

RT-MAP-8110

DOIS TEOREMAS SOBRE EQUAÇÕES INTEGRAIS
DE FREDHOLM

Ivan de Queiroz Barros

NOVEMBRO 1981

INTRODUÇÃO

No §1 - Preliminares encontram-se expostos definições e resultados utilizados no parágrafo 2.

Dentre estes as proposições 1.3, 1.13, 1.16 e o Teorema 1.22 são generalizações de resultados análogos de HÖNIG [2].

Em 1.14 indicamos sucintamente em que sentido a generalização se dá.

As propriedades 1.11, 1.12, 1.21, foram aqui introduzidas com vistas especificamente à demonstração dos Teoremas 2.6 e 2.9 do §2.

A demonstração dos resultados do §1 encontram-se em BARROS [1].

No §2 estão os resultados principais deste trabalho que são os Teorema 2.6 e Teorema 2.9.

Como ferramenta de demonstração generalizamos a técnica de SCHMIDT [5] começando pela generalização da definição de núcleos degenerado.

Introduzimos para o enunciado do Teorema 2.9 a definição de "alternativa fraca de Fredholm".

A proposição 2.2 foi extraída de PALAIS [3].

As funções consideradas são as funções λ -uniformemente contínuas com valores em espaços de Banach e as medidas são medidas aditivas vetoriais de semi-variação limitada.

§1. Preliminares

Os resultados deste parágrafo encontram-se demonstrados em BARROS [1].

1.1 Definição

Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma álgebra de sub-conjuntos de X .

Seja $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma partição de X onde $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, e $n \in \mathbb{N}$ é qualquer.

Os conjuntos $V_P \subset X \times X$ definidos por:

$$V_P = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i)$$

formam uma base de uma estrutura uniforme $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ em X a qual induz uma topologia $\mathcal{T}_\mathcal{A}$.

Seja W espaço de Banach.

As funções $f: X \rightarrow W$ uniformemente contínuas em relação a $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ serão chamadas funções $\mathcal{A}$ -uniformemente contínuas.

1.2 Observação

Os símbolos X e $\mathcal{A}$ terão sempre o significado descrito em 1.2, e Y, Z, W , denotarão espaços de Banach.

1.3 Proposição

Seja $f: X \rightarrow W$. São equivalentes:

- (1) Dado $\varepsilon > 0$ existe partição $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de X com $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, tal que

$$\|f - \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} f(t_i)\| < \varepsilon, \quad \forall t_i \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- (2) f é limite uniforme de funções simples.
 (3) f é $\mathcal{A}$ -uniformemente contínua.

1.4 Notação

Indicaremos por $U_{\mathcal{A}}(X, W)$ o espaço das funções $f: X \rightarrow W$, $\mathcal{A}$ -uniformemente contínuas. É um espaço de Banach com a norma definida por $\|f\| = \sup_{t \in X} \|f(t)\|$.

Os dois casos que consideraremos serão $W = Y$ e $W = L(Y)$.

1.5 Definição

Seja $B: Z \times Y \rightarrow W$ bi-linear contínua.

Seja $s: \mathcal{A} \rightarrow Z$ medida aditiva.

Definiremos $\tilde{s}_B: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, semi-variacao de s relativamente a B por:

$$\tilde{S}_B(A) = \sup \left\| \sum_{i=1}^n B(s(B_i), y_i) \right\|$$

onde o "sup" é extendido aos conjuntos finitos de pares (B_i, y_i) com $y_i \in Y$, $\|y_i\| \leq 1$, $B_i \in \mathcal{A}$ disjuntos e $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A$.

1.6 Observações

(1) Indicaremos o espaço das medidas aditivas $s: \mathcal{A} \rightarrow Z$ de semi-variância limitada por $SV_B(\mathcal{A}, Z)$.

É espaço de Banach com a norma definida por $\|s\|_B = \tilde{S}_B(X)$.

(2) Os casos que usaremos serão:

$B: L(Y) \times Y \rightarrow Y$ definida por $B(q, y) = qy$.

e $B_1: L(Y) \times L(Y) \rightarrow L(Y)$ definida por $B_1(v, u) = vu$.

1.7 Proposição

Sejam B e B_1 como em 1.7 (2).

Então $SV_B(\mathcal{A}, L(Y)) = SV_{B_1}(\mathcal{A}, L(Y))$

$$\text{e } \|s\|_B = \|s\|_{B_1}.$$

1.8 Definição

Seja $s \in SV_B(\mathcal{A}, Z)$ e $\varphi \in U_1(X, Y)$ uma função simples, isto é, da forma:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} y_k, \quad E_k \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos.}$$

Definimos integral de φ relativamente a s e $\mathcal{B}$ por:

$$\int ds \cdot \varphi = \sum_{k=1}^n s(E_k) y_k$$

1.9 Observações

(1) Na definição acima, como em qual
daqui por diante representaremos
 $\mathcal{B}(z, y)$ por zy .

(2) A definição 1.9 independe da particular
representação de φ .

1.10 Definição

Seja $s \in SV_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}, Z)$ e $f \in U_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Sejam $\varphi_n \in U_{\mathcal{A}}(X, Y)$ funções simples tais
que $\varphi_n \rightarrow f$ (convergência uniforme)

Então definimos integral de f relativa-
mente a s e $\mathcal{B}$ por:

$$\int ds \cdot f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int ds \cdot \varphi_n$$

O limite existe e independe da particular
sequência φ_n utilizada.

1.11. Propriedades

Seja $s \in SV_B(A, Z)$, $f \in U_A(X, Y)$ e
 $B: Z \times Y \rightarrow W$.

(1) A aplicação $h \rightarrow \int ds \cdot h$ de $U_A(X, Y)$ em W é linear.

(2) A aplicação $u \rightarrow \int du \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ de $SV_B(\frac{\partial}{\partial t} \Xi)$ em W é linear.

$$(3) \quad \left\| \int ds \cdot f \right\| \leq \|s\|_B \|f\|$$

1.12. Propriedades

Sejam $s \in SV(A, L(Y))$, $q \in U_A(X, L(Y))$,
 $f \in U_A(X, Y)$, $T, S \in L(Y)$.

$$(1) \quad Ts \in SV(A, L(Y)) \quad , \quad qS \in U_A(X, L(Y))$$

$$e \quad \int d(Ts) (qS) = T \left(\int ds \cdot q \right) S$$

$$(2) \quad qy \in U_A(X, Y) \quad e \quad \int ds \cdot (qy) = \left(\int ds \cdot q \right) y$$

$$(3) \quad \int d(Ts) \cdot f = T \int ds \cdot f$$

(4) Se $Q(Y) \subset L(Y)$ é algebra de Banach,
 $s(A) \in Q(Y)$, $\forall A \in A$ e $q(t) \in Q(Y)$, $\forall t \in X$,

então: $\int ds \cdot q \in Q(Y)$.

1.13 Proposição

Seja $\theta : \mathcal{SV}(A, L(Y)) \rightarrow L(U_2(X, Y), Y)$ definida por:

$$\theta(s)f = \int ds \cdot f$$

Então θ está bem definida e é um isomorfismo isométrico.

Então vale: $\|s\| = \sup_{\|f\|=1} \|\int ds \cdot f\|$.

1.14 Caso particular

Seja $X = (a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, e $\mathcal{A}_0$ a álgebra das reuniões finitas disjuntas de intervalos semi-abertos a esquerda de $(a, b]$.

Então $U_{\mathcal{A}_0}((a, b], Y)$ coincide com o espaço $G^-(a, b], Y)$ das funções definidas em $(a, b]$ com valores em Y e que são regulares e contínuas pela esquerda.

Seja $s \in SV(\mathcal{A}_0, L(Y))$ e $f \in U_{\mathcal{A}_0}((a, b], Y)$.
Então $\int ds \cdot f$ coincide com a "integral interior":

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$$

definida em HÖNIG [2], onde $\alpha: [a, b] \rightarrow Y$ é a função definida por $\alpha(x) = s((a, x])$.

A correspondência $s \rightarrow \alpha$ assim determinada estabelece um isomorfismo isométrico entre $SV(\mathcal{A}_0, L(Y))$ e o espaço de funções $SV_a([a, b], L(Y))$ definido em HÖNIG [2].

1.15 Definição

Seja $K: X \times \mathcal{A} \rightarrow L(Y)$.

Denotaremos por K^t e K_A as aplicações $K^t: \mathcal{A} \rightarrow L(Y)$ e $K_A: X \rightarrow L(Y)$ definidas

por:

$$K^t(A) = K(t, A) \quad , \quad K_A(t) = K(t, A) .$$

Indicaremos por $IK(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ o espaço dos núcleos $K: X \times \mathcal{A} \rightarrow L(Y)$ que satisfazem:

$$(SV^u): \quad K^t \in SV(\mathcal{A}, L(Y)), \quad \forall t \in X$$

$$e \quad \sup_{t \in X} \|K^t\| < \infty$$

$$(U_A^0): \quad K_A y \in U_A(X, Y), \quad \forall y \in Y$$

O espaço $IK(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ é um espaço normado com a norma definida por $\|K\| = \sup_{t \in X} \|K^t\|$

1.16 TEOREMA

Seja $\theta: IK(X \times \mathcal{A}, L(Y)) \rightarrow L(U_A(X, Y))$ definida por:

$$[\theta(K)f](t) = \int dK^t \cdot f$$

Então θ está bem definida e é um isomorfismo isométrico.

1.17 Corolário

$IK(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ é um espaço de Banach.

1.18 Definição

Através do isomorfismo θ definimos em $IK(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ um produto (produto de convolução)

por: $K_1 * K_2 = \bar{\Theta}^{-1}(\Theta(K_1) \circ \Theta(K_2))$

Então $K(X \times A, L(Y))$ torna-se uma álgebra de Banach. Indicaremos $\Theta(K)$ por F_K .

1.19 Propriedades

$$(1) \quad F_{K_1 * K_2} = F_{K_1} \circ F_{K_2}$$

$$(2) \quad \|K_1 * K_2\| \leq \|K_1\| \|K_2\|$$

$$(3) \quad \int d(K_1 * K_2)^t f = \int dK_1^t \left(\int dK_2^t f \right), \quad f \in U_A(X, Y).$$

$$(4) \quad (K_1 * K_2)(t, A) y = \int dK_1^t (K_2 A y)$$

(5) A unidade U em $K(X \times A, L(Y))$ é definida por $U(t, A) = X_A(t)I$.

1.20 Definição

Seja $K \in K(X \times A, L(Y))$.

Definimos $K^\square: X \rightarrow SV(A, L(Y))$ por $K^\square(t) = K^t$.

1.21 Propriedades

Seja $K \in K(X \times A, L(Y))$ tal que $K^\square \in U_A(X, SV(A, L(Y)))$

$$(1) \quad (K * K)^\square \in U_A(X, SV(A, L(Y)))$$

$$(2) \quad K_A \in U_A(X, L(Y)).$$

1.22 TEOREMA

Seja $K \in K(X \times A, L(Y))$ tal que
 $K^D \in U_A(X, SV(A, L(Y)))$ e $K(t, A)$ é operador
 compacto $\forall t \in X$ e $\forall A \in A$.
 Então F_K^2 é operador compacto.

1.23 Equação integral de Fredholm

Sejam $K \in K(X \times A, L(Y))$, $f, g \in U_A(X, Y)$
 e $\lambda \in \mathbb{C}$.

A equação $f(t) - \lambda \int dK^t \cdot f = g(t)$, $t \in X$,
 na incógnita f é chamada equação in-
 tegral de Fredholm

Pode também ser escrita como:

$$f - \lambda F_K f = g$$

Suporemos a seguir, sem perda de genera-
 lidade para os resultados do §2 que $\lambda = 1$.

1.24 Núcleo resolvente

Seja $F_K \in L(U_A(X, Y))$ e suponhamos que
 $I - F_K$ é uma bi-jeção.

Como $I - F_K$ é linear contínua e $U_A(X, Y)$
 é espaço de Banach, a inversa F_S é contínua
 onde $S \in K(X \times A, L(Y))$.

$$\text{De } f - F_K f = g \quad \text{vem } f = F_S g$$

Então $f - F_K \circ F_S g = g$

donde $f = g + F_{K \circ S} g$

Seja $R = -K \circ S \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$.

Então

$$f(t) = g(t) - \int dR^t \cdot g$$

e R é chamado núcleo resolvente de $I - F_K$.

1.25 Caso de núcleo pequeno

Dizemos que $k \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ é pequeno se $\|k\| < 1$.

Seja $T: U_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow U_{\mathcal{A}}(X, Y)$ definido por

$$(Tf)(t) = \int dk^t f + g(t)$$

É imediato verificar que $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \|k\| \|f_1 - f_2\|$ e que portanto T é uma contração ($\|k\| < 1$).

Então $I - F_K$ é bijetora e admite núcleo resolvente $R \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$.

Da maneira usual podemos verificar que

$$R = U + k + k^2 + k^3 + \dots$$

onde $U(t, A) = X_A(t) I$.

§2. Operadores de Fredholm e alternativa fraca de Fredholm.

2.1 Definição

Seja $F \in L(Y)$ onde Y é um espaço de Banach. Dizemos que F é um operador de Fredholm se

$$\dim \ker F < \infty \quad \text{e} \quad \operatorname{codim} \operatorname{im} F < \infty.$$

2.2 Proposição

(1) Seja $F \in L(Y)$ e existam $S, S' \in L(Y)$ tais que $I - SF$ e $I - FS'$ são operadores compactos. Então F é operador de Fredholm.

(2) Se $F_1, F_2 \in L(Y)$ são operadores de Fredholm então $F_1 \circ F_2$ é operador de Fredholm.

Prova

(Em PALAIS [3], Chapter VII).

2.3 Lema

Sejam $\psi_i \in U_A(X, L(Y))$, $i = 1, 2, \dots, n$,

e $s_i \in SV(A, L(Y))$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja $K: X \times A \rightarrow L(Y)$ definido por

$$K(t, A) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i(A)$$

Então $K \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ e $K^\square \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$.

Prova

i) Verifiquemos os axiomas (SV^u) e $(U_{\mathcal{A}}^s)$.

Como $\Psi_i(t) \in L(Y)$ e $s_i \in SV(\mathcal{A}, L(Y))$ — emeo —
que (prop. 1.12(1)),

$$K^t = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i \in SV(\mathcal{A}, L(Y))$$

$$\sup_{t \in X} \|K^t\| = \sup_{t \in X} \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i \right\| \leq$$

$$\Rightarrow \leq \sup_{t \in X} \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \int d\left(\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i\right) f \right\| \quad (\text{prop. 1.13})$$

Pela prop. 1.12(3) vem:

$$\sup_{t \in X} \|K^t\| \leq \sup_{t \in X} \sum_{i=1}^n \|\Psi_i(t)\| \sup_{\|f\| \leq 1} \|\int d s_i f\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|\Psi_i\| \|s_i\| < \infty$$

Seja $y \in Y$.

Como a aplicação $t \rightarrow \Psi_i(t)$ de X em $L(Y)$
é $\mathcal{A}$ -uniformemente contínua por hipótese
e $v \rightarrow v s_i(A)$ de $L(Y)$ em Y é unifor-
memente contínua por ser linear contínua

então $t \rightarrow \Psi_i(t) s_i(A) y$ é $\mathcal{A}$ -uniformemente contínua.

$$\text{Logo } K_A y = \sum_{i=1}^n \Psi_i s_i(A) y \in U_A(X, Y).$$

Portanto $K \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$

ii) A aplicação $t \rightarrow \Psi_i(t)$ é $\mathcal{A}$ -uniformemente contínua.

A aplicação $v \rightarrow v s_i$ de $L(Y)$ em $SV(\mathcal{A}, L(Y))$ é linear contínua e portanto uniformemente contínua. De fato:

$$\begin{aligned} \|v s_i\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \int d(v s_i) f \right\| \leq \|v\| \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \int d s_i \cdot f \right\| = \\ &= \|v\| \|s_i\| \quad (\text{prop. 1.13 e 1.12}). \end{aligned}$$

Logo a composição de ambas

$$t \rightarrow \Psi_i(t) s_i$$

é $\mathcal{A}$ -uniformemente contínua e portanto também

$$K^\square : t \rightarrow K^t = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i$$

isto é $K^\square \in U_A(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$. c.q.d.

2.4 Definição

Dizemos que $K \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ é degenerado se

$$K(t, A) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i(A)$$

onde $\Psi_i \in U_{\mathcal{A}}(X, L(Y))$; $s_i \in SV(\mathcal{A}, L(Y))$, $i=1, 2, \dots, n$.

2.5 Proposição

Seja $D \subset L(Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ tal que $K^0 \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$ e $K(t, A) \in D$, $\forall t, A$.

Então dado $\varepsilon > 0$ existe $K_0 \in \mathcal{K}(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ degenerado , da forma :

$$K_0(t, A) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A) \quad , \quad E_i \in \mathcal{A} \text{ , disjuntos}$$

e tal que $s_i(A) \in D$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $i=1, 2, \dots, n$,

$$\text{e } \|K - K_0\| < \varepsilon$$

Prova

Observemos que K_0 satisfaz a definição de núcleo degenerado com $\Psi_i = \chi_{E_i} I$.

Dado $\varepsilon > 0$ sejam $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ partição de X com $E_i \in \mathcal{A}$, $i=1, 2, \dots, n$, e $t_i \in E_i$, $i=1, 2, \dots, n$, tais que

$$\|K^0 - \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} K^0(t_i)\| < \varepsilon$$

Seja $K_0(t, A) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A)$, onde $s_i = K^{t_i}$.
Então:

$$\begin{aligned} \|K - K_0\| &= \sup_{t \in X} \left\| K^t - \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i \right\| = \\ &= \sup_{t \in X} \left\| K^t - \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) K^{t_i} \right\| = \left\| K - \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} K^{t_i} \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Temos também $s_i(A) = K^{t_i}(A) = K(t_i, A) = D$.
(c.q.d.)

2.6 TEOREMA

Seja $Q(Y) \subset L(Y)$ álgebra de Banach com a seguinte propriedade:

" Se $S \subset Q(Y)$ é sub-álgebra finitamente gerada então existe $m(S) \in \mathbb{N}$ tal que

$h_i \in S$, $i=1, 2, \dots, m(S) \Rightarrow \prod_{i=1}^{m(S)} h_i$ é operador compacto "

Seja $K \in K(X \times A, L(Y))$ tal que $K^A \in U_A(X, SV(A, L(Y)))$ e $K(t, A) \in Q(Y)$, $\forall t \in X$, $\forall A \in A$.

Então $I - F_K$ é operador de Fredholm.

Prova1º Caso

O núcleo K é degenerado, definido por

$$K(t, A) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i(A)$$

onde $\Psi_i \in U_A(X, L(Y))$, $s_i \in SV(A, L(Y))$, $i=1, 2, \dots, n$,

e $\Psi_i(t) \in Q(Y)$, $\forall t \in X$,
 $s_i(A) \in Q(Y)$, $\forall A \in A$, $i=1, 2, \dots, n$.

Seja $y \in Y$.

Por 1.19(4), 1.21(2) e 1.12(3) podemos escrever:

$$K^2(t, A) y = \int dK^t \cdot (K_A y) = \left(\int dK^t \cdot K_A \right) y$$

donde $K^2(t, A) = \int dK^t \cdot K_A$

Substituindo $K = \sum_{i=1}^n \Psi_i s_i$ obtemos:

$$\begin{aligned} K^2(t, A) &= \int d \left(\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i \right) \cdot \sum_{j=1}^n \Psi_j s_j(A) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int d(\Psi_i(t) s_i) \cdot \Psi_j s_j(A) \end{aligned}$$

Por 1.12(1) temos:

$$K^2(t, A) = \sum_{i,j=1}^n \Psi_i(t) \left(\int ds_i \Psi_j \right) s_j(A)$$

Seja $h_{ij} = \int ds_i \cdot \psi_j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Por 1.12 (4), $h_{ij} \in \mathcal{Q}(Y)$.

É fácil provar por indução que:

$$K^p(t, A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \psi_{i_1}(t) h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \dots h_{i_{p-1} i_p} s_{i_p}(A)$$

Seja S a álgebra gerada por h_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$,
e seja $p-1 = m(S)$

Então $K^p(t, A)$ é operador compacto, $\forall t \in X, \forall A \in \mathcal{A}$.

Por 1.21 (1) $(K^p)^\square \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$.

Então pelo Teorema 1.22 $F_{K^p}^2 = F_K^{2p}$ é operador compacto.

Como:

$$I - (I - F_K)(I + F_K + F_K^2 + \dots + F_K^{2p-1}) = F_K^{2p}$$

resulta por 2.2 (1) que $I - F_K$ é operador de Fredholm.

2º Caso - Caso geral.

Como $K^\square \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$, existe pela proposição 2.6, $K_0 \in K(X \times \mathcal{A}, L(Y))$ da forma

$$K_0(t, A) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A) \quad , \quad E_i \in \mathcal{A} \text{ disjuntos},$$

e tal que $s_i(A) \in \mathcal{O}(Y)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $i=1, 2, \dots, n$,

$$\text{e} \quad \|K - K_0\| < 1$$

Seja $k = K - K_0$.

Então k é núcleo pequeno. Seja r o núcleo resolvente de $I - F_k$.

$$I - F_K = I - F_k - F_{K_0} = (I - F_k)(I - (I - F_r) F_{K_0})$$

$$\text{Então} \quad I - F_K = (I - F_k)(I - F_{K_1})$$

$$\text{onde} \quad K_1 = K_0 - r * K_0$$

Mostremos que K_1 é um núcleo degenerado satisfazendo as hipóteses do Caso 1.

$$K_1(t, A) = K_0(t, A) - (r * K_0)(t, A) =$$

$$= K_0(t, A) - \int dr^t K_{0A} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A) - \int dr^t \left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} s_i(A) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A) - \sum_{i=1}^n r^t(E_i) s_i(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\chi_{E_i}(t) I - r(t, E_i) \right] s_i(A) .$$

Seja $\Psi_i = X_{E_i} I - r_{E_i}$
 Então

$$\begin{aligned}\Psi_i &= X_{E_i} I - (X_{E_i} I + k_{E_i} + (k^2)_{E_i} + \dots) = \\ &= - (k_{E_i} + (k^2)_{E_i} + \dots)\end{aligned}$$

Como $k = K - K_0$ temos $k(t, A) \in Q(Y)$, $\forall t, \forall A$.

Por 2.3 $K_0^D \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$.

Então

$$k^D = K^D - K_0^D \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y))).$$

Por 1.21 (1) $(k^D)^D \in U_{\mathcal{A}}(X, SV(\mathcal{A}, L(Y)))$

Por 1.21 (2) $(k^D)_{E_i} \in U_{\mathcal{A}}(X, L(Y))$

Então $\Psi_i \in U_{\mathcal{A}}(X, L(Y))$ e $\Psi_i(t) \in Q(Y)$, $\forall t \in X$,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

Como também $s_i \in SV(\mathcal{A}, L(Y))$, $s_i(A) \in Q(Y)$, $\forall A \in \mathcal{A}$,
 $i = 1, 2, \dots, n$

veremos que K_1 é núcleo degenerado nas condições do Caso 1.

Logo $I - F_{K_1}$ é operador de Fredholm.

Como $I - F_k$ por sua bijecção é operador de Fredholm, temos por 2.2 (2) que

$I - F_K = (I - F_k)(I - F_{K_1})$ é operador de Fredholm.
 (c.q.d.)

2.7 Observação

As hipóteses do Teorema 2.6 sobre $\mathcal{Q}(Y)$ são satisfeitas se, por exemplo:

- (1) $\mathcal{Q}(Y)$ é a álgebra dos operadores compactos.
- (2) $\mathcal{Q}(Y)$ é comutativa e para todo $h \in \mathcal{Q}(Y)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que h^m é compacto.

2.8 Definição

Seja $F \in L(Y)$ onde Y é um espaço de Banach qualquer.

Diremos que F satisfaz a alternativa fraca de Fredholm se:

ou " $Fy = b$ admite solução única para $\forall b \in Y$

ou " $0 < \dim \ker F < \infty$.

2.9 TEOREMA

Seja $\mathcal{Q}(Y) \subset L(Y)$ uma álgebra tal que para todo $h \in \mathcal{Q}(Y)$, $I - h$ satisfaz a alternativa fraca de Fredholm.

Seja $K \in K(X \times A, L(Y))$ tal que $K^a \in U_A(X, SV(A, L(Y)))$ e $K(t, A) \in \mathcal{Q}(Y)$, $\forall t \in X$, $\forall A \in A$.

Então $I - F_K$ satisfaz a alternativa fraca de Fredholm.

Prova

1º Caso

K é degenerado, definido por

$$K(t, A) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i(A)$$

satisfazendo ainda

$$\Psi_i(t) \in \Phi(Y), \quad \forall t \in X, \quad s_i(A) \in \Phi(Y), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i = 0, \quad \forall t \in X \right) \Rightarrow (y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

→ onde $y_i \in Y$.

Consideremos a equação

$$[1] \quad f(t) - \int dK^t \cdot f = g(t), \quad t \in X,$$

onde $f, g \in U_X(X, Y)$.

Substituindo a expressão para o núcleo obtemos:

$$f(t) - \int d\left(\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i\right) \cdot f = g(t)$$

Por 1.12(3) temos:

$$[2] \quad f(t) - \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) \int ds_i \cdot f = g(t)$$

Como $\int ds_i \cdot f \in Y$ toda solução de [1] será necessariamente da forma:

$$[3] \quad \hat{f}(t) = g(t) + \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i, \quad y_i \in Y.$$

Procuramos determinar $y_i, i=1, 2, \dots, n$, substituindo [3] em [2]:

$$g(t) + \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i - \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) \int ds_i \left(g + \sum_{j=1}^n \Psi_j y_j \right) = g(t),$$

Por 1.12(2) temos:

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) \left[y_i - \int ds_i \cdot g - \sum_{j=1}^n \left(\int ds_i \cdot \Psi_j \right) y_j \right] = 0$$

para $\forall t \in X$.

Portanto

$$y_i - \sum_{j=1}^n \left(\int ds_i \cdot \Psi_j \right) y_j = \int ds_i \cdot g, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Por 1.12(4) $h_{ij} = \int ds_i \cdot \Psi_j \in \Phi(Y), \quad 1 \leq i, j \leq n.$

Seja $b_i = \int ds_i \cdot g \in Y.$

Resulta o sistema linear

$$[4] \quad y_i - \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j = b_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Seja H a matriz $[h_{ij}]$.

Podemos escrever o sistema [4] como

$$[5] \quad (I-H)\bar{y} = \bar{b} \quad , \quad \bar{y}, \bar{b} \in Y^n$$

Portanto a equação integral [1] admite solução se e só se [5] admite solução e estas se correspondem através de

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i$$

Multipliquemos [5] por $\text{adj}(I-H)$

Como

$$[\text{adj}(I-H)](I-H) = \begin{bmatrix} \det(I-H) & & & \\ & \det(I-H) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(I-H) \end{bmatrix}$$

teremos

$$\det(I-H) y_i = [\text{adj}(I-H)\bar{b}]_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n.$$

Como $\det(I-H) = I-h$, com $h \in \mathcal{Q}(Y)$, teremos por hipótese que $\det(I-H)$ satisfaz a alternativa fraca de Fredholm, isto é:

$$\ker \det(I-H) = \{0\} \quad \text{e} \quad \text{im} \det(I-H) = Y$$

ou

$$0 < \dim \ker \det(I-H) < \infty$$

Na primeira alternativa, como

$$y_i = [\det(I-H)]^{-1} [\operatorname{adj}(I-H)\bar{b}]_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

podemos concluir que $(I-F_K)f=g$ admita
solução única para $\forall g \in U_A(X,Y)$.

Analisemos a segunda alternativa.
Pelo isomorfismo linear entre $\ker(I-F_K)$
e $\ker(I-H)$ temos:

$$\dim \ker(I-F_K) = \dim \ker(I-H).$$

Como $\ker(I-H) \subset [\ker \det(I-H)]^n$ vem

$$\begin{aligned} \dim \ker(I-F_K) &\leq \dim [\ker \det(I-H)]^n = \\ &= [\dim \ker \det(I-H)]^n < \infty. \end{aligned}$$

Temos também que $f \in \ker(I-F_K)$ se e só
se $f(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) y_i$ e $(I-H)\bar{y} = 0$.

Como $\dim \ker(I-H) > 0$ resulta que
 $\dim \ker(I-F_K) > 0$.

Portanto $I-F_K$ satisfaz a alternativa fraca
de Fredholm.

2º Caso Caso geral.

Como no Teorema 2.6, decomponha

$$K = k + K_0$$

onde $\|k\| < 1$ e K_0 é núcleo degenerado na forma

$$K_0(t; A) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) s_i(A), \quad E_i \in \mathcal{A}, \quad s_i \in \overline{\mathbb{R}},$$

com $s_i(A) \in Q(Y)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $i=1, 2, \dots, n$
e escrevemos

$$I - F_K = (I - F_{K_1})(I - F_{K_1})$$

onde K_1 é núcleo degenerado definido por

$$K_1(t; A) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(t) s_i(A)$$

com $\Psi_i = \chi_{E_i} I - \chi_{E_i}$, $i=1, 2, \dots, n$.

Para mostrar que K_1 satisfaz as hipóteses do 1º caso resta provar que

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i = 0, \quad \forall t \in X \quad \text{implica} \quad y_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i(t) y_i = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) y_i - \sum_{i=1}^n \chi(t, E_i) y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) y_i - \int dr^t \left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} y_i \right)$$

Então $\sum_{i=1}^n \psi_i(t) y_i = 0$ é equivalente a

$$(I - F_r) \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} y_i = 0.$$

Logo $\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} y_i = 0$, e portanto $y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Então pelo 1º caso, $I - F_{K_1}$ satisfaz a alternativa fraca de Fredholm.

Como $I - F_K$ é um isomorfismo linear temos:

$$\begin{aligned} \ker(I - F_{K_1}) = \{0\} &\Leftrightarrow \ker(I - F_K) = \{0\} \\ \text{im}(I - F_{K_1}) = Y &\Leftrightarrow \text{im}(I - F_K) = Y \\ \dim \ker(I - F_{K_1}) &= \dim \ker(I - F_K). \end{aligned}$$

Logo $I - F_K$ satisfaz a alternativa fraca de Fredholm.

(c.q.d.).

REFERÊNCIAS

- [1] BARROS, I.Q.
Equações Integrais de Fredholm no espaço das funções λ -uniformemente contínuas
 RT-MAP-8109 - Relatório Técnico,
 Dept. Mat. Apl. - Univ. S. Paulo, (1981)
- [2] HÖNIG, C.S.
Fredholm-Stieltjes Integral equations I
 IV Escuela Latino-americana de Matemática,
 Analysis y sus aplicaciones.
 Alta, Lima, (1979) 126-160.
- [3] PALAIS, R.S.
Fredholm operators
 Seminar on the Atiyah-Singer index-theorem - Chapter VII
 Princeton Univ. Press, (1965)
- [4] RIESZ, F - NAGY, B.S.
Functional Analysis
 Frederick Ungar Publishing Co. (1955)
- [5] SCHMIDT, E.
Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung.
 Math. Annalen 64 (1907) 161-174.

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating Matrices
of RK-Procedures - Agosto 1977
- RT-MAP-7702 - V.W. Setzer
A Note on a Recursive Top-Down Analyzer of N.Wirth - Dezembro 1977
- RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação Ótima - Dezembro 1977
- RT-MAP-7704 - V.W. Setzer, M.M. Sanches
A linguagem "LEAL" para Ensino básico de Computação - Dezembro 1977
- RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of interest in connection with discretization
of Ordinary Differential Equations - Janeiro 1978
- RT-MAP-7802 - Silvio Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear Equations with Iterative Methods
Fevereiro 1978
- RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypohamiltonian Digraphs - Março 1978
- RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypotraceable Digraphs - Maio 1978
- RT-MAP-7805 - W. Hesse, V.W. Setzer
The Line-Justifier: an example of program development by transformations
Junho 1978
- RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Capítulo I - Tópicos Introdutórios
Capítulo II - Discretização
Julho 1978
- RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
(Γ , Γ) - Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores - Setembro 1978
- RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Capítulo III - Métodos de passo progressivo para Eq. Dif. Ord. com
condições iniciais - Setembro 1978
- RT-MAP-7809 - V.W. Setzer
Program development by transformations applied to relational Data-Base
queries - Novembro 1978
- RT-MAP-7810 - Nguiffo B. Boyom, Paulo Boulos
Homogeneity of Cartan-Killing spheres and singularities of vector
fields - Novembro 1978

TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-7811 - D.T. Fernandes e C. Patarra
Sistemas Lineares Esparsos, um Método Exato de Solução - Novembro 1978
- RT-MAP-7812 - V.W. Setzer e G. Bressan
Desenvolvimento de Programas por Transformações: uma Comparação entre
dois Métodos - Novembro 1978
- RT-MAP-7813 - Ivan de Queiroz Barros
Variação do Passo na Discretização de Eq. Dif. Ord. com Condições
Iniciais - Novembro 1978
- RT-MAP-7814 - Martin Grötschel e Yoshiko Wakabayashi
On the Complexity of the Monotone Asymmetric Travelling Salesman
Polytope I: HIPOHAMILTONIAN FACETS - Dezembro 1978
- RT-MAP-7815 - Ana P. Humes e E.I. Jury
Stability of Multidimensional Discrete Systems: State-Space
Representation Approach - Dezembro 1978
- RT-MAP-7901 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
On the complexity of the Monotone Asymmetric Travelling Salesman
Polytope II: HYPOTRACEABLE FACETS - Fevereiro 1979
- RT-MAP-7902 - M.M. Sanches e V.W. Setzer
A portabilidade do compilador para a Linguagem LEAL - Junho 1979
- RT-MAP-7903 - Martin Grötschel, Carsten Thomassen, Yoshiko Wakabayashi
Hypotraceable Digraphs - Julho 1979
- RT-MAP-7904 - N'Guiffo B. Boyom
Translations non triviales dans les groupes (transitifs) des
transformations affines - Novembro 1979
- RT-MAP-8001 - Ângelo Barone Netto
Extremos detectáveis por jatos - Junho 1980
- RT-MAP-8002 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. I - Medida e Integração Abstrata - Julho 1980
- RT-MAP-8003 - Routo Terada
Fast Algorithms for NP-Hard Problems which are Optimal or Near-Optimal
with Probability one - Setembro 1980
- RT-MAP-8004 - V.W. Setzer e R. Lapyda
Uma Metodologia de Projeto de Bancos de Dados para o Sistema ADARAS
Setembro 1980
- RT-MAP-8005 - Imre Simon
On Brzozowski's Problem: (LUA)^m = A* - Outubro 1980
- RT-MAP-8006 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. II - Espaços Lp - Outubro 1980

TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-8101 - Luzia Kazuko Yoshida e Gabriel Richard Bitran
Um algoritmo para Problemas de Programação Vetorial com Variáveis.
Zero-um - Fevereiro 1981
- RT-MAP-8102 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. III - Medidas em Espaços Topológicos - Março 1981
- RT-MAP-8103 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Design of Data Models for the ADABAS System using the Entity-Relationship
Approach - Abril 1981
- RT-MAP-8104 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. IV - Medida e Integração Vetoriais - Abril 1981
- RT-MAP-8105 - U.S.R. Murty
Projective Geometries and Their Truncations - Maio 1981
- RT-MAP-8106 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Projeto de Bancos de Dados, Usando Modelos Conceituais
Este relatório Técnico complementa o RT-MAP-8103. Ambos substituem o
RT-MAP-8004 ampliando os conceitos ali expostos. - Junho 1981
- RT-MAP-8107 - Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
Embedding of Trees - August 1981
- RT-MAP-8108 - Ivan de Queiroz Barros
Mecânica Analítica Clássica - Outubro 1981