serem de difícil determinação; além disso, ocasionam certa imprecisão no traçado das tangentes.

6) Linha de influência de momentos fletores - O procedimento para o seu cálculo é em tudo semelhante ao dos momentos nucleares.

A única diferença é que os momentos nucleares são tomados em relação aos pontos nucleares, ao passo que os momentos fletores são tomados em relação ao centro de gravidade da secção.

G - TUBOS DE PAREDE FINA

O cálculo estático de qualquer estrutura compreende três partes distintas, a saber:

- a) determinação dos esforços externos
- b) determinação dos esforços solicitantes
- c) determinação dos esforços resistentes.

a) Os esforços externos ativos, que podem atuar nos tubos colocados em valas, são:

- pressão de terra
- pressão interna do fluido
- sobrecarga na pressão da terra proveniente de veículos, etc.

Os esforços externos reativos têm sua distribuição de pressões dependente do tipo de berço onde assenta o tubo, e também das características elásticas do mesmo.

Distinguem-se dois tipos de berço:

- 1) rígido (figura 33a)
- 2) flexível (figura 33b).

Existe ainda outro tipo de apoio, usado em ensaios de laboratório, que é o apoio em cutelo (figura 33c).

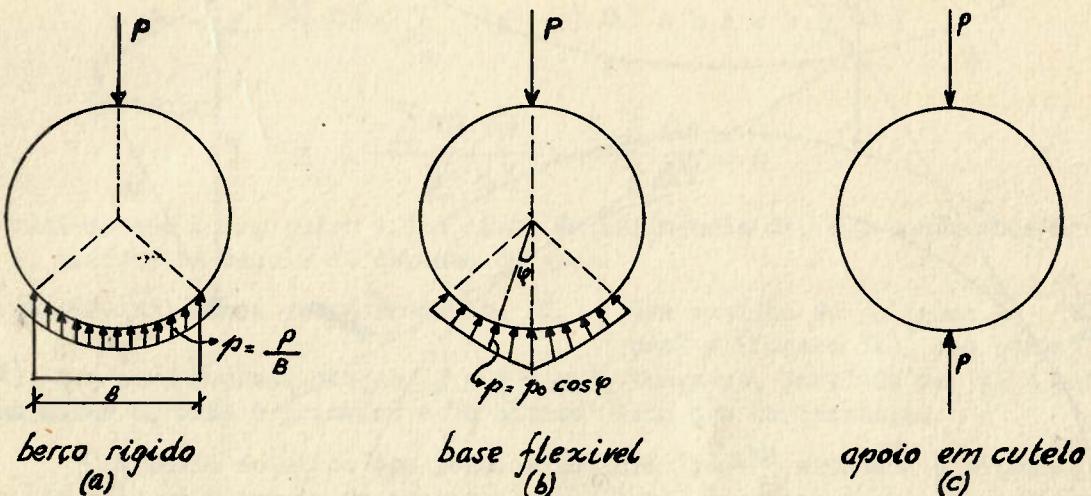


Figura 33

É de se notar, também, que o tipo de vala onde se coloca o tubo influencia na carga ativa que atua sobre o mesmo, devido à compactação do terreno.

Assim, na figura 34a, a compactação do terreno na vala alivia o tubo de uma parcela do peso de terra da vala, parcela essa devida ao atrito entre terra da vala e terra do maciço.

Na figura 34b, o efeito da compactação é contrário ao anterior, aumentando a carga sobre o tubo.

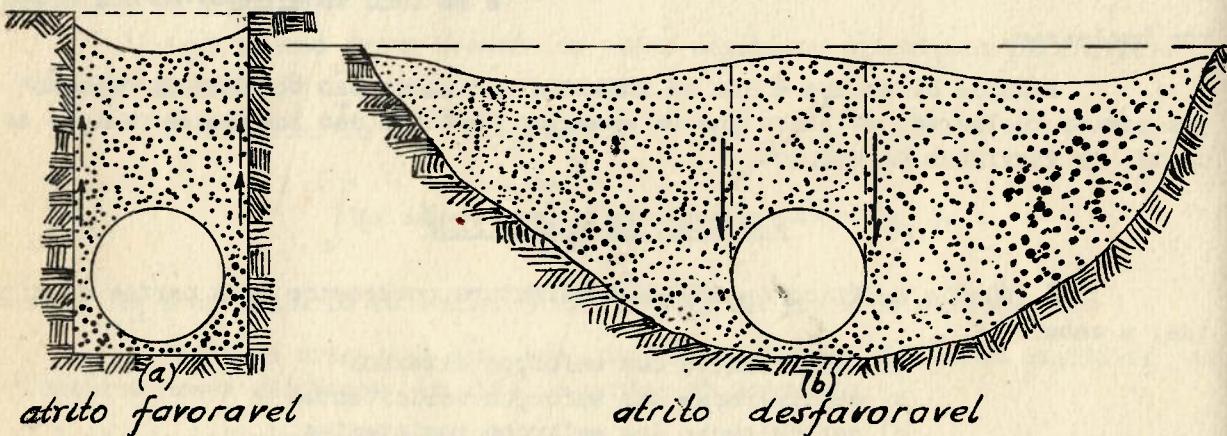


Figura 34

b) Conhecidos os esforços externos (ativos e reativos), calculam-se os esforços solicitantes com auxílio das fórmulas de arco engastado.

Se cortarmos o tubo em um ponto qualquer, engastando uma extremidade e ligando a outra, por meio de uma barra rígida, ao centro dos pesos elásticos, este coincidirá com o centro do círculo desde que o tubo tenha espessura constante (fig. 35a).

Aplicaremos em O , M_o , N_o e Q_o : no caso de carregamento simétrico, $Q_o = 0$ (fig. 35b). Estudaremos sómente o caso de carregamento simétrico.

Assim, os esforços numa secção qualquer definida pelo ângulo θ , serão:

$$M = M_o + M_o - N_o r \cos \theta$$

$$N = N_o + N_o \cos \theta$$

$$Q = Q_0 + N_0 \sin \theta$$

onde M , N e Q são, respectivamente, momento fletor, força normal e força cortante produzidos na secção genérica da viga engastada em A' , pelas cargas externas.

Aplicando a equação de Fontvielant, e desprezando os efeitos de N e Q , obtemos:

$$\int \frac{M \bar{M}}{E J} ds = 0 \quad \therefore$$

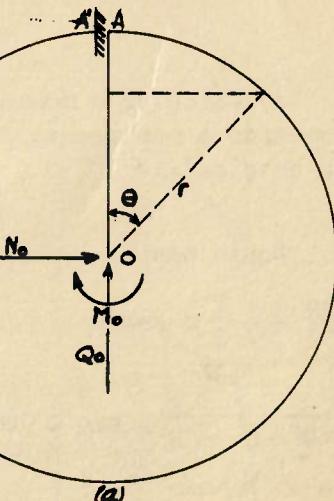
$$\int \frac{M \bar{M} r}{E J} d\theta = 0 \quad \therefore$$

$$\int M \bar{M} d\theta = 0$$

onde

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial N_0} = -r \cos \theta$$

Assim, devido à simetria vem:



$$\left. \begin{array}{l} \text{simetria} \\ \text{---} \end{array} \right\} \therefore Q_0 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} (b)$$

Figura 35

$$\int_0^{\pi} (M + M_0 - N_0 r \cos \theta) \cdot 1 d\theta = \int_0^{\pi} M d\theta + M_0 \int_0^{\pi} d\theta - N_0 r \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\text{e} - \int_0^{\pi} (M + M_0 - N_0 r \cos \theta) r \cos \theta d\theta = - \int_0^{\pi} M r \cos \theta d\theta - M_0 r \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta +$$

$$+ N_0 r^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = 0$$

Portanto

$$M_0 \int_0^{\pi} d\theta - N_0 r \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = - \int_0^{\pi} M d\theta$$

$$M_0 \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta - N_0 r \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = - \int_0^{\pi} M \cdot \cos \theta d\theta$$

Como
te:

$$\int_0^{\pi} d\theta = \pi, \quad \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{vem finalmen-}$$

$$M_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M d\theta$$

$$N_0 = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi} M \cdot \cos \theta d\theta$$

H - EXERCÍCIOS

1) Calcular o momento fletor, a força normal e a força cortante em um tubo submetido à compressão diametral (fig. 36). Tal é o caso do chamado "ensaio dos três cutelos".

Neste caso

$$M = -\frac{P}{2} r \sin \theta$$

$$M_o = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\frac{P}{2} r \sin \theta \cdot d\theta$$

$$M_o = \frac{P r}{\pi}$$

$$N_o = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi} -\frac{P}{2} r \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = 0$$

onde

$$M = -\frac{P r}{2} \sin \theta + \frac{P r}{\pi} =$$

$$= P r \left| \frac{1}{\pi} - \frac{\sin \theta}{2} \right|$$

$$N = \mathcal{N} + N_o \cos \theta = \frac{P}{2} \sin \theta$$

$$Q = \mathcal{Q} + N_o \sin \theta = -\frac{P}{2} \cos \theta$$

O diagrama de momentos fletores no tubo apresenta o aspecto do diagrama da figura 37.

2) Calcular o momento fletor em um tubo de parede fina, sujeito ao peso próprio (figura 38).

Sendo g o peso do tubo por unidade de comprimento (segundo a circunferência), vem:

$$M = \int_0^{\theta} -g r d\varphi (r \sin \theta - r \sin \varphi) = -g r^2 \int_0^{\theta} (\sin \theta - \sin \varphi) d\varphi$$

$$M = -g r^2 \left| \sin \theta + \cos \varphi \right|_0^{\theta} = -g r^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1)$$

$$M_o = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -g r^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) d\theta = 0$$

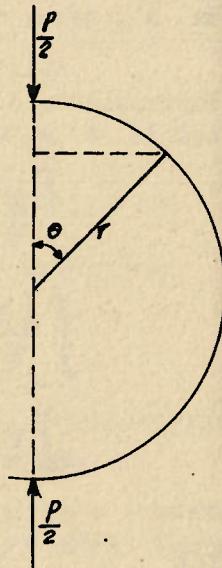
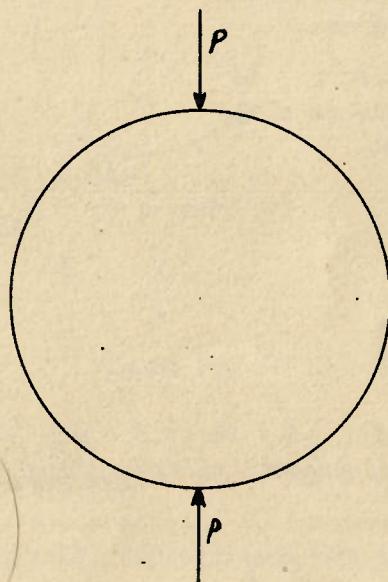


Figura 36

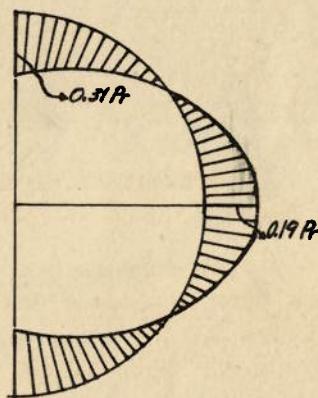


Figura 37

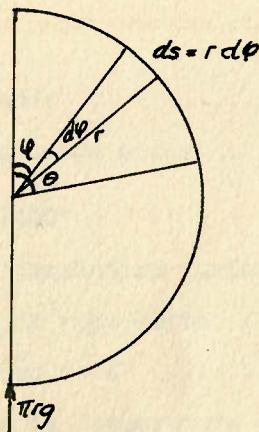


Figura 38

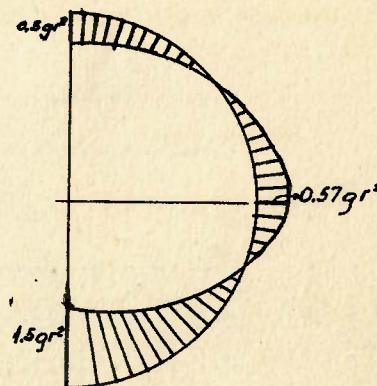


Figura 39

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{2}{\pi \cdot r} \int_0^{\pi} -g r^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) \cos \theta d\theta = \\
 &= -\frac{2 g r^2}{\pi \cdot r} \int_0^{\pi} (\theta \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta) d\theta \\
 &\therefore N_0 = -\frac{g r}{2}
 \end{aligned}$$

onde

$$M = -g r^2 (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) + \frac{g r}{2} r \cos \theta$$

$$M = g r^2 \left(1 - \theta \sin \theta - \frac{\cos \theta}{2}\right)$$

O diagrama de momentos fletores apresenta o aspecto do diagrama da figura 39.

No caso em que o tubo é apoiado sobre um berço, o procedimento mais indicado para o cálculo dos diagramas é o da superposição de dois casos indicados na figura 40.

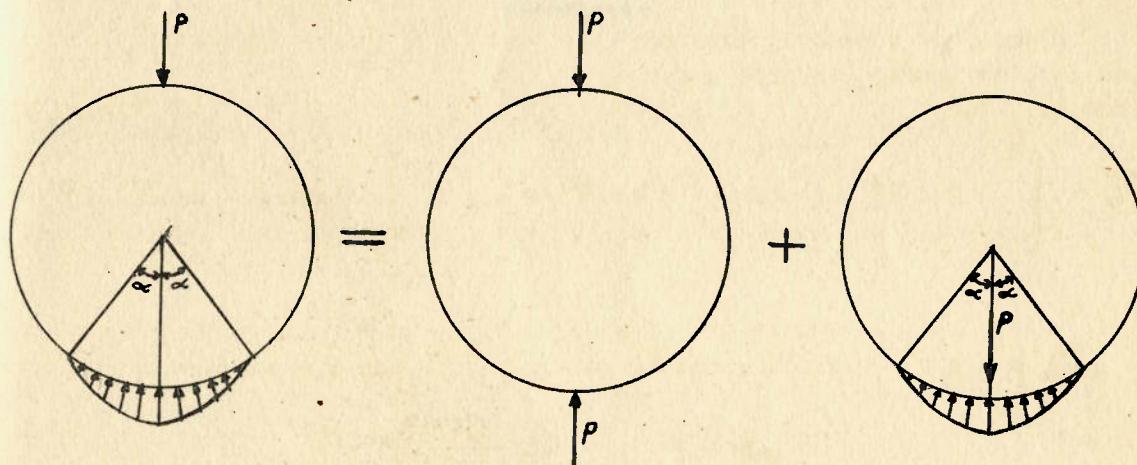


Figura 40

ARCOS HIPERESTÁTICOS

SUMÁRIO

	Página
A - INTRODUÇÃO	
1. Generalidades	1
2. Terminologia dos arcos	2
B - ARCO BIARTICULADO	
3. Estrutura isostática fundamental	3
4. Resolução da viga curva	3
5. Determinação de H	5
6. Influência da temperatura e do recalque de apôio	7
7. Arco sujeito a forças paralelas e impostas desniveladas ...	8
8. Cálculo de H	9
C - ESTUDO DO PROJETO	16
D - EXERCÍCIOS	17
E - ARCO ATIRANTADO	20
F - ARCO ENGASTADO	21
1. Estrutura isostática fundamental	21
2. Influência da temperatura e do recalque de apôio	24
3. Processo gráfico	28
G - TUBOS DE PAREDE FINA	33
H - EXERCÍCIOS	36
