

Métodos Numéricos en Ingeniería V

Editores:

**J. M. Goicolea
C. Mota Soares
M. Pastor
G. Bugeda**

Publicado por:

SEMNI

Sociedad Española de Métodos
Numéricos en Ingeniería

Métodos Numéricos en Ingeniería V

Editores: J. M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor y G. Bugeda

Primera edición, Junio 2002

ã SEMNI, Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería
www.cimne.upc.es/semni

Impreso por: Artes Gráficas Torres S.A., Morales 17. 08029 Barcelona, España

Depósito legal: B-27.295-02

ISBN: 84-95999-03-X

PROLOGO

Este volumen contiene los 309 resúmenes de los trabajos presentados al V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, celebrado en Madrid durante los días 3-6 de Junio de 2002. Asimismo, el CD-ROM adjunto contiene los trabajos completos correspondientes. Los congresos anteriores tuvieron lugar en Las Palmas de Gran Canaria (1990), La Coruña (1993), Zaragoza (1996), y Sevilla (1999).

El Congreso es ya el quinto de la serie que sobre dicho tema organiza la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI). El éxito creciente obtenido en las sucesivas ediciones, así como el aumento en la calidad y variedad de los trabajos presentados, constituye una muestra importante del grado de consolidación que dicha organización ha alcanzado dentro de la comunidad científica nacional e internacional.

Asimismo, este es el primero de una serie de Congresos a celebrar en colaboración con la Asociación Portuguesa de Mecánica Teórica, Aplicada y Computacional (APMTAC). Hay un número importante de trabajos que corresponden a científicos e ingenieros Portugueses. Además de agradecer esta colaboración a los autores, los organizadores pensamos que esta excelente colaboración y entendimiento científico entre España y Portugal es beneficiosa para todos.

La organización del V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería se ha efectuado, de forma conjunta, entre SEMNI, APMTAC y la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.

El contenido de este volumen es muy amplio y refleja la importante actividad que se desarrolla en España y Portugal en relación con los aspectos más teóricos de los métodos numéricos, así como sus aplicaciones a diversos campos tales como el análisis estructural, la mecánica de fluidos, la geomecánica, la visualización gráfica, la optimización, el análisis de materiales compuestos y el electromagnetismo, entre otros. Debe destacarse, respecto a anteriores congresos, el importante número de trabajos incluidos en áreas recientes como la biomecánica y los métodos sin malla. Se incluyen, asimismo, comunicaciones escritas por especialistas de prestigio internacional que participaron en las sesiones plenarias del congreso. Se destaca, también, la importante contribución de diversos científicos e ingenieros ibero-americanos.

Todos los trabajos publicados se han reproducido directamente a partir de los archivos y manuscritos remitidos por los autores. Por ello, los organizadores no pueden aceptar ninguna responsabilidad por su contenido.

Finalmente, los organizadores quieren agradecer a los autores de los trabajos el esfuerzo realizado, así como su contribución al éxito del congreso.

Barcelona/ Lisboa/ Madrid Junio 2002

José M^a Goicolea
Universidad Politécnica de Madrid
Carlos Mota Soares
Universidade Técnica de Lisboa
Manuel Pastor
Universidad Politécnica de Madrid y CEDEX
Gabriel Bugeda
Universidad Politécnica de Cataluña y CIMNE

Eugenio Oñate
Presidente de SEMNI
Carlos Mota Soares
Presidente de APMTAC

SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

Felício B. Barros*, Sergio P. B. Proença*, e Clovis S. de Barcellos**

* Departamento de Engenharia de Estruturas,
Escola de Engenharia de São Carlos (EESC),
Universidade de São Paulo,
Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, S.P., Brasil, CEP:13566-590
e-mail: persival@sc.usp.br

702 775

** Pontifícia Universidade Católica,
Belo Horizonte, M.G., Brasil,
e-mail: clovis@pucminas.br

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos, Métodos Sem Malha, Estimador de Erro, Análise Não-Linear, Mecânica do Dano.

Resumo. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados, MEFG, é brevemente descrito. Idealiza-se o comportamento do material (concreto) pela Mecânica do Dano Contínuo. No primeiro exemplo, as vantagens de aplicação do método em problemas não-lineares são salientadas. Objetivando-se a determinação de um estimador de erro, propõe-se a adaptação do Método dos Resíduos em Elementos. A estimativa do erro é realizada para o procedimento de solução do Método de Newton-Raphson. A boa qualidade do estimador é comprovada em cada passo da análise não-linear de uma chapa solicitada à compressão. Finalmente, são comentadas as perspectivas de utilização do estimador num procedimento de solução p-adaptativa.*

126 2458

230902

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados, MEFG, [1] e [2], pode ser interpretado como uma variação do Método dos Elementos Finitos, MEF, que compartilha diversas características com os métodos sem malha. A aproximação local é construída empregando-se uma malha convencional de elementos que serve apenas para se definir uma partição da unidade, sobre a qual é realizado o enriquecimento das funções de forma. Tal enriquecimento é nodal e pode ser polinomial ou não, conforme o tipo de problema modelado. Neste trabalho, o MEFG é explorado para a análise de problemas com não-linearidade física, particularmente estruturas de concreto. O comportamento do material é idealizado pela Mecânica do Dano Contínuo, aplicando-se o modelo de Mazars, [3]. De acordo com esse modelo o meio é suposto elástico mas com rigidez reduzida por efeito da danificação progressiva. Como exemplo de aplicação, o problema de uma viga de concreto armado é analisado. Mostra-se que a resposta não-linear da estrutura, observada experimentalmente e reproduzida mediante uma análise convencional de elementos finitos com uma malha bastante fina, pode ser obtida pelo MEFG utilizando-se uma malha com poucos elementos. Na segunda parte do trabalho o Método dos Resíduos em Elementos, MRE, [4], é adaptado à formulação do MEFG tendo-se em vista o futuro estabelecimento de um processo p -adaptativo no contexto da análise não-linear física. Uma chapa de concreto comprimida por uma força volúmica é então analisada. A medida global adotada para o erro de aproximação, calculada mediante a contribuição de cada um dos elementos, é comparada com uma outra medida de erro calculada a partir dos resultados de uma análise convencional cuja solução é considerada muito próxima da exata. Conclui-se que, respeitando-se certas hipóteses iniciais, a medida de erro formulada pode ser utilizada com sucesso como indicador para um processo p -adaptativo em problemas de análise não-linear.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O MEFG tem sua formulação oriunda de duas linhas de desenvolvimento dos métodos sem malha empreendidas por:

- Babuška e colegas, sob a denominação inicial de Método dos Elementos Finitos Especiais, [5], e posteriormente como Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade, [6];
- Duarte e Oden a partir dos trabalhos [7] e [8], correspondentes à formulação do método das Nuvens, e em [9] como uma abordagem do MEF em forma híbrida com o método das Nuvens.

A construção das funções de forma do MEFG tem por base o conceito de partição da unidade, PU, [10], que se caracteriza por conferir capacidade de aproximação a um conjunto de funções cuja soma é igual a um.

Considere-se uma malha convencional de elementos finitos definida a partir de um conjunto de N pontos nodais $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N$ em um domínio aberto e limitado Ω de interesse.

Seja, então, ω_j uma região, ou nuvem como definida em [7], formada por todos os elementos que concorrem no ponto nodal $\mathbf{x}_j$. O conjunto das funções interpoladoras de Lagrange associadas ao nó $\mathbf{x}_j$ e pertencentes a tais elementos, define a função $\mathcal{N}_j$, cujo suporte compacto corresponde à região ω_j . Por sua vez, pode-se mostrar que o conjunto $\{\mathcal{N}\}_{j=1}^N$, forma uma PU, ou seja, em uma posição qualquer do domínio Ω :

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j = 1 \quad (1)$$

Considere-se, também, os conjuntos formados por q_j funções linearmente independentes definidas em cada nó $\mathbf{x}_j$ com suportes na nuvem ω_j :

$$\mathcal{J}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (2)$$

As funções de forma ϕ_j do MEFG, atreladas ao nó $\mathbf{x}_j$, são construídas por meio da enriquecimento, ou multiplicação, das funções PU correspondentes à nuvem ω_j , pelas componentes do conjunto (2), ou seja:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = \mathcal{N}_j \times \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (3)$$

Para melhor entender o comportamento das funções resultantes desse produto toma-se, como exemplo, o esquema da Figura 1 para o caso de aproximações definidas em $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Nela, encontram-se representados a PU de ordem 1 (função bi-linear) geradora de uma aproximação C^0 , uma função especial arbitrária e o resultado do produto (3) entre essas duas funções. A função especial é escolhida para conferir à função produto certas propriedades locais, representativas do problema aproximado. Como resultado a função de forma correspondente apresenta as características aproximadoras da função especial, ao mesmo tempo que herda o suporte compacto da PU. Consegue-se, assim, graças ao suporte compacto de ϕ_j , que a aproximação seja construída sem penalizar a continuidade entre os elementos da malha inicialmente adotada.

As funções do conjunto (2) podem ser polinomiais ou não, dependendo do tipo de solução que se queira aproximar. Pela maneira como é realizado, o enriquecimento pode variar entre elementos e ainda assim chega-se a uma aproximação sem “costura”, [2], sem a necessidade de se estabelecer, como ocorre no MEF hierárquico, condições de restrição que garantam a continuidade dos diferentes campos aproximadores. Além disso, o emprego das funções do MEF para a PU evita problemas relacionados à integração numérica e à imposição das condições de contorno, encontrados em algumas formulações sem malha, como o Método dos Elementos Livres de Galerkin, [11], e o Método das Nuvens, [7].

A aproximação $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é, dessa maneira, obtida pela seguinte combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (4)$$

onde b_{ji} são novos parâmetros nodais em correspondência a cada componente $\mathcal{N}_j L_{ji}$.

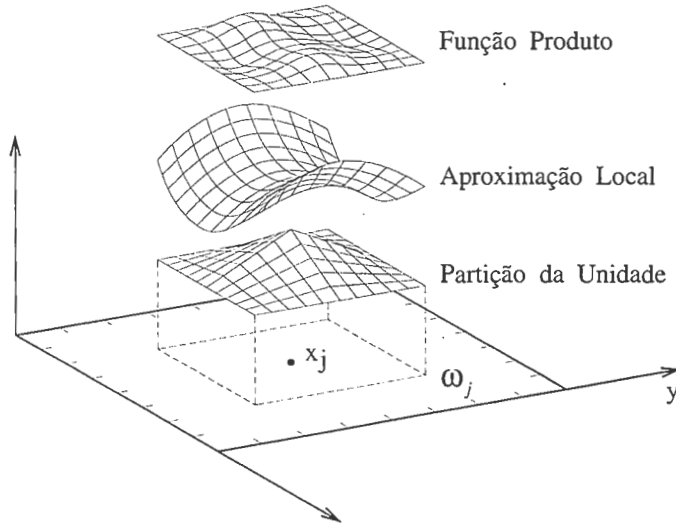


Figura 1. Esquema de enriquecimento da Partição da Unidade

2.1. O MEFG na Elasticidade Linear Bi-dimensional

Seja o seguinte problema de valor de contorno, PVC, que exprime, em forma forte e em função dos deslocamentos cinematicamente admissíveis, o equilíbrio em um ponto genérico do domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \text{ tal que: } \begin{cases} \nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_D \\ t(\mathbf{u}) = \hat{t} & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (5)$$

sendo:

- $\mathbf{u}^T \stackrel{\text{def}}{=} [u_x \ u_y]$ o vetor das componentes de deslocamentos nas direções dos eixos x e y ;
- Γ_D região do contorno em que as condições de Dirichlet são definidas;
- Γ_N região do contorno em que as condições de Neumman são definidas;
- $\boldsymbol{\sigma}$ tensor de tensões;

- $\mathbf{b}$ força volúmica;
- $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, vetor de trações no contorno $\partial\Omega$;
- $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ vetores de deslocamento e tração prescritos;
- $\mathbf{n}$ versor normal ao contorno $\partial\Omega$ na região Γ_N .

A correspondente forma variacional pode ser descrita como:

$$\boxed{\text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1 \text{ tal que: } \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}^1} \quad (6)$$

onde:

- $\mathcal{H}^1$ é o espaço de Hilbert de ordem 1;
- os operadores variacionais são definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) l_z \, dx \, dy \\ l(\mathbf{v}) &= \iint_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} l_z \, dx \, dy + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{t}} l_z \, ds \end{aligned}$$

- $\mathbf{v}^T \stackrel{\text{def}}{=} [v_x \quad v_y]$ é o vetor das funções teste de deslocamentos em x e y ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ representa o operador de gradientes sobre $\mathbf{v}$;
- l_z a dimensão do corpo elástico na direção z (espessura) aqui tomada como constante.

A aproximação de Galerkin corresponde à solução do seguinte problema, em um sub-espaço de dimensão finita $\tilde{\mathcal{X}}$ construído pelas funções do MEFG:

$$\boxed{\text{Encontrar } \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{X}} \text{ tal que: } \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = l(\tilde{\mathbf{v}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{X}}} \quad (7)$$

em que $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$ são definidas, cada uma, a partir da expressão (4), para $\mathbb{R}^2$, ou seja:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(x) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) \mathbf{b}_{ji} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(x) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(x) \left\{ \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) \mathbf{c}_{ji} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{V} \quad (9)$$

Introduzindo-se, então, a matriz $\mathbf{L}$ que realiza os gradientes e determina o campo de deformações a partir dos deslocamentos e o operador $\mathbf{B}$ que relaciona os deslocamentos generalizados $\mathbf{U}$ às deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}^T \quad (10)$$

pode-se chegar ao seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (11)$$

Sendo $\mathbf{C}$ o tensor das propriedades elásticas de rigidez do material, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{F}$ são definidos como:

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} l_z dx dy \quad (12)$$

$$\mathbf{F} = \iint_{\Omega} \Phi \mathbf{b} l_z dx dy + \int_{\Gamma_N} \Phi \hat{\mathbf{t}} l_z ds \quad (13)$$

Quando as funções de forma Φ são obtidas pelo produto da PU, polinomial, por monômios, elas formam um conjunto linearmente dependente e, por essa razão, a matriz de rigidez torna-se semi-definida positiva. O sistema de equações (11) admite, portanto, infinitas soluções para a parcela de $\mathbf{U}$ correspondente aos parâmetros enriquecedores b_{ji} ; ainda assim a unicidade da solução de Galerkin é preservada. Para resolver tal sistema emprega-se, neste trabalho, a estratégia iterativa sugerida em [1].

3. ANÁLISE NÃO-LINEAR

O material considerado neste trabalho é o concreto e a não-linearidade física decorre da propagação de defeitos ou dano inicial, simulados pela Mecânica do Dano Contínuo. O modelo constitutivo adotado é o de Mazars, [3], para o qual o concreto é considerado como um meio elástico em processo de dano evolutivo. A abordagem é não-local, [12], em que se aplica o critério de danificação a partir de médias ponderadas das deformações em uma região em torno do ponto de interesse. Tal região, definida pelo raio r_{nl} está associada à dimensão do maior agregado no concreto.

O problema não-linear é resolvido iterativamente pelo método de Newton-Raphson. Sendo i_t o símbolo para iterações, o algoritmo de resolução é o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Para } i_t = 1, 2, \dots, \bar{i}_t, \dots, i_t^{\max} \\ \begin{aligned} \psi^{(i_t-1)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i_t-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{sec}}^{(i_t-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i_t)} &= \psi^{(i_t-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i_t)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i_t-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i_t)} \end{aligned} \end{aligned} \quad (14)$$

tendo como condições iniciais:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}^{(\bar{i}_t)}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{sec}}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}_{\text{sec}}^{(\bar{i}_t)}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}^{(\bar{i}_t)}$$

onde Δt é a variável de controle do processo incremental associada ao passo de carregamento imposto e $\Delta \mathbf{U}^{(i_t)}$ é o acréscimo do vetor de deslocamentos na iteração i_t do passo $t + \Delta t$. O vetor de forças residuais é representado por $\psi^{(i_t-1)}$. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}$ representa o vetor

de forças internas equivalentes à uma distribuição equilibrada de tensões e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}}$ o vetor generalizado de forças externas. Observa-se que para a matriz de rigidez emprega-se, neste estudo, a forma secante ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{sec}}$, obtida de:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{sec}} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T (1 - D) \mathbf{C} \mathbf{B} l_z \, dx \, dy \quad (15)$$

onde $0 < D < 1$ corresponde à variável de dano escalar do Modelo de Mazars.

De forma geral, a estrutura para a solução do problema não-linear é idêntica à usada tradicionalmente no MEF. Excetua-se, é claro, a maneira com que os vetores e matrizes, presentes nas expressões acima, são montados. Um detalhe importante a ser considerado corresponde ao critério de parada do processo iterativo. Em razão da dependência linear das funções de forma para o caso de enriquecimento polinomial no MEEG, o ideal é que se utilize para o controle da convergência a norma energia incremental dada por:

$$\|\Delta \mathbf{u}_p\|_u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\Delta \mathbf{U}^{(i_t)T} \boldsymbol{\psi}^{(i_t-1)}} = \sqrt{\sum_{i=2}^{NGL} (\Delta U_i^{(i_t)} \psi_i^{(i_t-1)})} \quad (16)$$

onde NGL refere-se ao número de graus de liberdade empregado. A razão para esse fato está na dependência linear das funções de forma para o caso de enriquecimento polinomial, discutida na seção 2.1. Como são admitidas infinitas soluções para os parâmetros b_{ji} de $\Delta \mathbf{U}^{(i_t)}$ é possível que se tenha a convergência da solução sem que a norma L_2 dos deslocamentos $\|\Delta \mathbf{U}^{(i_t)}\|_{L_2}$ se anule. De forma análoga, a convergência do resultados não implica, necessariamente em se ter uma norma L_2 nula para vetor de forças residuais generalizadas, $\|\boldsymbol{\psi}^{(i_t-1)}\|_{L_2}$. O produto interno entre $\boldsymbol{\psi}^{(i_t-1)}$ e $\Delta \mathbf{U}^{(i_t)}$ preserva o significado associado à energia de deformação, não sofrendo influência de uma eventual dependência linear das funções de forma, como poderia ocorrer com as normas isoladas de deslocamento ou forças residuais, [13].

4. VIGA DE CONCRETO ARMADO

O problema ilustrado na Figura 2, corresponde a uma viga de concreto armado, bi-apoiada, com seção transversal retangular e submetida a duas forças verticais F posicionadas simetricamente com relação ao meio do vão. O momento constante, que solicita a região entre as duas forças, induz uma distribuição difusa de micro-fissuras ao longo desse trecho.

A seguir, são apresentados os dados relativos às propriedades do aço (sub-índice s) e do concreto (sub-índice c). Entre eles estão, também, os parâmetros dos modelos de Mazars ($A_T, B_T, A_C, B_C, \varepsilon_{d0}$) e o raio adotado na abordagem não-local, r_{nl} :

$$\begin{array}{llll} A_T = 0,7 & B_T = 8000 & A_C = 0,85 & B_C = 1050 \\ \varepsilon_{d0} = 0,00007 & E_c = 29200 \text{ MPa} & E_s = 196000 \text{ MPa} & \nu_c = 0,2 \\ & \nu_s = 0,3 & r_{nl} = 3 \text{ cm} & \end{array}$$

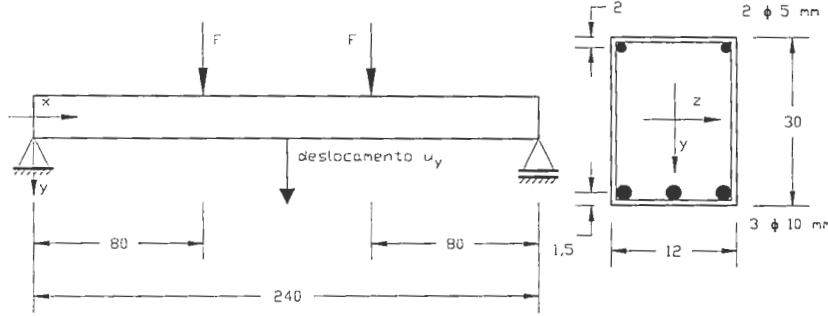


Figura 2. Viga em concreto armado - geometria e detalhe de armaduras - medidas em cm

Os parâmetros para o Modelo de Mazars foram obtidos por identificação paramétrica em ensaios apresentados em [14], onde também se encontram os resultados experimentais utilizados para confronto. Com relação ao aço, considerou-se um comportamento elástico linear. Entre os meios concreto e aço admitiu-se aderência perfeita.

4.1. Análise Numérica

Duas análises estáticas bi-dimensionais foram realizadas. As malhas de elementos finitos empregadas estão representadas na Figura 3. A Malha I apresenta elementos com funções de aproximação bi-lineares e um número total de graus de liberdade $NGL=1376$. Já na Malha II, foram utilizados poucos elementos com enriquecimento de grau variável para cada nuvem ω_j . Nesse caso, o conjunto de funções J_j empregado pode ser representado como:

$$J_j = \{1, p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jq_j(p)}\} \quad (17)$$

Os monômios p_{ji} tem valores nulos no ponto nodal x_j e foram normalizados por uma dimensão característica da malha, no caso a maior diagonal dos elementos que pertencem à nuvem ω_j . Essas características impostas tiveram o objetivo de eliminar a interferência das dimensões do problema na aproximação numérica, além de garantir, para as funções de forma, as propriedades do delta de Kronecker em relação aos nós. O parâmetro $q_j(p)$ corresponde ao número de funções necessário para que a aproximação reproduza exatamente polinômios completos até o grau p . A seguir são listadas outras considerações admitidas nas análises:

condições de contorno: para se manter a coerência com a formulação bi-dimensional as restrições nodais e as forças concentradas foram substituídas, respectivamente, por um vínculo de face no elemento adjacente ao apoio e uma carga distribuída q ;

aproximação das armaduras: utilizou-se para as malhas I e II, a técnica de embutimento da armadura, descrita em [15]. Apenas a armadura positiva foi considerada;

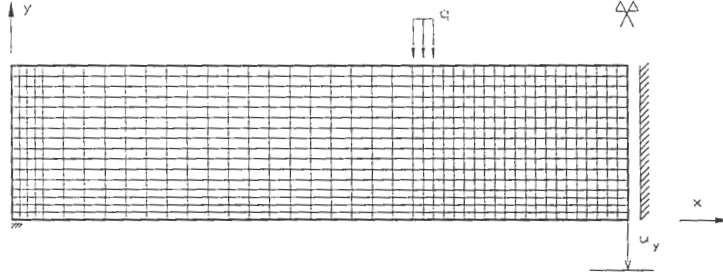
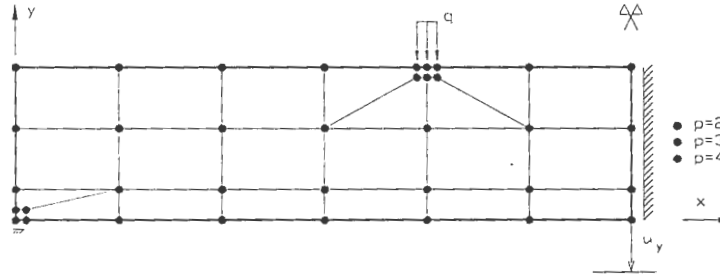
(a) Malha I - 688 elementos - $NGL = 1376$ (b) Malha II - 24 elementos - $NGL = 392$

Figura 3. Condições de contorno e discretização adotadas

integração numérica: realizada através da quadratura de Gauss-Legendre. Para a Malha I foram utilizados 2×2 pontos por elemento. Já para a Malha II, foi empregado um conjunto de 4×4 pontos para os elementos próximos do apoio e da força q . Para os demais elementos, de dimensões maiores, foram adotados 6×6 pontos de integração para captar a evolução do dano;

análise não-local: a utilização de $r_{nl} = 3$ cm tem um efeito regularizador, fazendo com que o dano, no limite, se concentre em bandas de largura finita, garantindo, com isso, a objetividade da resposta numérica;

tolerância e passos de carregamento: como critério de convergência do algoritmo de solução iterativa, adotou-se uma tolerância de 0,5 % para a norma energia incremental em relação à norma obtida para o primeiro passo elástico. Os primeiros 4 passos incrementais do carregamento representaram, cada um, 9 % da força total aplicada (30 kN), sendo seguidos por um passo com 4 %, 26 passos com 1 % e os 17 últimos passos com 2 %. Esta forma adotada para aplicação do carregamento se deve à elevada não-linearidade observada a partir de 12 kN;

montagem da matriz de rigidez: para evitar o mal-condicionamento da matriz de rigidez, para efeitos de sua atualização quando da reaplicação do resíduo, o dano foi limitado ($D \leq 0,87$);

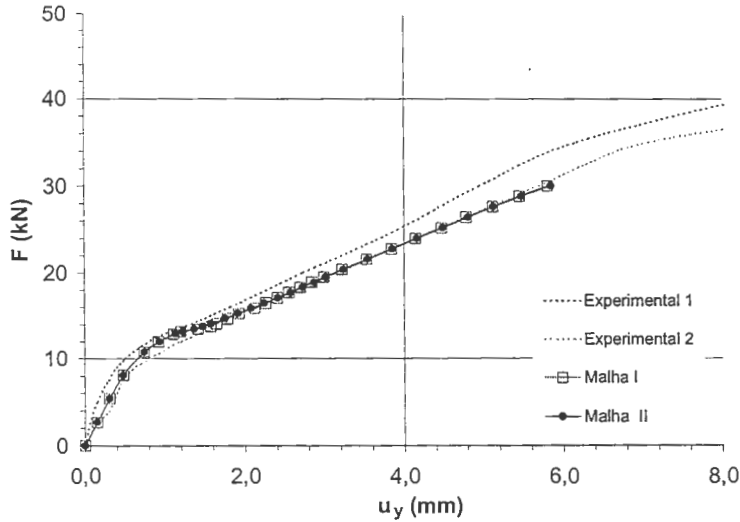
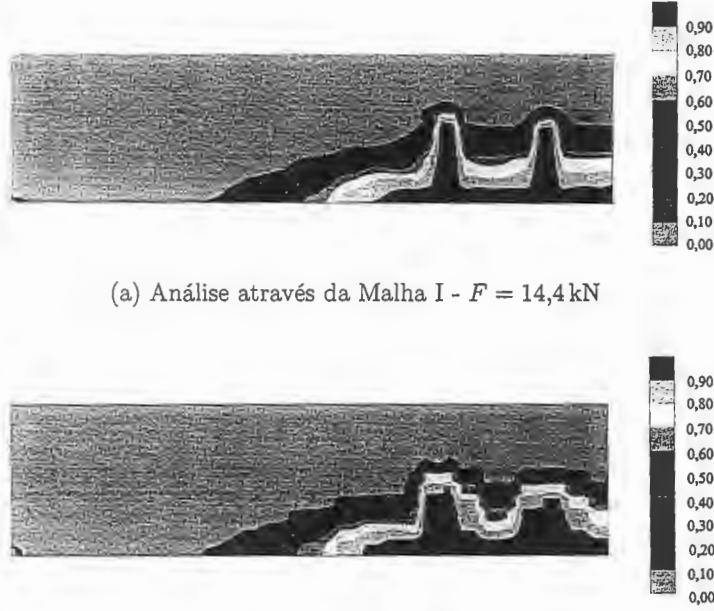


Figura 4. Análise estática

No gráfico da Figura 4, os resultados experimentais de [14] são confrontados com os resultados das análises numéricas. As curvas descrevem a história do carregamento F , (equivalente à resultante da carga distribuída q) relacionando-o ao deslocamento vertical u_y (medido no meio do vão, na face inferior da viga, como mostrado na Figura 2). Pode-se afirmar que as respostas são praticamente coincidentes para as análises com as malhas I e II, aproximando-se satisfatoriamente dos resultados experimentais. Optou-se por interromper a análise no nível de força correspondente a 30 kN. Acima desse nível caracteriza-se, experimentalmente, a plastificação das armaduras, não considerada nesta modelagem.

As Figuras 5(a) e 5(b) ilustram a distribuição do dano, para o nível de força $F = 14,4$ kN e correspondente ao 13º passo das análises com as malhas I e II, respectivamente. Nota-se que a região de distribuição do dano, obtida com as duas malhas, é bem semelhante. Na Figura 5(a), porém, ocorre uma maior concentração, o que pode ser explicado pelo elevado nível de refinamento h da Malha I se comparado ao da Malha II. Testes realizados com aproximações polinomiais de ordem inferior e superior à apresentada na Figura 3(b) indicaram que à medida que se eleva a ordem polinomial da aproximação, mais próxima a distribuição do dano fica do observado na Figura 5(a).


 (a) Análise através da Malha I - $F = 14,4 \text{ kN}$

 (b) Análise através da Malha II - $F = 14,4 \text{ kN}$

Figura 5. Mapa da distribuição do dano

5. MEDIDAS DE ERRO EM ANÁLISE NÃO-LINEAR

A definição da medida de erro para o problema não-linear, obtida com base na formulação do MRE apresentada em [4], é descrita a seguir, resumidamente. Maiores detalhes podem ser encontrados em [13].

Seja um problema com não-linearidade física cuja a resolução é conduzida pelo procedimento descrito na seção 3. Admite-se que o equilíbrio já esteja verificado até o passo t . Sendo assim, no passo $t + \Delta t$ o problema que se procura resolver equivale a encontrar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^T \sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{t}} & \text{em } \Gamma_N \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_D \end{aligned} \quad (18)$$

onde:

- ${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}$ e ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{t}}$ são as forças de volume e de superfície no passo $t + \Delta t$;
- ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}$ é o deslocamento prescrito ao final do passo $t + \Delta t$ em Γ_D .

Considere-se, agora, a aproximação ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$ da solução no passo $t + \Delta t$, onde p representa o grau máximo do polinômio capaz de ser reproduzido. Os conjuntos de funções empre-

gados para o enriquecimento da solução são definidos como em (17). Por conveniência, o espaço das funções de aproximação é caracterizado ao nível dos elementos e pode ser representado por: $\mathcal{X}_p(\mathcal{K}) = \{\mathbf{v}_p \in \mathcal{H}^1; \mathbf{v}_p|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{P}_p, \mathcal{K} \in \Omega\}$, onde $\mathbf{v}_p|_{\mathcal{K}}$ refere-se à restrição da função $\mathbf{v}_p$ ao elemento finito $\mathcal{K}$ pertencente ao domínio Ω e $\mathcal{P}_p$ é o espaço dos polinômios com grau máximo p .

Ao final do passo $t + \Delta t$ pode-se definir a função erro de aproximação como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p \quad \text{sendo } {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p \in \mathcal{H}^1 \quad (19)$$

A partir daí, uma opção seria substituir a (19) na (18) no sentido de se obter o PVC expresso em função do erro. Uma ulterior medida do erro, expressa por meio de uma conveniente norma, poderia servir como controle da qualidade da solução obtida no passo.

Inicialmente, é importante observar que devido à não-linearidade do meio, as propriedades de rigidez do mesmo, no caso da danificação, resultam diferentes comparando-se, por exemplo a solução ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$, e a solução aproximada ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$, correspondente a um certo grau de refinamento; a consequência disso é que $\sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) \neq \sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p)$. Por outro lado, admitindo-se que a variação de rigidez seja contínua com o refinamento da solução numérica, pode-se tomar como válida a seguinte aproximação:

$$\sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) \approx \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{t+\Delta t}\mathbf{u}_p \underbrace{\varepsilon({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p)}_{t+\Delta t}\mathbf{e}_p \quad (20)$$

onde $\partial \sigma(\mathbf{u}) / \partial \varepsilon|_{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$ representa a rigidez local do meio em correspondência à solução ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$.

Com as relações (20) e (19) inseridas na (18), pode-se então exprimir o seguinte PVC, do qual resulta, a rigor, uma estimativa ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p^*$ para o erro de aproximação ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p$:

$$\begin{aligned} \nabla^T \left[\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{t+\Delta t}\mathbf{u}_p \varepsilon({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p^*) \right] + \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) &= \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p^* &= \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \\ \left[\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{t+\Delta t}\mathbf{u}_p \varepsilon({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p^*) \right] \mathbf{n} &= \mathbf{r}_\Gamma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) \text{ em } \Gamma_N \end{aligned} \quad (21)$$

onde aparecem as funções de resíduo, no domínio e contorno, dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla^T \sigma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} \text{ em } \Omega \\ \mathbf{r}_\Gamma({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) &\stackrel{\text{def}}{=} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p) \text{ em } \Gamma_N \end{aligned} \quad (22)$$

A qualidade dessa estimativa depende fortemente de que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$ estejam bastante próximos, de modo que a rigidez local utilizada em (20) resulte suficientemente precisa. Tal condição pode ser atendida no problema não-linear tomando-se pequenos passos de carregamento.

Uma maneira conveniente de resolver o problema (21) é também formulá-lo em forma aproximada de Galerkin, montando-se o sistema de equações resolvente a partir da contribuição de cada elemento isoladamente. Nesse caso, uma nova condição de contorno natural deve ser considerada nas fronteiras do elemento $\mathcal{K}$ com seus vizinhos ($\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega$). Empregando-se, então, a expressão (20) para se definir as tensões normais à face dos elementos, pode-se estabelecer que:

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \Big|_{t+\Delta t \mathbf{u}_p} \varepsilon^{(t+\Delta t) \mathbf{e}_p^*} \right] \mathbf{n} = \mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}} - \mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}_p} \quad \text{em } \partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega \quad (23)$$

Como não se conhece a função $\mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}}$, utiliza-se em seu lugar, como estimativa, a tensão média, $\langle \mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}_p} \rangle_m$, dos valores calculados no elemento $\mathcal{K}$ e seus vizinhos. Dessa forma, a condição (23) torna-se:

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \Big|_{t+\Delta t \mathbf{u}_p} \varepsilon^{(t+\Delta t) \mathbf{e}_p^*} \right] \mathbf{n} = \langle \mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}_p} \rangle_m - \mathbf{t}^{(t+\Delta t) \mathbf{u}_p} \quad \text{em } \partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega \quad (24)$$

Para se obter a forma aproximada de Galerkin do problema (21), considera-se o seguinte espaço de aproximação:

$$\mathcal{X}_{p+1}^0(\mathcal{K}) = \{ \mathbf{v}_{p+1}^0 \in \mathcal{X}_{p+1}(\mathcal{K}); \Pi_p(\mathbf{v}_{p+1}^0) = 0; \mathbf{v}_{p+1}^0 = 0 \text{ em } \partial\mathcal{K} \cap \Gamma_D \} \quad (25)$$

O espaço de funções $\mathcal{X}_{p+1}^0(\mathcal{K})$ é definido de forma análoga à utilizada em [4] para o caso de análise linear. Considera-se que a maior parcela do erro seja de um grau superior ao grau polinomial máximo aproximado pela solução $^{t+\Delta t} \mathbf{u}_p$. Sendo assim, o espaço $\mathcal{X}_{p+1}^0(\mathcal{K})$ reúne as funções $\mathbf{v}_{p+1}^0$ que pertencem ao espaço $\mathcal{X}_{p+1}(\mathcal{K})$, anulam-se em Γ_D e que são ortogonais a $\mathcal{X}_p(\mathcal{K})$ no sentido definido pelo operador de interpolação local Π_p . Esse operador realiza a projeção de funções do espaço de Hilbert sobre o espaço das funções de aproximação $\mathcal{X}_p(\mathcal{K})$, ou seja:

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathcal{H}^1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{X}_p(\mathcal{K}) \\ \mathbf{v}_p|_{\mathcal{K}} &= \Pi_p(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (26)$$

Sejam, então, a aproximação $^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_p$ da função $^{t+\Delta t} \mathbf{e}_p^*$, denominada função indicadora de erro, e a função teste $\mathbf{v}_{p+1}^0$, construídas como:

$$^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_p = (\Phi_{p+1}^0)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{I} \quad (27)$$

$$\mathbf{v}_{p+1}^0 = (\Phi_{p+1}^0)^T \mathbf{V}^0 \quad (28)$$

onde os seguintes vetores e matrizes são definidos:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} (\mathbf{I}^{\mathcal{K}})^T &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b_{1q_1(p)+1}^x & b_{1q_1(p)+1}^y & \cdots & b_{1q_1(p+1)}^x & b_{1q_1(p+1)}^y & \cdots \\ & & & b_{Nq_N(p)+1}^x & b_{Nq_N(p)+1}^y & \cdots \end{bmatrix} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}^0)^T &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c_{1q_1(p)+1}^x & c_{1q_1(p)+1}^y & \cdots & c_{1q_1(p+1)}^x & c_{1q_1(p+1)}^y & \cdots \\ & c_{Nq_N(p)+1}^x & c_{Nq_N(p)+1}^y & \cdots & c_{Nq_N(p+1)}^x & c_{Nq_N(p+1)}^y \end{bmatrix} \\
(\Phi_{p+1}^0)^T &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} p_{1q_1(p)+1}\mathcal{N}_1 & 0 & \cdots & p_{1q_1(p+1)}\mathcal{N}_{q_1(p+1)} \\ 0 & p_{1q_1(p)+1}\mathcal{N}_1 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & p_{Nq_N(p)+1}\mathcal{N}_N & 0 \\ p_{1q_1(p+1)}\mathcal{N}_{q_1(p+1)} & \cdots & 0 & p_{Nq_N(p)+1}\mathcal{N}_N \\ & \cdots & p_{Nq_N(p+1)}\mathcal{N}_{p_N(p+1)} & 0 \\ & \cdots & 0 & p_{Nq_N(p+1)}\mathcal{N}_{p_N(p+1)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

O sistema de equações resultante para o elemento $\mathcal{K}$ no passo $t + \Delta t$ pode ser representado na forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{er}}^{\mathcal{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{I}^{\mathcal{K}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{\mathcal{K}} \tag{32}$$

onde são empregados:

- matriz de rigidez (em que $\mathbf{C}_{\text{tg}}$ representa a expressão tangente para a relação tensão-deformação no modelo de dano de Mazars, [13]):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{er}}^{\mathcal{K}} = \iint_{\mathcal{K}} (\mathbf{B}_{p+1}^0)^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_{\text{tg}} \mathbf{B}_{p+1}^0 l_z dx dy; \quad \text{sendo} \quad \mathbf{B}_{p+1}^0 = \mathbf{L}(\Phi_{p+1}^0)^T \tag{33}$$

- vetor de forças residuais nodais generalizadas:

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{\mathcal{K}} &= \iint_{\mathcal{K}} (\Phi_{p+1}^0)^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} l_z dx dy - \iint_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\Phi_{p+1}^0) \boldsymbol{\sigma}(\Phi_{p+1}^0) l_z dx dy {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} \\
&+ \int_{\partial\mathcal{K} \cap \Gamma_N} (\Phi_{p+1}^0)^T {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{t}} l_z ds + \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\Omega} (\Phi_{p+1}^0)^T \langle \mathbf{t}^{(t+\Delta t)} \mathbf{u}_p \rangle_m l_z ds \\
&+ \int_{\partial\mathcal{K}} (\Phi_{p+1}^0)^T {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{\mathcal{K}} l_z ds
\end{aligned} \tag{34}$$

Um comentário específico a respeito do vetor ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{\mathcal{K}}$, que aparece na (34) merece registro. O problema variacional que resulta no sistema (32) pela maneira como é definido, isto é, por elemento e sem condições de contorno essenciais, a menos que seja um elemento que intercepta a porção do contorno Γ_D , caracteriza-se como um problema de Neumann. Para que apresente solução única é necessário que os dados, representados por $\mathbf{r}_\Gamma$, $\mathbf{r}_\Omega$, $\mathbf{t}^{(t+\Delta t)} \mathbf{u}_p$ e $\langle \mathbf{t}^{(t+\Delta t)} \mathbf{u}_p \rangle_m$ constituam vetores equilibrados. Para satisfazer essa condição, uma nova distribuição de tensões que equilibrem esses dados deve ser introduzida ao problema, de forma consistente com sua formulação. Para isso emprega-se a estratégia

proposta em [16] em que essas tensões equilibradoras são determinadas ao longo da face dos elementos, gerando-se um vetor que, para o presente problema, é representado ao final de cada passo $t + \Delta t$ pelo termo ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{\mathcal{K}}$. No caso específico do MEEG, apenas as componentes de forças residuais associadas à PU são importantes para o equilíbrio e, por isso, as demais componentes, atreladas às funções enriquecidas, não são consideradas no equilíbrio dos dados utilizados no sistema (32).

Depois que a função ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p$ é determinada para cada elemento, uma medida global do erro pode ser introduzida, empregando-se valores locais da norma energia:

$$\|{}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p\|_u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\mathcal{K} \in \Omega} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}}^2} \quad (35)$$

onde para cada elemento tem-se:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \|{}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p\|_{u(\mathcal{K})} = \left[\iint_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}^T({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p) \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p) l_z \, dx \, dy \right]^{1/2} \quad (36)$$

Resta, finalmente, inferir sobre a qualidade de ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}_p$, obtida pela (32) a partir das contribuições de cada elemento, como aproximação de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_p$ global. Como já mencionado anteriormente, o cálculo proposto para o estimador foi decorrente da não-linearidade do problema analisado. É importante para sua validade que haja um controle sobre o tamanho dos passos no procedimento de solução incremental: quanto menores, melhor é a aproximação resultante.

Um outro aspecto a ser considerado e proveniente, agora, da suposta validade do estimador, está relacionado à possibilidade de controle do erro a cada passo mediante uma análise adaptativa. Nesse sentido, a medida local (36) poderia ser empregada como indicador para o enriquecimento da solução segundo o MEEG em determinadas regiões do meio, evitando-se que a resposta ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p$ afaste-se muito de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ ao longo da história de carregamento.

6. CHAPA DE CONCRETO

No exemplo descrito a seguir, procura-se avaliar a qualidade da medida global (35) como estimativa do erro para um problema com não-linearidade física. A cada passo de carga, a norma (35), calculada pela contribuição de valores locais, é comparada a uma medida clássica sobre todo o volume, baseada em energia, resultante do seguinte produto interno:

$${}^{t+\Delta t}(\boldsymbol{\sigma}_{\text{er}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{er}}) = \sqrt{\iint_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p)] [\boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_p)] l_z \, dx \, dy} \quad (37)$$

A razão entre (35) e (37) determina o índice de efetividade global θ . Se esse índice estiver

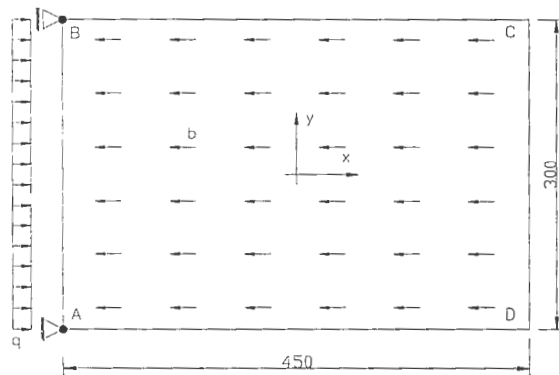


Figura 6. Chapa de concreto - geometria e condições de contorno - medidas em mm

próximo da unidade, significa que a medida (35) é capaz de representar bem o produto interno (37).

O problema analisado está ilustrado na Figura 6 e corresponde a uma chapa de concreto, com espessura $l_z = 10$ cm, solicitada à compressão por uma força volúmica $b = 100$ MN/m³. As condições de contorno naturais são representadas por uma tensão de reação $q = 45$ MN/m² ao longo da face AB , que impede o seu deslocamento na direção x . Os vínculos utilizados como condições de contorno essenciais tem a função de eliminar os movimentos de corpo rígido.

A análise, considerando-se um estado plano de tensão, foi realizada com aproximação linear, empregando-se a malha da Figura 7(a), portanto, por simplificação, sem o enriquecimento do MEFG. Para o cálculo da medida de erro (35), aplicou-se o procedimento descrito na seção (5). Para o emprego da (37), adotou-se a solução numérica encontrada com a malha de 2400 elementos, ilustrada na Figura 7(b).

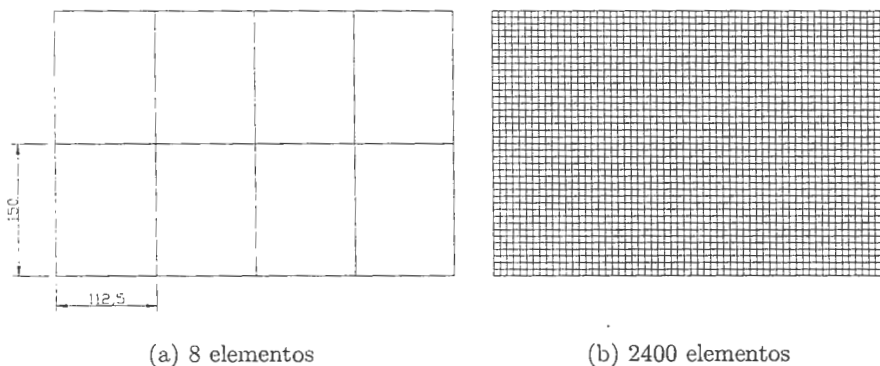


Figura 7. Malhas utilizadas com aproximação linear - medidas em mm

Para simular o comportamento do meio, utilizou-se o Modelo de Mazars, neste caso com abordagem local. Os seguintes parâmetros do modelo foram adotados:

$$\begin{array}{llll} A_T = 0,7 & B_T = 8\,000 & A_C = 0,85 & B_C = 1\,050 \\ \varepsilon_{d0} = 0,000\,067 & E = 29\,200 \text{ MPa} & \nu = 0,2 & r_{nl} = 0 \end{array}$$

Para a representação das funções indicadoras de erro (27) em cada elemento $\mathcal{K}$ empregou-se o seguinte espaço de funções bolha:

$$\mathcal{X}_2^0(\mathcal{K}) = \{v_2^0 \in \mathcal{X}_2(\mathcal{K}) \subset \mathcal{H}^1; \Pi_p(v_2^0) = 0, v_2^0 = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad (38)$$

gerado pelas funções de forma associadas a cada nó x_j :

$$(\Phi_2^0)_j^T = \begin{bmatrix} N_j \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right) & 0 & N_j \left(\frac{y - y_j}{h_j} \right) & 0 \\ 0 & N_j \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right) & 0 & N_j \left(\frac{y - y_j}{h_j} \right) \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde h_j corresponde à medida da diagonal dos elementos usados para a análise.

Para a resolução numérica e aplicação do MRE foram feitas as seguintes considerações:

montagem da matriz de rigidez: formulação secante para as matrizes utilizadas em (14) e formulação tangente, de acordo com as expressões (33) para o cálculo das funções de erro;

integração numérica: na malha de 2400 elementos foram usados 2×2 pontos de Gauss-Legendre. Já na malha de 8 elementos, para melhor representar a distribuição do dano foram empregados 12×12 pontos de Gauss-Lobatto. O emprego da quadratura de Gauss-Lobatto visou facilitar o cálculo das parcelas da expressão (34) definidas nas faces dos elementos;

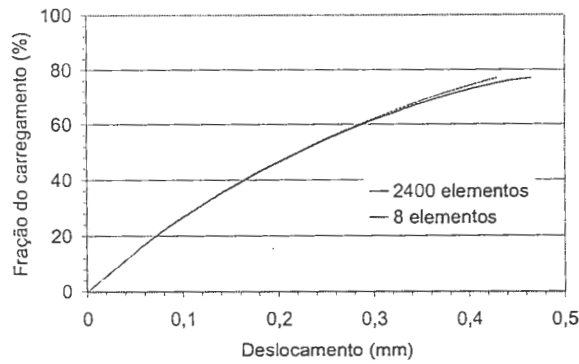


Figura 8. Resposta global da estrutura

equilíbrio: a convergência do processo iterativo de solução do Método de Newton-Raphson foi averiguada pelo critério em energia, adotando-se uma tolerância de 0,001 % com relação ao primeiro passo elástico. A força volúmica b e a de superfície q foram introduzidas em 65 incrementos: um primeiro passo com 10 % do total do carregamento, seguido de 26 passos com 2 % e outros 38 com 1 %. A capacidade máxima encontrada para a chapa equivale a 76 % do carregamento inicialmente previsto, correspondente ao passo 41. Os resultados em deslocamentos são exibidos no gráfico da Figura 8; no eixo das abscissas representam-se os deslocamentos horizontais medidos no ponto médio da face CD da Figura 6.

A título de ilustração, na Figura 9 mostram-se as distribuições de dano, ao final do passo 41, para as análises realizadas com as malhas de 2400 e 8 elementos.

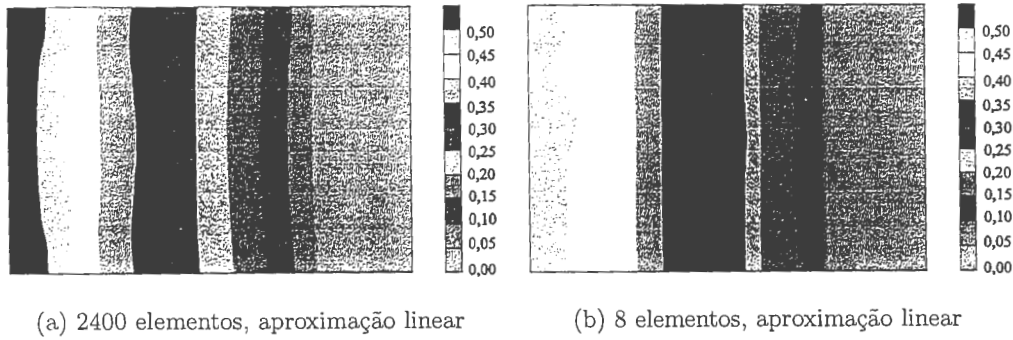


Figura 9. Mapa da distribuição do dano no passo 41

O erro relativo estimado para a aproximação da malha com 8 elementos foi de 12,84 % para o primeiro passo elástico, chegando a 16,55 % ao final do passo 41. A medida $||^{t+\Delta t}\tilde{e}_p||_u$ foi avaliada por meio do índice global de efetividade θ , calculado em cada passo e representado no gráfico da Figura 10. De acordo com os resultados obtidos, conclui-se pela boa qualidade do estimador de erro adotado. Deve-se, entretanto, observar que determinadas características deste problema favoreceram a excelência dos resultados. O dano, como mostrado nos “mapas de dano” da Figura 9 está limitado a 0,6. Como consequência, a relação tensão-deformação é ainda ascendente em todos os pontos do meio e, por isso, a matriz tangente pôde ser usada nos problemas locais para ao cálculo das funções indicadoras de erro. Além disso, foram usados passos bem pequenos, especialmente a partir do instante em que se observa uma maior evolução do dano.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, a formulação do MEFG foi brevemente revista com o objetivo de introduzi-la no contexto da análise não-linear física. Algumas considerações foram feitas para tal abordagem e o problema de uma viga de concreto armado foi então apresentado.

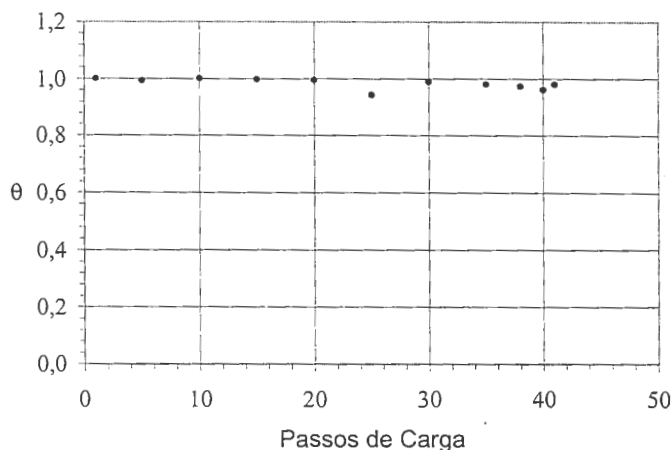


Figura 10. Índice de efetividade global em cada passo

Os resultados mostraram a eficiência da técnica de enriquecimento nodal do MEFG para aproximar a resposta global da estrutura. A principal vantagem com relação às análises convencionais com o MEF consiste na simplicidade com que o refinamento p não-homogêneo pode ser realizado, sem a necessidade que condições de restrição sejam impostas às funções de aproximações entre elementos. Para melhor aproveitar a potencialidade dessa estratégia, visando o estabelecimento de um procedimento p -adaptativo, foi proposta uma medida de erro baseada no MRE. Sua avaliação foi feita em um problema de uma chapa de concreto solicitada por forças volúmicas que provocam a danificação da peça por esmagamento. Os bons resultados obtidos apontam para o emprego dessas medidas de erro como indicadores de enriquecimento nodal em um procedimento p -adaptativo, cuja implementação será assunto de um próximo artigo.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) do Brasil.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Strouboulis, I. Babuška, K. Copps, *The design and analysis of the generalized finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181(1-3), (2000), 43–69.
- [2] C. A. Duarte, I. Babuška, J. Oden, *Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems*, Computers & Structures, 77(2), (2000), 215–232.

- [3] J. Mazars, *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*, Doutorado, Université Paris 6 (1984).
- [4] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, T. A. Westermann, *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 2. a posteriori error estimation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 77, (1989), 113–180.
- [5] I. Babuška, G. Caloz, J. E. Osborn, *Special finite element method for a classe of second order elliptic problems whith rough coefficients*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 31(4), (1994), 745–981.
- [6] J. M. Melenk, I. Babuška, *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, (1996), 289–314.
- [7] C. A. Duarte, J. T. Oden, *Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem*, Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin (1995).
- [8] C. A. Duarte, J. T. Oden, *H-p Clouds-an h-p Meshless Method*, in *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc. (1996), pp. 1–34.
- [9] J. T. Oden, C. A. Duarte, O. C. Zienkiewicz, *A new cloud-based hp finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 153, (1998), 117–126.
- [10] J. T. Oden, J.Ñ. Reddy, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Pure and Applied Mathematics, John Willey & Sons, Inc. (1976).
- [11] T. Belytschko, Y. Lu, L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, (1994), 229–256.
- [12] L. Davenne, C. Saouridis, J. M. Piau, *Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibres*, Série: Béton 267 478, Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics (1989).
- [13] F. B. Barros, *Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear*, Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (2002).
- [14] M. S. Álvares, *Estudo de um modelo de dano para o concreto: Formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos.*, Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (1993).
- [15] A. Ranjbaran, *Embedding of reinforcements in reinforced concrete elements implemented in DENA*, Computers & Structures, 40(4), (1991), 925–930.
- [16] P. Ladevèze, E. A. W. Maunder, *A general method for recovering equilibrating element tractions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 137, (1996), 111–151.