

Semicontinuidade Superior de Atratores de uma Equação Hiperbólica

Luiz Augusto F. de Oliveira e Antônio Luiz Pereira
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

1. Introdução

O comportamento assintótico das soluções de

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t = (a_\nu(x)u_x)_x + f(u), & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

tem sido objeto de estudos de vários autores (por exemplo, [1], [6], [10], e [11], entre outros). Se f satisfaz a condição de dissipatividade

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \leq -r < 0 \quad (1.2)$$

então o semigrupo definido por (1.1) tem um atrator global, isto é, existe um subconjunto compacto invariante $\mathcal{A} \subset H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ que atrai o conjunto das soluções de (1.1) que têm valor inicial em conjuntos limitados de $H = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$.

Recentemente, Carvalho [1] mostrou que se $\inf\{a(x) : x \in [0, 1]\}$ é suficientemente grande, então o atrator global $\mathcal{A}$ de (1.1) pode ser identificado com a inclusão em H do atrator $\tilde{\mathcal{A}}$ da equação ordinária

$$\ddot{v} + 2\alpha \dot{v} = f(v) \quad (1.3)$$

Esse resultado é uma generalização para equações hiperbólicas daqueles previamente obtidos por [4] e [7] no contexto de equações parabólicas e na demonstração do resultado v representa a média da solução.

Nesse trabalho, vamos considerar o caso em que a é grande exceto numa vizinhança de um ponto fixado em $(0, 1)$, onde ela se torna arbitrariamente pequena. Mais precisamente, sejam $x_1 \in (0, 1)$, ℓ_1 , a_1 , ϵ_1 , ϵ_2 constantes positivas e $\ell'_1 > \ell_1$, $a'_1 > a_1$ funções de um pequeno parâmetro $\nu > 0$ tais que $\ell'_1(\nu) - \ell_1 = O(\nu^q)$, para alguma constante $0 < q < 1$, e $a'_1(\nu) - a_1 = o(1)$ quando $\nu \rightarrow 0+$. Vamos supor que $a = a_\nu$ é uma função de classe C^2 e satisfaz as seguintes condições

$$\begin{cases} a(x) \geq \frac{\epsilon_1}{\nu}, & \text{for } 0 \leq x \leq x_1 - \nu\ell'_1 \\ a(x) \geq \frac{\epsilon_2}{\nu}, & \text{for } x_1 + \nu\ell'_1 \leq x \leq 1 \\ a(x) \geq \nu a_1, & \text{for } x_1 - \nu\ell'_1 \leq x \leq x_1 + \nu\ell'_1 \\ a(x) \leq \nu a'_1, & \text{for } x_1 - \nu\ell_1 \leq x \leq x_1 + \nu\ell_1 \end{cases}$$

Funções da forma acima também foram consideradas por alguns autores (por exemplo, [5], [6], [2], [3]) no contexto de equações parabólicas onde alguns resultados interessantes concernentes à estrutura do atrator global foram obtidos.

Como a_ν é grande em $[0, x_1 - \nu \ell'_1]$ e $[x_1 + \nu \ell'_1, 1]$, podemos esperar que as soluções de (1.1) convergem para uma constante em cada um desses subintervalos quando $\nu \rightarrow 0+$. De fato, vamos provar que se α é suficientemente grande, então o atrator global $\mathcal{A}_\nu$ de (1.1) converge para a imersão em H do atrator global $\mathcal{A}_0$ do sistema de equações ordinárias

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2\alpha\dot{u}_1(t) = g_1(u_1(t), u_2(t)) \\ \ddot{u}_2(t) + 2\alpha\dot{u}_2(t) = -\beta u_2(t) + g_2(u_1(t), u_2(t)), \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $\beta = \frac{\alpha_1}{2\ell_1} \frac{1}{x_1(1-x_1)}$ e

$$g_1(u_1, u_2) = x_1 f(u_1 + k_1 u_2) + (1 - x_1) f(u_1 + k_2 u_2)$$

e

$$g_2(u_1, u_2) = -k_1 x_1 f(u_1 + k_1 u_2) + k_2 (1 - x_1) f(u_1 + k_2 u_2),$$

sendo

$$k_1 = \sqrt{\frac{1-x_1}{x_1}} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{1}{k_1}.$$

2. Principais Resultados

Nesse trabalho, vamos supor que $\alpha > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e satisfaz a seguinte condição de dissipatividade: existe $r > 0$ tal que

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \leq -r, \quad (2.1)$$

Vamos supor também que $a_\nu: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva de classe C^2 e satisfaz as condições enunciadas na introdução.

Inicialmente vamos mostrar que (1.1) define um sistema dinâmico em $H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$.

Seja $X = L^2(0, 1)$ o espaço de Hilbert das funções reais de quadrado integrável definidas em $[0, 1]$. Para cada ν tal que $0 < \nu \leq \nu_0$, seja $A_\nu: D(A_\nu) \rightarrow X$ definido por

$$D(A_\nu) = \{u \in H^2(0, 1) : u'(0) = u'(1) = 0\}$$

e

$$(A_\nu u)(x) = -(a_\nu(x)u'(x))', \quad 0 < x < 1.$$

Como A_ν é um operador linear fechado, autoadjunto e não-negativo, A_ν é setorial e portanto as potências fracionárias $X_\nu^\gamma = D(A_\nu^\gamma)$ munidos com a norma do gráfico estão bem definidos e são espaços de Hilbert. Como A_ν tem resolvente compacto, o espectro de A_ν

consiste apenas de autovalores simples e, para cada $0 < \gamma \leq 1$, a inclusão $X_\gamma^\gamma \subset X$ é compacta. Nesse trabalho vamos supor que $\gamma = \frac{1}{2}$, o que implica que $X_\nu^{\frac{1}{2}} = H^1(0, 1)$ munido com a norma dada pelo produto interno

$$(u, \tilde{u}) = \int_0^1 [u(x)\tilde{u}(x) + a_\nu(x)u'(x)\tilde{u}'(x)] dx.$$

Os próximos dois resultados são fundamentais em nossa discussão e remetemos o leitor a [2] para a correspondente demonstração.

Lema 2.1. *Sejam $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ a sequência dos autovalores e $\phi_1(x) \equiv 1, \phi_2, \dots$ as correspondentes autofunções ortonormalizadas de*

$$\begin{cases} -(a_\nu(x)\phi_n'(x))' = \lambda_n \phi_n(x), 0 < x < 1, \\ \phi_n'(x) = 0, \text{ para } x = 0, 1 \end{cases}$$

Quando $\nu \rightarrow 0+$, temos $\lambda_2 \rightarrow \frac{a_1}{2\ell_1} \frac{1}{x_1(1-x_1)}$ e existe $m > 0$ tal que $\lambda_n \geq \frac{m}{\nu}$, para todo $n \geq 3$. Além disso, $\|\phi_2\|_{L^\infty(0,1)}$ é limitado e temos

$$\phi_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x_1}{x_1}} + o(1), & \text{se } x \in [0, x_1 - \nu\ell_1] \\ O(1), & \text{se } x \in [x_1 - \nu\ell_1, x_1 + \nu\ell_1] \\ \sqrt{\frac{x_1}{1-x_1}} + o(1), & \text{se } x \in [x_1 + \nu\ell_1, 1], \end{cases} \quad (2.2)$$

quando $\nu \rightarrow 0+$.

Lema 2.2. *Existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi(x)| \leq k \left(\int_0^1 [\phi(x)^2 + a_\nu(x)\phi'(x)^2] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $\nu > 0$ e $\phi \in H^1(0, 1)$. Portanto, a constante de imersão $X_\nu^{\frac{1}{2}} \subset L^\infty(0, 1)$ é independente de ν .

Seja $H = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ com a norma definida pelo produto interno

$$((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})) = \int_0^1 [u(x)\tilde{u}(x) + v(x)\tilde{v}(x) + a_\nu(x)u'(x)\tilde{u}'(x)] dx.$$

Seja $C_\nu : D(C_\nu) \subset H \rightarrow H$ definido por

$$D(C_\nu) = D(A_\nu) \times H^1(0, 1)$$

$$C_\nu(u, v)(x) = (v(x), (a_\nu(x)u'(x))' - 2\alpha v(x)) \quad , \quad 0 < x < 1.$$

Com essas notações, a equação (1.1) pode ser reescrita como a equação de evolução

$$\dot{z}(t) = C_\nu z(t) + G(z), \quad (2.3)$$

onde $z = (u, v)$ e $G : H \rightarrow H$ é definida por $G(z)(x) = (0, f(u(x)))$, $0 < x < 1$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que o problema de valor inicial para (2.3) tem uma única solução global. Como usual, soluções de (2.3) são definidas como sendo soluções contínuas da equação integral

$$z(t) = e^{C_\nu t} z(0) + \int_0^t e^{C_\nu(t-s)} G(z(s)) ds. \quad (2.4)$$

Valem os seguintes resultados

Lema 2.3. C_ν é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo e existe $K \geq 1$ tal que $\|e^{C_\nu t}\| \leq K$, para todo $t \geq 0$.

Lema 2.4. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , então $G : H \rightarrow H$ é de classe C^1 e é uma aplicação compacta. Além disso, G e DG aplicam conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Usando agora o teorema do ponto fixo, podemos provar o seguinte

Teorema 2.1. Para todo $z_0 \in H$, existe $0 < \beta \leq \infty$ e uma única solução $z(\cdot, z_0)$ de (2.4) definida em $[0, \beta)$ e satisfazendo $z(0) = z_0$. Se $\beta < \infty$, então $\limsup_{t \rightarrow \beta^-} \|z(t)\| = \infty$. Se $z_0 \in D(C_\nu)$, então $t \in (0, \beta) \mapsto z(t, z_0) \in H$ é C^1 , $t \in [0, \beta) \mapsto z(t, z_0) \in D(C_\nu)$ é contínua e z é uma solução estrita de (2.3).

A seguir, vamos mostrar que todas as soluções são limitadas e portanto, estão definidas em $[0, \infty)$. Também decorrerá dos resultados apresentados a seguir que existe um conjunto limitado de H que atrai qualquer conjunto limitado de H pelo fluxo gerado por (1.1). Para isso, considere a função $V : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(u, v) = \int_0^1 \left[\frac{v(x)^2}{2} + \frac{a_\nu(x)u'(x)^2}{2} + 2bu(x)v(x) - F(u(x)) \right] dx, \quad (2.5)$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ e $b > 0$ é uma constante. Temos o seguinte

Lema 2.5. Seja b um número real tal que $0 < b < \min\{\alpha, \frac{\alpha r}{r+\alpha^2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}\}$. Então, existem constantes c_1, c_2, c_3, c_4, k_2 tais que

$$c_1 \|(u, v)\|^2 - k_2 \leq V(u, v) \leq c_2 \|(u, v)\|^2 + k_2, \quad (2.6)$$

para todo $(u, v) \in H$ and

$$\frac{d}{dt} V(u(t), v(t)) \leq -c_3 \|(u(t), v(t))\|^2 + c_4, \quad (2.7)$$

para toda solução de (2.2) com valor inicial em $D(A)$.

Se $(u_0, u_1) \in D(C_\nu)$, segue-se de (2.6) e (2.7) que

$$\frac{d}{dt} V(u(t), v(t)) \leq -\frac{c_3}{c_2} V(u(t), v(t)) + \frac{c_3 k_2}{c_2} + c_4$$

e portanto,

$$\begin{aligned} V(u(t), v(t)) &\leq V(u_0, u_1) e^{-\frac{c_3}{c_2} t} + (k_2 + \frac{c_2 c_4}{c_3}) [1 - e^{-\frac{c_3}{c_2} t}] \\ &\leq V(u_0, u_1) e^{-\frac{c_3}{c_2} t} + (k_2 + \frac{c_2 c_4}{c_3}), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Como V é contínua e qualquer solução de (2.3) pode ser aproximada por soluções estritas, essa última desigualdade vale também para qualquer solução. Isso implica que

$$\|(u(t), v(t))\|^2 \leq \frac{2k_2}{c_1} + \frac{c_2 c_4}{c_1 c_3} + \frac{c_2}{c_1} \|(u_0, u_1)\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2} t},$$

para todo $t \geq 0$ e qualquer solução de (2.3).

Denotando por $T_\nu(t)z_0$ a solução $z(t, z_0)$ de (2.3) com valor inicial z_0 , então para cada $\nu > 0$, a família $\{T_\nu(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo não-linear em H , que é gradiente e orbitas de conjuntos limitados são limitadas. Como G é compacta, a formula da variação das constantes (2.4) mostra que qualquer órbita de $T_\nu(t)$ é pré-compacta (ver, por exemplo, [11]). Assim, usando o Teorema 3.8.5 de [6], concluímos que (1.1) tem um atrator global conexo, que será indicado por $\mathcal{A}_\nu$.

Agora, vamos decompor $X_V^\perp = H_1 \oplus H_2 \oplus Y$, onde $H_1 = \{\phi_1\}$, $H_2 = \{\phi_2\}$ e $Y = (H_1 \oplus H_2)^\perp$. Então, H é decomposto como

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus Y \times H_1 \oplus H_2 \oplus Y.$$

Lema 2.6. $Y \times Y$ é invariante por C_ν e, para cada $\sigma > \alpha$, existe $K > 0$ tal que $\|e^{C_\nu t}|_{Y \times Y} \theta\| \leq K e^{-\sigma t} \|\theta\|_{Y \times Y}$, para todo $\theta \in Y \times Y$.

Escrevendo $u(x, t) = v_1(t)\phi_1(x) + v_2(t)\phi_2(x) + w(x, t)$, onde

$$v_1(t) = \int_0^1 u(x, t) dx = \langle u, \phi_1 \rangle, \quad v_2(t) = \int_0^1 u(x, t) \phi_2(x) dx = \langle u, \phi_2 \rangle,$$

e $w(x, t) = u(x, t) - v_1(t)\phi_1(x) - v_2(t)\phi_2(x)$, a equação (1.1) pode ser decomposta em

$$\begin{cases} \ddot{v}_1(t) + 2\alpha \dot{v}_1(t) = \langle f(u), \phi_1 \rangle \\ \ddot{v}_2(t) + 2\alpha \dot{v}_2(t) = -\lambda_2 v_2(t) + \langle f(u), \phi_2 \rangle \\ w_{tt} + 2\alpha w_t = (a_\nu(x)w_x)_x + f(u) - \langle f(u), \phi_1 \rangle \phi_1 - \langle f(u), \phi_2 \rangle \phi_2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

Sendo $V_1 = \text{col}(v_1, \dot{v}_1)$, $V_2 = \text{col}(v_2, \dot{v}_2)$ e $W = \text{col}(w, \dot{w})$, as equações anteriores podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= B_1 V_1 + F_1(V_1, V_2, W) \\ \dot{V}_2 &= B_2(\nu) V_2 + F_2(V_1, V_2, W) \\ \dot{W} &= C_\nu W + F_3(V_1, V_2, W),\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2\alpha \end{pmatrix} \quad B_2(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_2(\nu) & -2\alpha \end{pmatrix} \quad F_j = \begin{pmatrix} 0 \\ f_j \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}f_1(V_1, V_2, W) &= \langle f(v_1 \phi + v_2 \phi_2 + w), \phi_1 \rangle, \\ f_2(V_1, V_2, W) &= \langle f(v_1 \phi + v_2 \phi_2 + w), \phi_2 \rangle, \\ f_3(V_1, V_2, W) &= f(v_1 \phi + v_2 \phi_2 + w) - \langle f(v_1 \phi + v_2 \phi_2 + w), \phi_1 \rangle \phi_1 \\ &\quad - \langle f(v_1 \phi + v_2 \phi_2 + w), \phi_2 \rangle \phi_2.\end{aligned}$$

Sendo

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2\alpha \end{pmatrix}, G_1(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(v_1, v_2) \end{pmatrix} \text{ e } G_2(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(v_1, v_2) \end{pmatrix},$$

o sistema acima pode ser escrito na forma equivalente

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= B_1 V_1 + G_1(V_1, V_2) + (F_1(V_1, V_2, W) - G_1(V_1, V_2)) \\ \dot{V}_2 &= B_2 V_2 + G_2(V_1, V_2) + (B_2(\nu) - B_2) V_2 + (F_2(V_1, V_2, W) - G_2(V_1, V_2)) \\ \dot{W} &= C_\nu W + F_3(V_1, V_2, W)\end{aligned}$$

Lema 2.7. Dado $\rho > 0$, existe $K = K(\rho) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|F_1(V_1, V_2, W) - G_1(V_1, V_2)\| &\leq K \|W\|_{X_\nu^{\frac{1}{2}} \times L^2} + O(\nu^{\frac{1}{2}}) \\ \|F_2(V_1, V_2, W) - G_2(V_1, V_2)\| &\leq K \|W\|_{X_\nu^{\frac{1}{2}} \times L^2} + O(\nu^{\frac{1}{2}}) \\ \|F_3(V_1, V_2, W)\| &\leq K \|W\|_{X_\nu^{\frac{1}{2}} \times L^2} + O(\nu).\end{aligned}$$

para $\nu > 0$ e $\|(V_1, V_2, W)\| \leq \rho$.

Teorema 2.2. Seja $\mathcal{A}_\nu$ o atrator de (1.1) e seja $\mathcal{A}_0$ a inclusão em H do atrator de (1.4). Existe $\alpha_0 > 0$ tal que se $\alpha > \alpha_0$, então, a família $\{\mathcal{A}_\nu, 0 \leq \nu \leq \nu_0\}$ é semicontínua superiormente em 0.

A demonstração é consequência do teorema 2.3 de [3].

Bibliografia

1. A.N. Carvalho. Spatial homogeneity in damped hyperbolic equations. *Dynamic Systems and Applications*, vol.2, 221-250 (1992).
2. A.N. Carvalho and A.L. Pereira, A scalar parabolic equation whose asymptotic behavior is dictated by a system of ordinary differential equations, *Journal of Diff. Equations*, 112, 81-130 (1994).
3. A.N. Carvalho and L.A.F. Oliveira, Delay-partial differential equations with some large diffusion, *Nonlinear Analysis*, vol. 22, 1057-1095 (1994).
4. E. Conway, D. Hoff and J. Smoller, Large time behavior of solutions of systems of reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.* 35, 1-16 (1978).
5. G. Fusco, On the explicit construction of an ODE which has the same dynamics as a scalar parabolic PDE. *J. Diff. Eq.* 69, 85-110 (1987).
6. J. K. Hale. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. American Surveys and Monographs, no. 25, 1988.
7. J.K. Hale, Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 118, 455-466 (1986).
8. D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, 1981.
9. X.Mora and J. Solà-Morales, Existence and non-existence of finite-dimensional globally attracting invariant manifold in semilinear damped wave equations, *NATO ASI Series*, vol. F37, 187-210, (1987).
- 10 J. Sòla-Morales and M. Valencia, Trends os spatial homogeneity for solutions of semilinear damped wave equations, *Universiad Autonoma de Barcelona-Seccio Mat.*, 1986.
11. G.F. Webb, Compactness of bounded trajectories of dynamical systems in infinite dimensional spaces, *Proc. Royal Society of Edinburgh*, 8-4 A, 9-33 (1979).