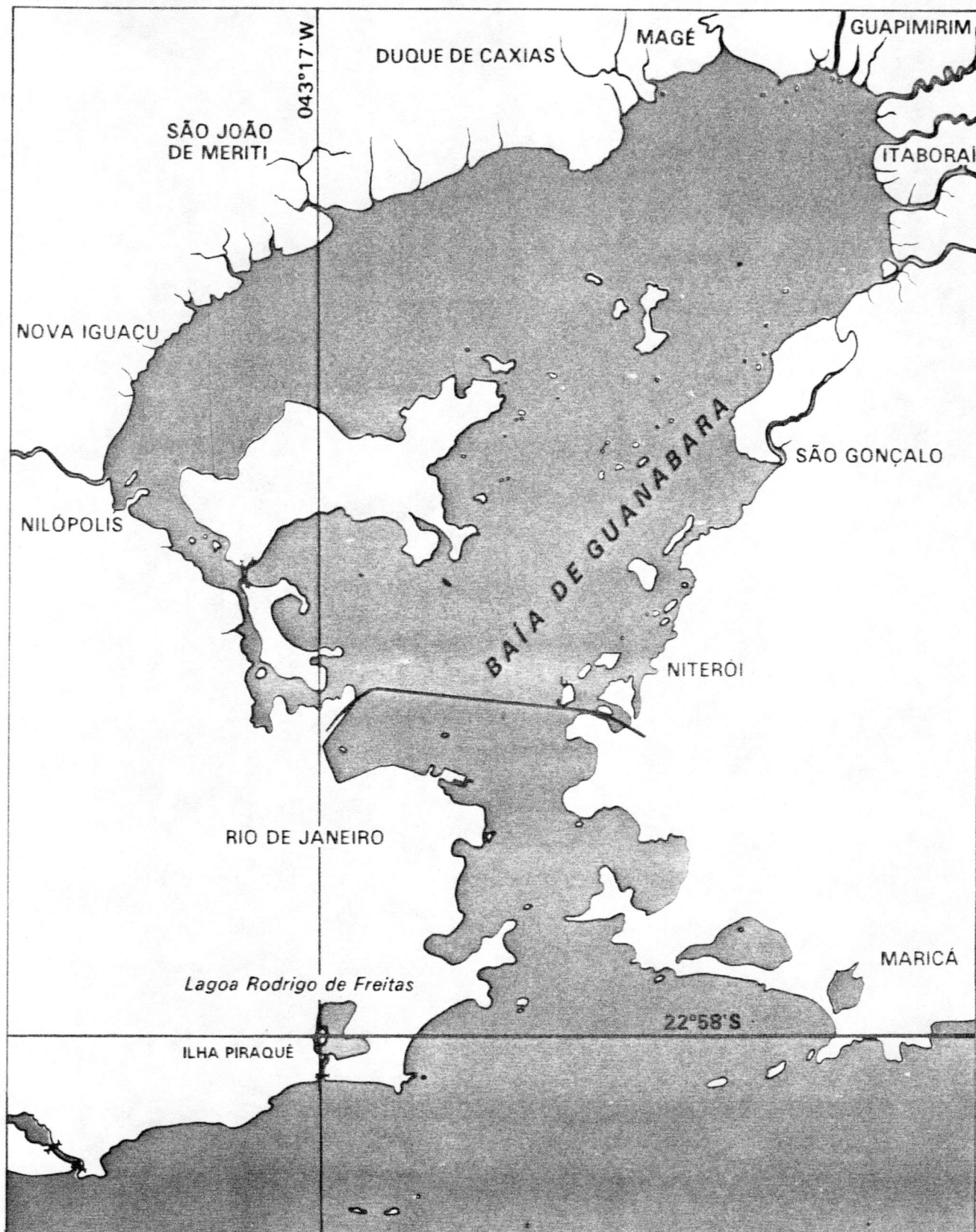




SOCIEDADE BRASILEIRA DE CARTOGRAFIA
XVI CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA



Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, de 04 a 08 de outubro de 1993

ANAIIS - VOLUME 3

Nº USP. 1.03.01.00-2 ✓



finep



NACIONAL

Método Topográfico para o Posicionamento Tridimensional de um Ponto <i>Daniele Soares Ibiapina, Irineu da Silva,</i> <i>Oziride Manzole Neto,</i>	261 a 267
Testes Sobre Eficiência de Modelos Geopotenciais no Brasil <i>Nelsi e Côgo de Sá</i>	268 a 277
Arco de Meridiano: Uma nova Abordagem. <i>Leonardo Castro de Oliveira,</i> <i>Luiz Felipe Ferreira</i>	278 a 291
GPS Interferométrico Aplicado a Levantamentos Gravimétricos na Bacia do Paraná <i>Marcio Henrique Oliveira de Aquino</i> <i>Paulo Roberto Corrêa de Sá e Benevides,</i> <i>Reinaldo Nunes de Paiva</i>	292 a 298
GPS com Precisão Submétrica Aplicado a Levantamentos Sísmicos Terrestres. <i>Marcio Henrique Oliveira de Aquino,</i> <i>Gilberto da Silva Ferrão</i>	299 a 304

MÉTODO TOPOGRÁFICO PARA O POSICIONAMENTO
TRIDIMENSIONAL DE UM PONTO

TOPOGRAPHIC METHOD FOR TRIDIMENSIONAL
POSITIONING OF A POINT

± 12 m

Daniele Soares Ibiapina
Irineu da Silva, PhD 571598
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Transportes
Cx. Postal 359, CEP 13560
São Carlos - São Paulo

152781
Oziride Manzolê Neto, PhD
Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática
Cx. Postal 359, CEP 13560
São Carlos - São Paulo

RESUMO

Com o advento do teodolito eletrônico houve um avanço nos sistemas de medição com teodolitos que inovaram as medições tridimensionais de pontos para a metrologia industrial, indústria aeronáutica, indústria naval, monitoramento de estruturas e outras aplicações. Este trabalho tem como objetivo descrever um método de medição com teodolitos para o posicionamento tridimensional de um ponto, realizando-se medidas angulares redundantes e eliminando a necessidade de tocar o objeto medido. O método é denominado **Interseção Espacial Analítica com Superdeterminação de Medidas**. As coordenadas espaciais do ponto lançado são calculadas, utilizando-se um modelo analítico. Para tornar as medidas redundantes coerentes com o modelo utilizado, propõe-se que a compensação de medidas seja realizada pelo cálculo da média aritmética.

ABSTRACT

The approach of the electronic theodolite has started an advancement in the measuring systems with theodolites, which has improved tridimensional measurements of object points for industrial metrology, aeronautics and naval industries, structural monitoring and other applications. This research has the objective of describing a method of measurement with theodolites for tridimensional positioning of a point, producing redundant observations of angles and eliminating the necessity of touching the measured object. The method is denominated **Analytical Spatial Intersection with Superdetermination of Measures**. The spatial coordinates of the object point are computed by an analytical model. To make the redundant observations coherent with the model, it is proposed to adjust the measures by the computation of the arithmetic mean.

0878932

1. INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia e da informática, a mensuração recebeu um novo enfoque em termos de instrumentação, métodos de medição e tratamento de dados. Esse avanço simplificou diversas etapas do trabalho do engenheiro e ampliou as aplicações dos sistemas de medição para a indústria naval e aeronáutica, a metrologia industrial, o monitoramento de estruturas, a calibração de instrumentos, etc. Alguns procedimentos de campo foram automatizados, algumas metodologias modificadas e métodos de cálculo foram aperfeiçoados. Nesse último caso, inclui-se os métodos de cálculo para o posicionamento tridimensional de pontos.

A determinação do posicionamento tridimensional de um ponto é um dos problemas fundamentais da mensuração e pode ser solucionado utilizando-se diferentes métodos de cálculo de coordenadas espaciais. O método de Interseção Espacial Analítica com Superdeterminação de Medidas, apresentado neste trabalho, considera a Terra como um plano e supõe, portanto, que as distâncias envolvidas sejam suficientemente curtas (da ordem de dezenas de metros) para garantir essa hipótese.

2. MÉTODO PROPOSTO

O método de Interseção Espacial Analítica é um método de medição com teodolitos em que são realizadas medidas angulares sem a necessidade de tocar o objeto medido.

O método consiste, basicamente, em visar simultaneamente o ponto lançado através de dois teodolitos. As duas linhas de visada, teoricamente, são retas que interceptam-se no espaço e podem ser representadas por vetores localizados nas estações de teodolitos (figura 1).

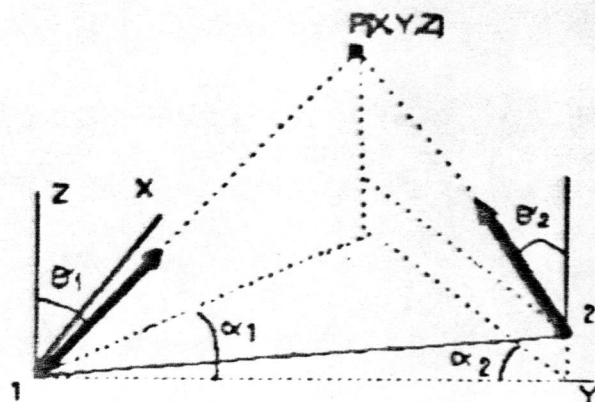


Figura 1 - Interseção Espacial Analítica

Na prática as medidas angulares que estabelecem as linhas de visada estão sujeitas a erros. Esses erros podem fazer com que as linhas de visada não mais interceptem-se no espaço.

Quando não há interseção de visadas, há infinitas posições entre e ao longo das retas de interseção onde o ponto lançado pode estar. Nesse caso é preciso utilizar um recurso matemático para limitar a região onde o ponto está situado. Para minimizar a região de posicionamento do ponto, utilizou-se a teoria de que a menor distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum entre elas.

Para determinar o posicionamento do ponto, ao longo do segmento de reta perpendicular compreendido entre as linhas de visada, adotou-se a hipótese de que **todas as leituras realizadas possuem pesos iguais**. Portanto, a posição que torna mínima a distância entre as linhas de visada é o **ponto médio** do segmento da reta perpendicular comum entre elas (figura 2).

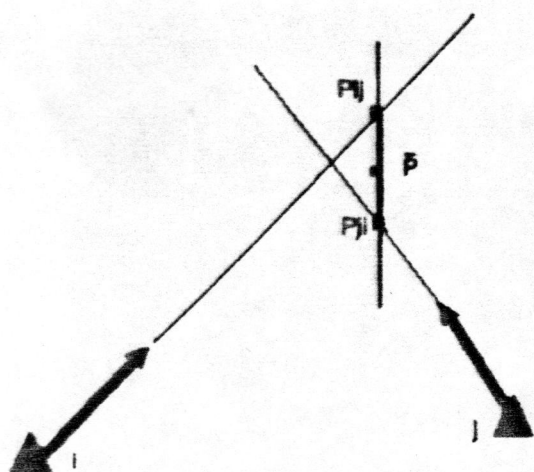


Figura 2 - Localização do ponto médio na perpendicular comum

A configuração mínima para determinar o posicionamento tridimensional de um ponto utilizando o método de Interseção Espacial Analítica são dois pontos de coordenadas conhecidas. Se houver uma configuração de três ou mais pontos, diz-se que há superdeterminação de medidas (figura 3).

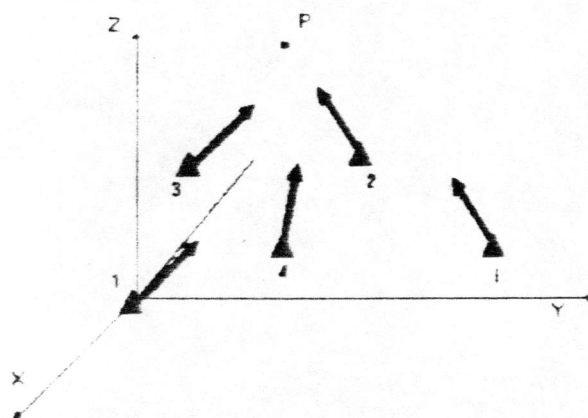


Figura 3 - Sistema Superdeterminado

Quando o sistema é superdeterminado, como o da figura 3, a solução ótima para o posicionamento do ponto lançado utilizando o método de Interseção Espacial Analítica pode ser obtida por dois modos.

O primeiro é a compensação de medidas pelo método dos mínimos quadrados. O segundo é uma variante do primeiro e consiste em compensar as medidas resolvendo todas as interseções possíveis ou seja, fazendo a combinação de todos os pontos da rede, dois a dois. Neste trabalho utilizou-se o segundo modo.

3. PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

Os procedimentos de cálculo para determinar o posicionamento de um ponto, utilizando o método de Interseção Espacial Analítica (figura 4) foram os seguintes:

3.1. Cálculo do vetor perpendicular comum n_{ij} a w_i e w_j , localizado no ponto i :

Pela definição de produto vetorial sabe-se que

$$n_{ij} = w_i \wedge w_j$$

Onde:

n_{ij} = produto vetorial de w_i e w_j

w_i e w_j = vetores localizados nos pontos i e j , respectivamente

Considerando a figura 1, tem-se que as projeções dos vetores w_i e w_j , no sistema de referência estabelecido, são dadas por:

$$w_i = (\sin\theta_i \sin\alpha_i, \sin\theta_i \cos\alpha_i, \cos\theta_i)$$

$$w_j = (\sin\theta_j \sin\alpha_j, \sin\theta_j \cos\alpha_j, \cos\theta_j)$$

Onde:

w_i e w_j = vetores localizados nos pontos i e j , respectivamente

θ_i e θ_j = ângulos zenitais medidos

α_i e α_j = ângulos horizontais medidos

$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

$j = 2, 3, 4, \dots, n$

n = número de pontos da rede

3.2. Determinação do plano A_{ij} que contém w_i e n_{ij} localizados no ponto i :

Os vetores w_i e n_{ij} localizados no ponto i , aqui denominado de ponto de origem, formam um plano A_{ij} (figura 4) no qual as coordenadas de um ponto qualquer $P_{A_{ij}}$ pertencente ao plano são dadas por:

$$\begin{aligned} x_{A_{ij}} &= x_i + s_i x_{w_i} + t_i x_{n_{ij}} \\ y_{A_{ij}} &= y_i + s_i y_{w_i} + t_i y_{n_{ij}} \\ z_{A_{ij}} &= z_i + h_i + s_i z_{w_i} + t_i z_{n_{ij}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Onde:

x_i, y_i, z_i = coordenadas espaciais do ponto i

h_i = altura do teodolito no ponto i

$x_{w_i}, y_{w_i}, z_{w_i}$ = coordenadas do vetor w_i

$x_{n_{ij}}, y_{n_{ij}}, z_{n_{ij}}$ = coordenadas do vetor n_{ij}

s_i e t_i = parâmetros do plano A_{ij}

3.3. Determinação da reta de interseção r_j localizada no ponto j :

As coordenadas de um ponto qualquer P_{r_j} pertencente a reta de interseção r_j , estabelecida pelo vetor w_j e com origem no ponto j , são dadas por:

$$\begin{aligned} x_{r_j} &= x_j + m_j x_{w_j} \\ y_{r_j} &= y_j + m_j y_{w_j} \\ z_{r_j} &= z_j + h_j + m_j z_{w_j} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Onde:

x_j, y_j, z_j = coordenadas espaciais do ponto j

h_j = altura do teodolito no ponto j

$x_{w_j}, y_{w_j}, z_{w_j}$ = coordenadas do vetor w_j

m_j = parâmetro da reta r_j

3.4. Cálculo do ponto de interseção P_{ij} onde a reta r_j intercepta o plano A_{ij} :

No ponto P_{ij} onde a reta de interseção r_j intercepta o plano A_{ij} , as coordenadas do ponto $P_{A_{ij}}$ são iguais às coordenadas do ponto P_{r_j}

Portanto:

$$\begin{aligned} x_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= x_{r_j}(m_{ij}) \\ y_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= y_{r_j}(m_{ij}) \\ z_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= z_{r_j}(m_{ij}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

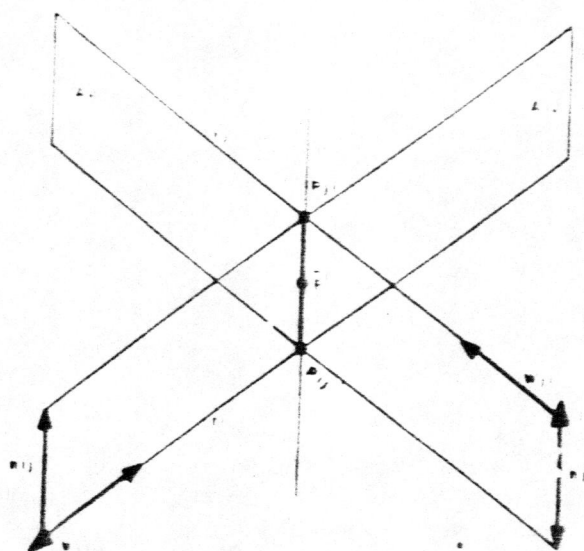


Figura 4 - Representação do posicionamento tridimensional de um ponto determinado pelo método de Interseção Espacial Analítica

Substituindo o conjunto de equações (1.1) e (1.2) em (1.3) estabelece-se o seguinte sistema de equações :

$$\begin{aligned} s_j x_{wj} + t_j x_{nj} - m_j x_{wj} &= x_j - x_i \\ s_j y_{wj} + t_j y_{nj} - m_j y_{wj} &= y_j - y_i \\ s_j z_{wj} + t_j z_{nj} - m_j z_{wj} &= z_j + h_j - (z_i + h_i) \end{aligned}$$

As incógnitas desse sistema são os parâmetros s_j, t_j, m_j . Com os valores das incógnitas determina-se as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_j , substituindo os valores de s_j e t_j no conjunto de equações (1.1) ou substituindo o valor de m_j no conjunto de equações (1.2). Optando por substituir o parâmetro m_j da reta de interseção r_j obtém-se que as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_j são dadas por :

$$\begin{aligned} x_j &= x_i + m_{0j} x_{wj} \\ y_j &= y_i + m_{0j} y_{wj} \\ z_j &= z_i + h_j + m_{0j} z_{wj} \end{aligned}$$

Onde :

x_i, y_i, z_i = coordenadas espaciais do ponto i
 h_i = altura do teodolito no ponto i
 x_{wj}, y_{wj}, z_{wj} = coordenadas do vetor w_j
 m_{0j} = parâmetro que indica onde a reta r_j interceptou o plano A_{ij}

3.5. Cálculo do vetor perpendicular comum n_{ij} a w_i e w_j , localizado no ponto j :

$$n_{ij} = w_j \wedge w_i$$

Onde :

$$n_{ij} = - n_{ji} \text{ (item 3.1)}$$

3.6. Determinação do plano A_{ij} que contém w_j e n_{ij} localizados no ponto j :

Da mesma forma que no item 3.2, os vetores w_j e n_{ij} localizados no ponto j , aqui denominado de ponto de origem, formam um plano A_{ij} (figura 4) no qual as coordenadas de um ponto qualquer P_{Aij} pertencente ao plano são dadas por :

$$\begin{aligned} x_{Aij} &= x_j + s_j x_{wj} + t_j x_{nij} \\ y_{Aij} &= y_j + s_j y_{wj} + t_j y_{nij} \\ z_{Aij} &= z_j + h_j + s_j z_{wj} + t_j z_{nij} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Onde :

x_j, y_j, z_j = coordenadas espaciais do ponto j
 h_j = altura do teodolito no ponto j
 x_{wj}, y_{wj}, z_{wj} = coordenadas do vetor w_j
 $x_{nij}, y_{nij}, z_{nij}$ = coordenadas do vetor n_{ij}
 s_j e t_j = parâmetros do plano A_{ij}

3.7. Determinação da reta de interseção r_i localizada no ponto i :

As coordenadas de um ponto qualquer P_i pertencente a reta de interseção r_i , estabelecida pelo vetor w_i e com origem no ponto i , são dadas por :

$$\begin{aligned} x_{ri} &= x_i + m_{0i} x_{wi} \\ y_{ri} &= y_i + m_{0i} y_{wi} \\ z_{ri} &= z_i + h_i + m_{0i} z_{wi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Onde :

x_i, y_i, z_i = coordenadas espaciais do ponto i
 h_i = altura do teodolito no ponto i
 x_{wi}, y_{wi}, z_{wi} = coordenadas do vetor w_i
 m_{0i} = parâmetro da reta r_i

3.8. Cálculo do ponto de interseção P_i
onde a reta r_i intercepta o plano A_{ij} :

No ponto P_i onde a reta de interseção r_i intercepta o plano A_{ij} , as coordenadas do ponto $P_{A_{ij}}$ são iguais as coordenadas do ponto P_i . Portanto :

$$\begin{aligned} x_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= x_{r_i}(m_{ij}) \\ y_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= y_{r_i}(m_{ij}) \\ z_{A_{ij}}(s_{ij}, t_{ij}) &= z_{r_i}(m_{ij}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Substituindo o conjunto de equações (1.4) e (1.5) em (1.6), estabelece-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} s_{ij} x_{w_i} + t_{ij} x_{n_{ij}} - m_{ij} x_{w_i} &= x_i - x_j \\ s_{ij} y_{w_i} + t_{ij} y_{n_{ij}} - m_{ij} y_{w_i} &= y_i - y_j \\ s_{ij} z_{w_i} + t_{ij} z_{n_{ij}} - m_{ij} z_{w_i} &= z_i + h_i - (z_j + h_j) \end{aligned}$$

As incógnitas desse sistema são os parâmetros s_{ij}, t_{ij}, m_{ij} . Com os valores das incógnitas determina-se as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_{ij} substituindo os valores de s_{ij} e t_{ij} no conjunto de equações (1.4) ou substituindo o valor de m_{ij} no conjunto de equações (1.5). Optando por substituir o parâmetro m_{ij} da reta de interseção r_i obtém-se que as coordenadas espaciais do ponto de interseção P_{ij} são dadas por :

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i + m_{ij} x_{w_i} \\ y_{ij} &= y_i + m_{ij} y_{w_i} \\ z_{ij} &= z_i + h_i + m_{ij} z_{w_i} \end{aligned}$$

Onde

x_i, y_i, z_i = coordenadas espaciais do ponto i

h_i = altura do teodolito no ponto i

$x_{w_i}, y_{w_i}, z_{w_i}$ = coordenadas do vetor w_i

m_{ij} = parâmetro que indica onde a reta r_i interceptou o plano A_{ij}

3.9. Determinação do ponto médio $\bar{P}$
entre os pontos de interseção P_j e P_i :

Os dois pontos calculados P_j e P_i são os pontos lançados pela interseção ij , pertencentes a reta perpendicular comum entre as linhas de visada. Com a hipótese de que as leituras angulares realizadas possuem pesos iguais, o posicionamento do ponto lançado é o ponto médio entre os pontos de interseção P_j e P_i (figura 2). Portanto :

$$\bar{P} = \frac{P_j + P_i}{2}$$

As coordenadas espaciais do ponto médio $\bar{P}$ são dadas por :

$$\bar{x} = \frac{x_j + x_i}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_j + y_i}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{z_j + z_i}{2}$$

Quando há superdeterminação de medidas as coordenadas espaciais do ponto lançado são compensadas pelo cálculo da média aritmética das soluções de todas as interseções possíveis de serem realizadas. Nesse caso, as coordenadas espaciais do ponto lançado são dadas por

$$x = \frac{x_{12} + x_{13} + x_{14} + \dots + x_{1i} + \dots}{m}$$

$$y = \frac{y_{12} + y_{13} + y_{14} + \dots + y_{1i} + \dots}{m}$$

$$z = \frac{z_{12} + z_{13} + z_{14} + \dots + z_{1i} + \dots}{m}$$

Onde :

x, y, z = coordenadas espaciais
compensadas do ponto lançado

x_i, y_i, z_i = coordenadas espaciais do ponto
lançado obtidas por cada interseção

$i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

$j = 2, 3, 4, \dots, n$

n = número total de interseções

4. CONCLUSÃO

O método de Interseção Espacial Analítica com Superdeterminação de Medidas possui as seguintes vantagens em relação a outros métodos de cálculo :

- ♦ **Conversão imediata das medidas angulares em coordenadas espaciais** (tempo real) Havendo uma maior economia de tempo, se os teodolitos forem conectados a um computador.

- ♦ **Não há necessidade de tocar o objeto medido**, com isso não produz-se tensões, não interrompe-se o trabalho do objeto e pode ser utilizado para medições de difícil acesso.

- ♦ As coordenadas espaciais do ponto são calculadas **concomitantemente**, como funções dos ângulos horizontais e verticais medidos, evitando-se assim a discrepância no posicionamento tridimensional do ponto.

- ♦ A compensação de medidas pelo cálculo da **média aritmética** requer cálculos simples e substitui o método dos mínimos quadrados.

- ♦ O método é baseado numa **rede livre de pontos** ou seja, todos os pontos podem ser compensados ao mesmo tempo.

As restrições do método estão relacionadas com a distância entre as estações de teodolitos,

que não devem ser muito curtas para garantir a reversibilidade das linhas de visada. Contudo, a empresa Leica publicou um artigo (Leica, TMS, 1992) onde foram realizados experimentos com distâncias entre teodolitos de 5 metros obtendo-se bons resultados. Outra restrição é a hipótese dos pesos iguais para as leituras. Pode ser recomendável uma ponderação de medidas.

Concluindo, este trabalho mostrou que, teoricamente, o método é viável e pode ser aplicado nos trabalhos práticos para o posicionamento tridimensional de pontos.

5. BIBLIOGRAFIA

- ALLAN, A.L. The Principles of Theodolite Intersection Systems, Survey Review, 29 (227): p 226-234, 1988.
- BOULOS, P. ; OLIVEIRA, I.C. Geometria Analítica - um tratamento vetorial, São Paulo, 382 p., 1986.
- CARNEIRO, A.F.T. ; BRANDÃO, A.C. Aplicação do Método de Interseção a Vante no Posicionamento Tridimensional de Estruturas, UFPR, Curitiba, 8p., 1992.
- HOWALD, P. Theorie des Erreurs 1, EPFL, Lausanne, 1990.
- IBIAPINA, D.S. Método de Cálculo das Coordenadas Espaciais de um Ponto com Superdeterminação de Medidas (Dissertação de Mestrado), USP, São Carlos, 71 p., 1993.
- LEICA HEERBRUGG, TMS - Theodolite Measuring System, Switzerland, 12 p., 1992.
- MOK, E. 3-D Intersection Applied to Verticality Checking, Survey Review, 30 (237): p 311-318, 1990.