UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Introdução à Geometria Analítica Plana

Mirian Percia Mendes

Nº 40

NOTAS DIDÁTICAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

Introdução à Geometria Analítica Plana

Mirian Percia Mendes

Nº 40

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

São Carlos
Nov./1999

Introdução à Geometria Analítica Plana

Mirian Percia Mendes[1]

16 de novembro de 1999

[1]Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Matemática, São Carlos, SP, Brazil, mpmendes@icmc.sc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Geometria Analítica é o ramo da Matemática que associa números a pontos de um gráfico e equações à figuras geométricas. Nesse caso, podemos dizer que interpreta fatos geométricos através de números e vice-versa.

Dois franceses, ambos graduados em Direito e não dedicados profissionalmente à Matemática, criaram as bases da Geometria Analítica. São eles: René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665).

Descartes estudou em rigoroso colégio de jesuítas e posteriormente abraçou a carreira militar. Em 1637, publicou o *Discurso do Método*, obra considerada o marco da filosofia moderna. Nela, Descartes defendeu o método matemático como sendo o modelo para a aquisição de conhecimento em todos os campos. Um dos três apêndices do *Discurso do Método* intitulado "A Geometria"se constituiu numa das bases da Geometria Analítica, também reconhecida como Geometria Cartesiana. Aliás, cartesiano vem da tradução latina, Renatus Cartesius, do nome francês René Descartes.

Considerando duas grandezas relacionadas entre si, ele representou uma delas sobre um dos eixos e a outra sobre o outro eixo. Por meio de paralelas, construiu os outros dois lados, obtendo um paralelogramo. Assim, definiu e caracterizou um ponto do plano. Mostrou a seguir, que a relação entre as grandezas pode ser representada por uma curva bem definida. Ao mesmo tempo, demonstrou que a cada curva corresponde uma equação e que a equação de uma curva permite o estudo das propriedades dessa curva.

A utilização do método cartesiano contribuiu decisivamente para o progresso das ciências. As representações cartesianas de fenômenos como a variação de temperatura de um doente, ou a oscilação dos valores das ações na Bolsa, por exemplo, nos permitem, através de uma análise simples das curvas representadas num sistema de eixos coordenados, fazer previsões, com certa precisão.

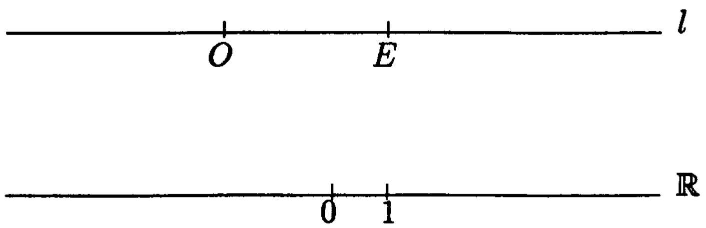
Fermat foi conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse. Dedicou suas horas de lazer à Matemática. A sua obra, que serviu de base à Geometria Analítica, se intitula *Introdução aos lugares planos e sólidos*. Embora escrita antes de 1637 - ano da publicação do *Discurso do Método* de Descartes - a obra de Fermat só foi publicada em 1679, depois de sua morte.

Por esta razão, se atribuiu muito mais a Descartes do que a Fermat a criação da Geometria Analítica.

1.1 Coordenadas na Reta

Antes de começarmos nosso estudo no plano, vamos precisar recordar alguns conceitos que ocorrem na reta. Precisamos lembrar primeiramente o que significa *introduzir coordenadas sobre uma reta l*. Introduzir coordenadas sobre l significa podermos representar os seus pontos através de números reais. Uma *reta orientada* é uma reta em que foi escolhido um sentido de percurso. E como fazer isso? Através dos passos que vamos colocar a seguir.

- dado um ponto O, arbitrário na reta l, associamos a ele o número real zero;
- tomamos outro ponto, E, em l e a ele fazemos corresponder o número um.



Notemos que o ponto O divide a reta l em duas semi-retas, a que contém E e a que não contém E.

Fica então estabelecido sobre l um *sentido de percurso*, chamado de *positivo* quando escolhemos a semi-reta que contém o ponto E.

Além disso, temos também fixada uma *unidade de comprimento OE*.

Chamamos o ponto O de *origem* e a reta l, agora orientada, de *eixo*.

Assim,

1. a cada ponto X sobre a semi-reta que contém E, corresponde um único número real positivo x, que chamamos de *coordenada do ponto X*, e que é a distância de O até X em termos da unidade OE;

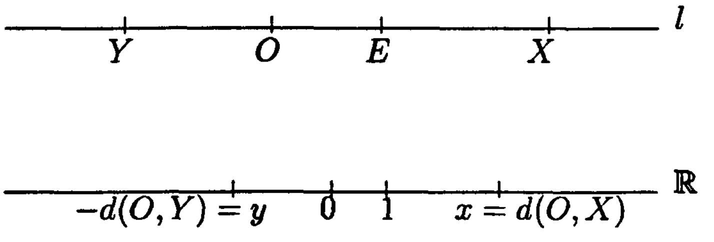
2. a qualquer ponto Y sobre a semi-reta que não contém E, corresponde um único número real negativo y, que chamamos de coordenada do ponto Y e que é *menos* a distância de O até Y, em termos da unidade OE.

Com isso, podemos colocar todo eixo em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

$$l \leftrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \leftrightarrow x$$

Se denotarmos a distância entre dois pontos A, B de l em termos da unidade OE por $d(A, B)$, ficamos com:



Algumas propriedades da distância:

1. $d(A, B) \in \mathbb{R}$;
2. $d(A, A) = 0$ e $d(A, B) > 0$ quando $A \neq B$;
3. $d(A, B) = d(B, A)$;
4. $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B) \Leftrightarrow$ o ponto C pertence ao segmento de reta AB.

Observação 1.1.1 *Sejam X e Y pontos de uma reta de coordenadas x e y, respectivamente. Então $x < y \Leftrightarrow X$ está à esquerda de Y (numa reta orientada, dizemos que um ponto X está à esquerda de um ponto Y ou que um ponto Y está à direita de um ponto X quando o sentido de percurso de X para Y é o sentido positivo escolhido). É possível mostrar que $d(X, Y) = |x - y|$ (dividimos em casos e tomamos sem perda de generalidade X à esquerda de Y)*

Com isso, podemos perceber a importância da noção de distância, já que precisamos de uma unidade de comprimento.

Capítulo 2

Geometria Analítica Plana

2.1 Coordenadas no Plano

Sejam l_1 e l_2 duas retas de um mesmo plano π que se intersectam em um único ponto O.

O objetivo agora é estabelecer uma correspondência biunívoca:

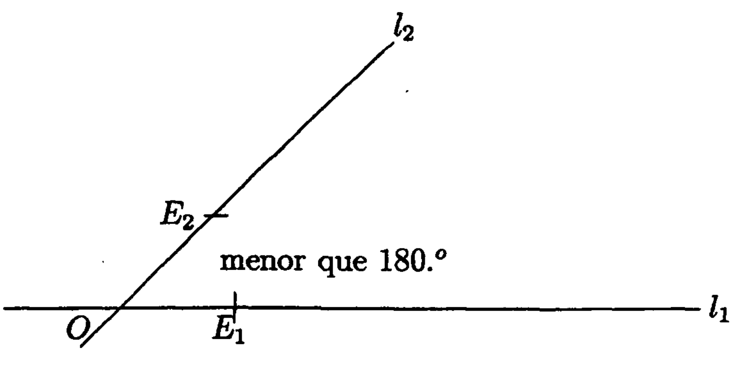
$$\pi \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \leftrightarrow (x, y)$$

como no caso anterior da reta.

O primeiro passo é escolher a origem como sendo o ponto O (intersecção de l_1 com l_2).

Depois escolhemos os pontos E_1 e E_2 sobre l_1 e l_2, respectivamente para podermos estabelecer as coordenadas sobre cada reta.

Os pontos E_1 e E_2 devem ser escolhidos de modo que a semi-reta positiva de l_1 possa ser girada sobre a semi-reta positiva de l_2 através de uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo menor que 180.º.



Assim, um *sistema de coordenadas (cartesianas)* em um plano π, é um par de eixos l_1 e l_2, contidos nesse plano e com mesma origem O.

O eixo l_1 é o *eixo das abcissas* e o eixo l_2 o *eixo das ordenadas.*

Quando o ângulo, mencionado acima, for reto, isto é, de 90.º, ou ainda, o par de eixos for perpendicular, temos o que costumamos chamar de *sistema de coordenadas (cartesianas) retangulares (ortogonal).* Nesse caso, vamos usar a seguinte notação: sistema OXY.

Colocamos então agora a pergunta: *Como determinar as coordenadas de um ponto P onde x representa a abcissa e y a ordenada?*

Vamos responder a essa questão dividindo em casos.

1.º caso: P está sobre o eixo l_1

$$P \leftrightarrow (x, 0) \text{ onde } x \text{ é a coordenada de } P \text{ no eixo } l_1.$$

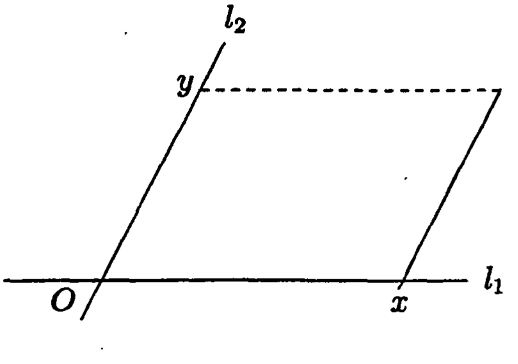
2.º caso: P está sobre o eixo l_2

$$P \leftrightarrow (0, y) \text{ onde } y \text{ é a coordenada de } P \text{ no eixo } l_2.$$

3.º caso: P não está em eixo algum

Por P, traçamos uma reta paralela a l_2 cortando o eixo l_1 no ponto de coordenada x e uma paralela a l_1 cortando l_2 no ponto de coordenada y.

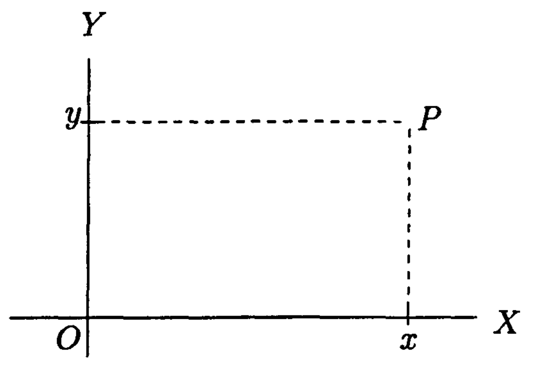
Nesse caso, x é a abcissa e y é a ordenada do ponto P.



Sendo x a abcissa e y a ordenada do ponto P, chamamos o ponto de coordenada $(x, 0)$ de *projeção de P sobre o eixo l_1* e o ponto de coordenada $(0, y)$ de *projeção de P sobre o eixo l_2*.

O par ordenado de números reais (x, y) é conhecido como *coordenadas de P*, relativas aos eixos l_1 e l_2 e aos pontos que fixam a unidade de comprimento E_1 e E_2.

Costumamos escolher os dois eixos perpendiculares (ortogonais). Nesse caso, o par (x, y) são as *coordenadas cartesianas retangulares (ortogonais)* de P.



Também costumamos escolher sobre os dois eixos unidades iguais de modo que $d(O, E_1) = d(O, E_2)$.

Concluindo:

$$\text{plano } \pi \neq \mathbb{R}^2 \text{ (como conjuntos)}$$
$$\text{pontos } P \qquad \text{pares ordenados de números reais}$$

Uma vez que π tem um sistema de coordenadas cartesianas, podemos identificar cada ponto P dele com o par ordenado (x, y) do $\mathbb{R}^2$ que lhe corresponde e, daí, com isso, estabelecemos a correspondência biunívoca $\pi \leftrightarrow \mathbb{R}^2$.

Por isso, quando escrevemos $P = (x, y)$ estamos querendo dizer que P é o ponto do plano cuja abcissa é x e cuja ordenada é y.

Resumindo:

1. quando falamos em plano cartesiano estamos querendo dizer que já fizemos a identificação acima e, sendo assim, que nós podemos representar pontos do plano por pares ordenados e pares ordenados por pontos, isto é, que podemos escrever $P = (x, y)$. O sistema de coordenadas não precisa ser retangular!!!;

2. quando falamos em plano cartesiano com sistema de coordenadas (retangulares) OXY, estamos trabalhando com o conjunto de pares ordenados, isto é, o $\mathbb{R}^2$ juntamente com o sistema de coordenadas retangulares OXY usual.

Para lembrar: os eixos OX e OY decompõem o plano $\mathbb{R}^2$ em quatro regiões denominadas *quadrantes*:

- 1.º quadrante: $\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$;
- 2.º quadrante: $\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ e } y \geq 0\}$;
- 3.º quadrante: $\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}$;
- 4.º quadrante: $\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \leq 0\}$.

2.2 Fórmula da Distância Entre Dois Pontos

Vamos estabelecer uma fórmula que permite determinar a distância entre dois pontos de um plano π.

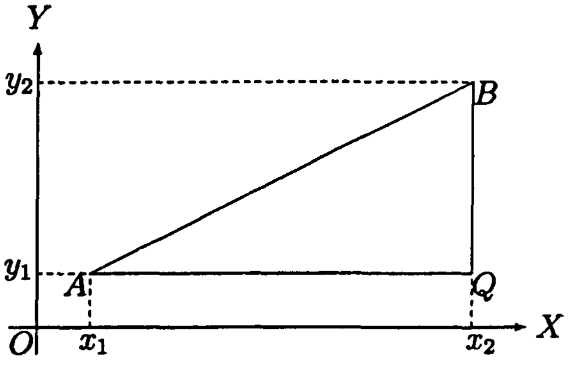
O 1.º passo aqui é escolher sobre esse plano um sistema de coordenadas retangulares com unidades iguais sobre os dois eixos.

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos de π.

Por A, traçamos uma reta paralela ao eixo OX e por B traçamos uma reta paralela ao eixo OY.

Essas retas se intersectam num ponto Q de coordenadas (x_2, y_1).

Assim, temos a figura:



e, com ela, tiramos que:

$$d(A,Q) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

e

$$d(Q,B) = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}.$$

Daí, pelo Teorema de Pitágoras,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Convém chamar a atenção para dois fatos importantes:

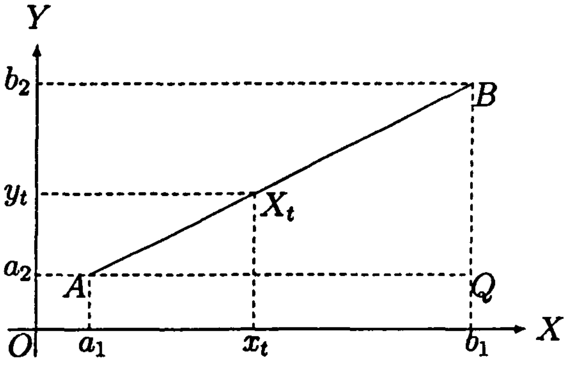
- 1.º: o sistema de coordenadas escolhido por nós foi retangular;
- 2.º: usamos a mesma unidade de comprimento nos dois eixos.

A partir daqui, quando escrevermos $P = (x, y)$ vamos estar trabalhando com sistema de coordenadas retangulares onde escolhemos a mesma unidade de medida nos dois eixos. O mesmo vamos estar querendo dizer quando mencionarmos "plano".

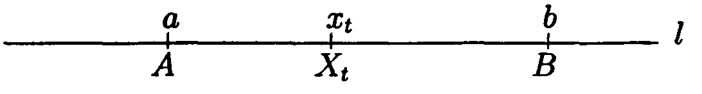
2.2.1 Divisão de um Segmento

Vejamos agora um exemplo de como exprimir um fato geométrico de forma analítica e que nos leva a determinação das *coordenadas do ponto médio de um segmento.*

Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e o número real t com $0 \leq t \leq 1$, quais são as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$, situado no segmento de reta AB, que satisfazem $d(A, X_t)/d(A, B) = t$?



- 1.º caso: os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo eixo l.



Para cada ponto X_t do segmento AB, vale:

$$d(A, X_t) \leq d(A, B)$$

e, daí,

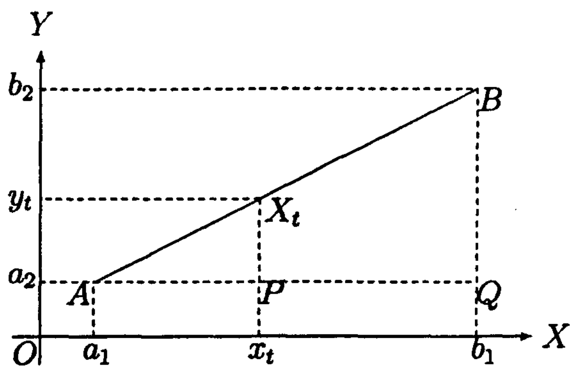
$$t = \frac{d(A, X_t)}{d(A, B)} \leq 1.$$

Se $X_t = A$ então $t = 0$ e se $X_t = B$ então $t = 1$.

Para cada $t \in [0, 1]$, seja X_t o ponto do segmento de reta AB tal que $\frac{d(A,X_t)}{d(A,B)} = t$. Então a coordenada x_t, do ponto X_t, está relacionada com as coordenadas a e b dos pontos A e B através da igualdade $(x_t - a)/(b - a) = t$, isto é, $x_t = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$.

Quando $t = 1/2$, $X_{1/2}$ é o *ponto médio do segmento* AB e sua coordenada $x_{1/2} = (a + b)/2 = a + \frac{(b-a)}{2}$ é a média aritmética entre as coordenadas a e b dos pontos A e B.

- 2.º caso: o segmento AB não é paralelo a eixo algum, isto é, $a_1 \neq b_1$ e $a_2 \neq b_2$.



Aqui é conveniente comparar os triângulos retângulos APX_t e AQB onde $P = (x_t, a_2)$ e $Q = (b_1, a_2)$.

Esses triângulos são semelhantes (um ângulo agudo em comum) com razão de semelhança (Teorema de Tales) dada por:

$$d(A, X_t)/d(A, B) = t.$$

Daí, $d(A, P)/d(A, Q) = t$, isto é, $(x_t - a_1)/(b_1 - a_1) = t$ e, portanto, $x_t = (1-t)a_1 + tb_1 = a_1 + t(b_1 - a_1)$.

Do mesmo modo, $d(P, X_t)/d(Q, B) = t$, isto é, $(y_t - a_2)/(b_2 - a_2) = t$ e então $y_t = (1-t)a_2 + tb_2 = a_2 + t(b_2 - a_2)$ (com o mesmo valor de t!!!).

Em particular, quando $t = 1/2$, obtemos $x_{1/2}$ e $y_{1/2}$, as *coordenadas do ponto médio do segmento* AB e estas são dadas por:

$$x_{1/2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e

$$y_{1/2} = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Para cada $t \in [0, 1]$, o ponto $X_t = (x_t, y_t)$ fornece pontos do segmento AB. Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, chamamos a função $t \in [0, 1] \mapsto X_t = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)) \in AB$ de *parametrização do segmento* AB e a variável t de *parâmetro.*

Fazendo t variar em $\mathbb{R}$, vamos ter todos os pontos da reta AB e não apenas os pontos do segmento AB. Quando $t \geq 0$, temos a semi-reta de origem A e que contém B. Quando $t \leq 0$, X_t percorre a semi-reta oposta.

Dizemos que um *segmento de reta está orientado* quando escolhemos um dos seus pontos extremos como sendo o ponto inicial e, conseqüentemente, o outro como ponto final.

2.2.2 Baricentro de um Triângulo

Consideremos um triângulo com vértices $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ e, $C = (c_x, c_y)$. Vejamos como determinar o seu baricentro (intersecção das medianas) $G = (g_x, g_y)$.

Sejam P, M e N os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Como G é o baricentro do triângulo ABC, temos que:

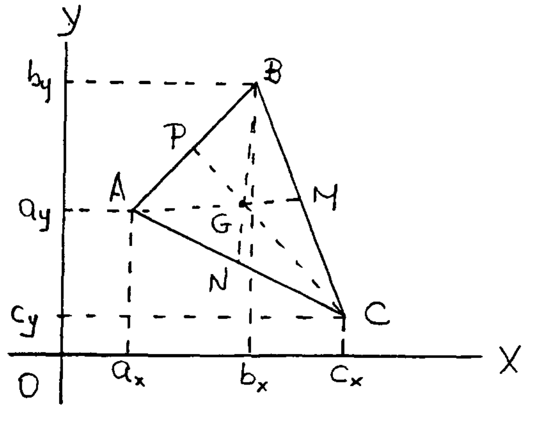
$$MG = \tfrac{1}{3}MA,\ NG = \tfrac{1}{3}NB \text{ e } PG = \tfrac{1}{3}PC.$$

Da primeira relação segue que $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$ e com isso, obtemos:

$$\frac{g_x - m_x}{a_x - m_x} = \frac{1}{3}$$

e

$$\frac{g_y - m_y}{a_y - m_y} = \frac{1}{3}.$$



Logo,

$$g_x = \frac{a_x + 2m_x}{3} \tag{1}$$

e

$$g_y = \frac{a_y + 2m_y}{3}. \tag{2}$$

Mas, M é o ponto médio de BC e então:

$$m_x = \frac{b_x + c_x}{2} \Rightarrow 2m_x = b_x + c_x \tag{3}$$

e

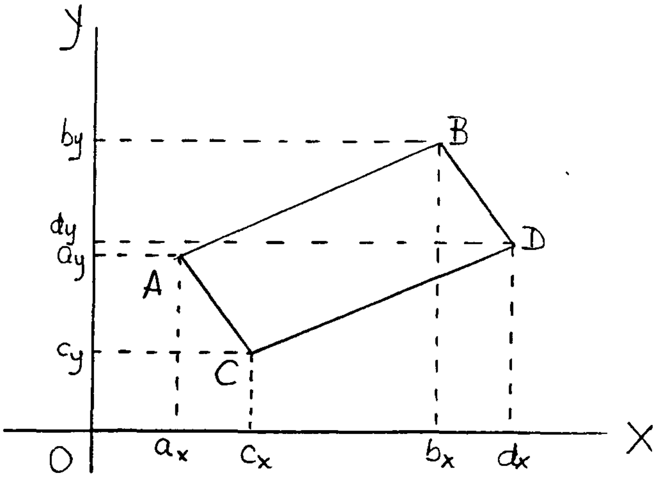
$$m_y = \frac{b_y + c_y}{2} \Rightarrow 2m_y = b_y + c_y. \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (1) e (2), respectivamente, concluímos que o baricentro é dado por:

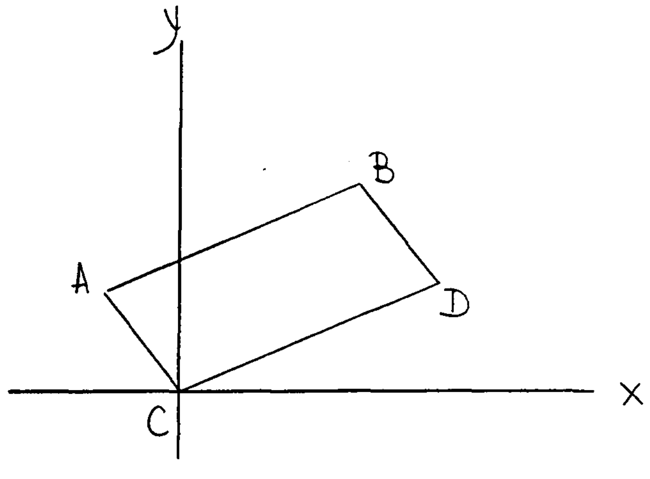
$$G = (\frac{a_x + b_x + c_x}{3}, \frac{a_y + b_y + c_y}{3}).$$

2.2.3 Problemas Interessantes

1. Dados os pontos $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ e $C = (c_x, c_y)$, determinar o ponto $D = (d_x, d_y)$ tal que AB e CD sejam os lados opostos de um paralelogramo cujos outros lados opostos são AC e BD.



- 1.º caso: Considerar o sistema de coordenadas retangulares OXY de modo que C seja a origem O.



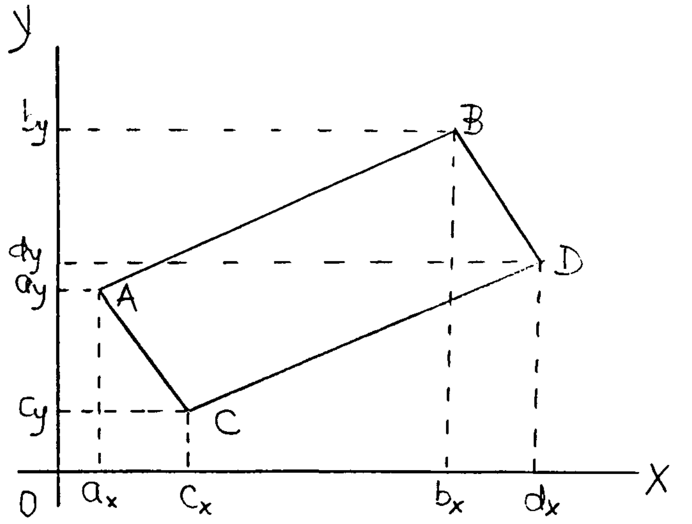
Como as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio das mesmas temos:

$$(a_x + d_x)/2 = (0 + b_x)/2 \text{ e } (a_y + d_y)/2 = (0 + b_y)/2,$$

isto é,

$$d_x = b_x - a_x \text{ e } d_y = b_y - a_y.$$

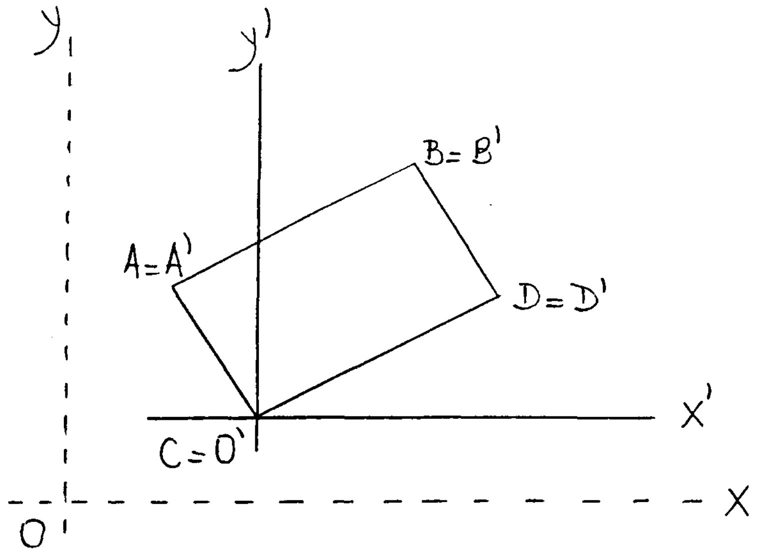
- 2.º caso: Caso geral.



Com o mesmo raciocínio usado no caso anterior, chegamos que:

- eixo OX: $(a_x + d_x)/2 = (b_x + c_x)/2$, isto é, $d_x = b_x + c_x - a_x$;
- eixo OY: $(a_y + d_y)/2 = (b_y + c_y)/2$, isto é, $d_y = b_y + c_y - a_y$.

Podemos resolver esse último caso de outra maneira. Basta fazer uma translação dos pontos do plano na direção do segmento CD, isto é, fazer C coincidir com O e D com D' como na figura abaixo.



Resolvemos o problema como no 1.º caso e depois voltamos a posição original. Assim,

$$O' \leftrightarrow C \text{ e } A' \leftrightarrow A$$

$$(0,0) \leftrightarrow (c_x, c_y) \text{ e } (a_x - c_x, a_y - c_y) \leftrightarrow (a_x, a_y)$$

$$D' \leftrightarrow D \text{ e } B' \leftrightarrow B$$

$$(d_x - c_x, d_y - c_y) \leftrightarrow (d_x, d_y) \text{ e } (b_x - c_x, b_y - c_y) \leftrightarrow (b_x, b_y).$$

Com isso, já que as diagonais se intersectam no ponto médio:

$$\frac{(a_x - c_x) + (d_x - c_x)}{2} = \frac{b_x - c_x}{2} \Rightarrow d_x - c_x = b_x - a_x$$

e

$$\frac{(a_y - c_y) + (d_y - c_y)}{2} = \frac{b_y - c_y}{2} \Rightarrow d_y - c_y = b_y - a_y.$$

Assim,:

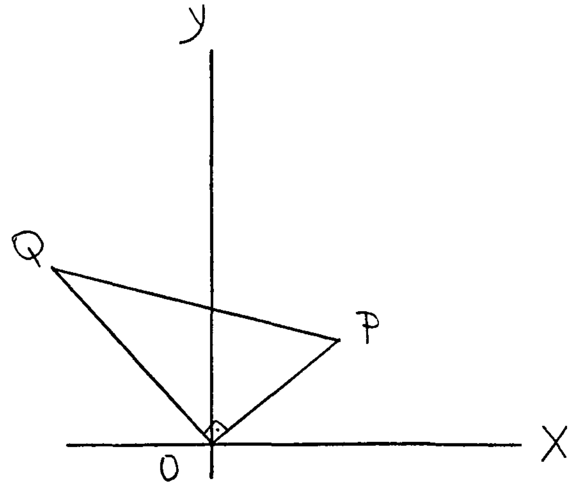
$$D = (d_x, d_y) = (b_x + c_x - a_x, b_y + c_y - a_y).$$

Generalizando, temos as equações:

$$\begin{cases} x' = x - c_x \\ y' = y - c_y \end{cases}$$

que relacionam os dois sistemas de coordenadas retangulares OXY e $O'X'Y'$. Essas equações são conhecidas como *equações de translação.*

2. Dados os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura o perpendicularismo dos segmentos OP e OQ onde $O = (0,0)$ é a origem do sistema de coordenadas retangulares OXY?

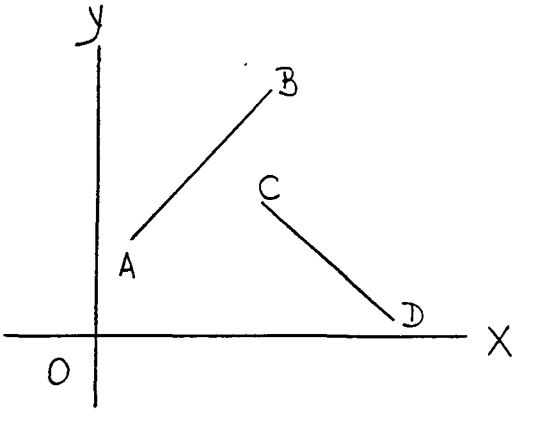


OP e OQ são perpendiculares (pelo Teorema de Pitágoras) $\Leftrightarrow d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 = (\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2})^2 + (\sqrt{(c-0)^2 + (d-0)^2})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Mas, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$ desde que $ac + bd = 0$.

Logo, OP e OQ são perpendiculares $\Leftrightarrow ac + bd = 0$.

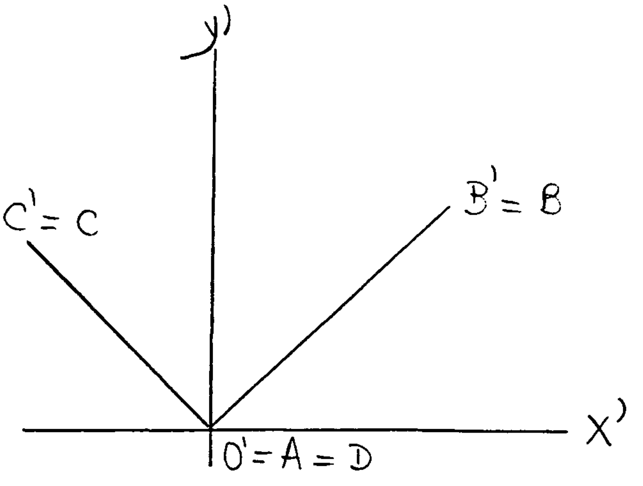
3. Sejam $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$, $C = (c_x, c_y)$ e $D = (d_x, d_y)$ com $A \neq B$ e $C \neq D$. Qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura serem perpendiculares os segmentos de reta AB e CD?



Transladamos paralelamente os segmentos AB e CD de modo a fazer os pontos A e D coincidirem com a origem $O' = (0,0)$. Assim,

$$O' \leftrightarrow A \text{ e } B' \leftrightarrow B$$
$$(0,0) \leftrightarrow (a_x, a_y) \text{ e } (b_x - a_x, b_y - a_y) \leftrightarrow (b_x, b_y)$$

$$C' \leftrightarrow C \text{ e } O' \leftrightarrow D$$
$$(c_x - d_x, c_y - d_y) \leftrightarrow (c_x, c_y) \text{ e } (0,0) \leftrightarrow (d_x, d_y).$$



Pelo problema anterior, $(c_x - d_x)(b_x - a_x) + (c_y - d_y)(b_y - a_y) = 0$.

Dado um problema geométrico, ficamos com o problema da escolha do sistema de coordenadas mais adequado. Essa vai depender de cada problema apresentado.

Capítulo 3

Retas no Plano

3.1 Inclinação e Declividade de uma Reta no Plano

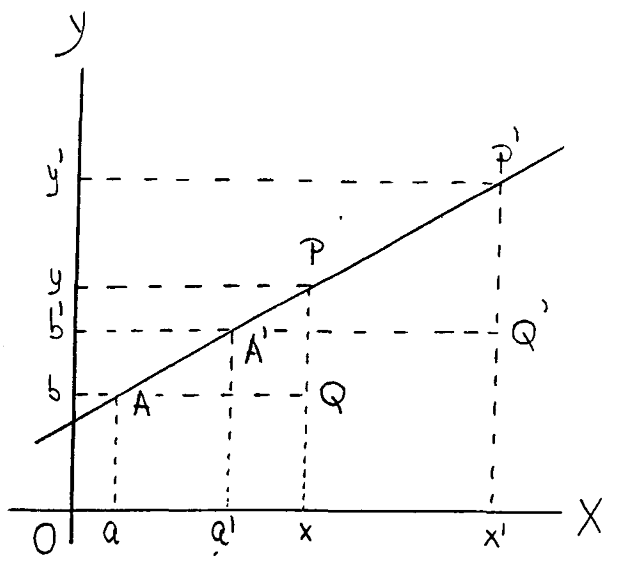
Definição 3.1.1 *Dizemos que duas retas l e l' de um plano são paralelas quando não têm ponto algum de intersecção, ou quando todos os seus pontos estão na intersecção. Nesse último caso, dizemos que elas são coincidentes. Quando a intersecção de l com l' tem um único ponto dizemos que são concorrentes.*

Seja l uma reta qualquer do plano, *não paralela ao eixo OY*.

Consideremos α o menor ângulo que essa reta faz com o eixo OX, medido desse eixo para l no sentido anti-horário. Chamamos a medida desse ângulo α de *inclinação da reta l*.

Consideremos $A = (a, b)$ e $P = (x, y)$ dois pontos de l.
Como l não é paralela ao eixo OY então $x \neq a$.
Sem perda de generalidade podemos supor $x > a$.
É possível mostrar que a razão $(y - b)/(x - a)$ independe da particular posição escolhida para os pontos A e P de l.

-1.º caso: $y > b$.



Temos, por semelhança de triângulos que:

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{\overline{QP}}{\overline{AQ}} = \tan\alpha = \frac{\overline{Q'P'}}{\overline{A'Q'}} = \frac{y'-b'}{x'-a'}.$$

-2.º caso: $y < b$.

Raciocinamos como no 1.º caso.

-3.º caso: $y = b$.

Aqui, a reta l é paralela ao eixo OX e a razão é nula para todas as posições de A e de P.

Definição 3.1.2 *Seja l uma reta não paralela ao eixo OY. Sejam (a, b) e (x, y) dois pontos distintos dessa reta. Chamamos de declividade da reta l a razão $(y - b)/(x - a)$.*

Observação 3.1.3 *Se l é paralela ao eixo OY, não definimos sua declividade pois quaisquer dois pontos da mesma deve ter a mesma abcissa e, portanto, a razão que define a declividade não faz sentido (denominador nulo).*

Observação 3.1.4 *A declividade da reta ligando os pontos $(0,0)$ e $(1,m)$ é, pela definição, igual a m. Com isso, todo número real m é declividade de alguma reta. Para isso, basta, por exemplo, considerar a reta que contém os pontos $(0,0)$ e $(1,m)$.*

3.2 Equações da Reta no Plano

Seja l uma reta do plano.

3.2.1 A Equação Fundamental

- 1.º caso: l é paralela ao eixo OY

Se l contém o ponto (x_0, y_0) então cada ponto da mesma deve ter abcissa x_0, e, portanto, todo ponto de abcissa x_0 é um ponto de l. Assim, l é o gráfico da equação $x = x_0$.

- 2.º caso: l não é paralela ao eixo OY

Sejam m a declividade (faz sentido pois l não é paralela ao eixo OY) e $A = (x_0, y_0)$ um ponto de l. Então um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta quando o segmento AP tem declividade m, isto é, quando $m = (y - y_0)/(x - x_0)$. Daí, $y - y_0 = m(x - x_0)$. A reta l é o gráfico da equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, conhecida como *equação fundamental da reta.*

3.2.2 A Equação Geral

Teorema 3.2.1 *Em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares OXY toda reta l é o gráfico de uma equação linear nas variáveis x e y e, reciprocamente, o gráfico de toda equação linear em x e y é uma reta l.*

Demonstração. Se a reta l é paralela ao eixo OY então é o gráfico de uma equação da forma $x = x_0$ que é linear. Se l não é paralela ao eixo OY então é o gráfico de uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ que também é linear.
Reciprocamente, seja $ax + by = c$ uma equação linear em x e y com $a^2 + b^2 \neq 0$.

- 1.º caso: $b = 0$

Então $x = c/a$. O gráfico dessa equação é uma reta paralela ao eixo OY.

- 2.º caso: $b \neq 0$

Consideremos $P = (x, y)$ e $A = (x_0, y_0)$ dois pontos distintos da equação linear dada. Então $ax+by = c$ e $ax_0+by_0 = c$. Subtraindo essas equações, vem que $a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$, isto é, $y-y_0 = \frac{-a}{b}(x-x_0)$ já que $b \neq 0$. Logo, P está na reta que contém o ponto (x_0, y_0) e que tem declividade $m = -a/b$. Como as equações $ax + by = c$ e $y - y_0 = \frac{-a}{b}(x - x_0)$ têm o mesmo gráfico e essa última tem como gráfico uma reta então o gráfico da equação linear dada também é uma reta. □

Observação 3.2.2 *1. Para traçar o gráfico da equação linear $ax+by = c$ basta marcar dois pontos que satisfazem a mesma e traçar a reta que une esses pontos.*

2. Para se determinar os pontos onde a reta intersecta os eixos coordenados basta fazer $x = 0$ e determinar y e depois fazer $y = 0$ e determinar x.

3. A declividade da reta de equação $ax + by = c$ é $m = -a/b$.

4. De agora em diante no lugar de dizermos "a reta de equação $ax + by = c$"vamos dizer apenas "a reta $ax + by = c$".

A equação $ax + by = c$ com $a^2 + b^2 \neq 0$ é conhecida como *equação geral da reta.*

3.2.3 A Equação Reduzida

A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ pode ser reescrita como $y = mx + k$ onde $k = y_0 - mx_0$. Essa última é chamada de *equação reduzida da reta.*

O gráfico de ambas, por serem lineares, são retas. Na verdade a mesma reta. A diferença é que na primeira equação tiramos que o ponto (x_0, y_0) está sobre a reta e na segunda equação tiramos que o ponto $(0, k) = (0, y_0 - mx_0)$ está sobre a mesma. A inclinação, como já vimos, é determinada por dois pontos da reta com abcissas distintas $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

3.2.4 A Equação Segmentária

Consideremos a equação:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Multiplicando essa por ab, vem que $bx + ay = ab$. O gráfico dessa última equação é uma reta com declividade $m = -b/a$. Logo, a equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ é uma reta que contém os pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$ e que é conhecida como *equação segmentária da reta* que contém os pontos mencionados.

3.2.5 A Equação Paramétrica

Equações que descrevem a trajetória de um ponto (x, y) em função de um parâmetro t são chamadas de *equações paramétricas.* Assim, as equações paramétricas de uma reta contendo dois pontos distintos (a, b) e (c, d) são dadas por:

$$\begin{cases} x = a + t(c - a), \\ y = b + t(d - b) \end{cases}$$

(cf.: página 9).

3.3 Posições Relativas de Duas Retas no Plano

Sejam l e l' duas retas não-paralelas ao eixo OY com inclinações α e α' e declividades m e m', respectivamente.

Se $\alpha = \alpha'$, isto é, $m = m'$ então l e l' são paralelas e, reciprocamente. Caso contrário, $m \neq m'$ e assim, l e l' são concorrentes.

3.3.1 Paralelismo de Retas no Plano

Com o que colocamos até aqui, temos o resultado abaixo.

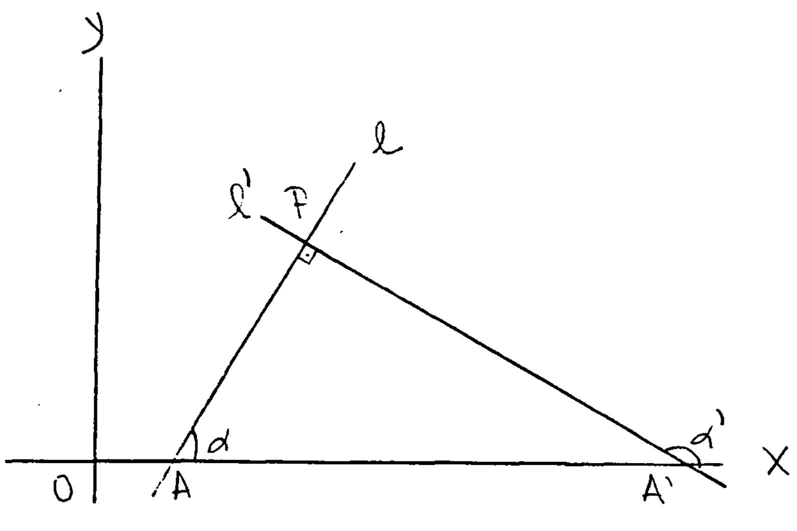
Teorema 3.3.1 *Sejam l e l' duas retas distintas e não-paralelas ao eixo OY com declividades m e m', respectivamente. Então l e l' são paralelas $\Leftrightarrow m = m'$.*

Observação 3.3.2 *Consideremos l e l' duas retas que se intersectam em um ponto P de coordenadas (x_0, y_0). Como o ponto P pertence as duas retas, suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente as equações das duas retas. Algebricamente, isso acontece quando esse par é solução de um sistema formado por essas duas equações. Logo, para encontrarmos as coordenadas do ponto P de intersecção de duas retas, precisamos resolver um sistema formado pelas equações das duas retas em questão.*

3.3.2 Perpendicularismo de Retas no Plano

Sejam l e l' duas retas concorrentes num ponto P, isto é, duas retas que se intersectam num ponto P.

Consideremos A e A' as intersecções de l e l' com o eixo OX. Desse modo, obtemos um triângulo APA'.



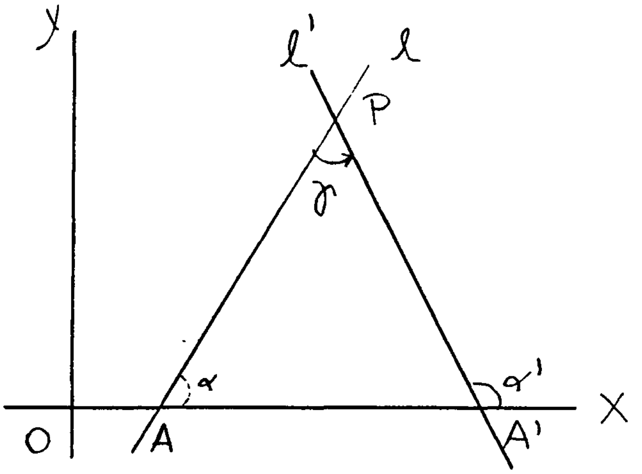
Suponhamos que os segmentos AP e $A'P$ são perpendiculares. Então $\alpha' = \alpha + 90.^o$. Daí, $m' = \tan\alpha' = \tan(\alpha + 90.^o) = -1/\tan\alpha = -1/m$. Com isso, temos:

Teorema 3.3.3 *Duas retas l e l' com declividades m e m', respectivamente são perpendiculares* $\Leftrightarrow m.m' = -1$.

3.4 Ângulo Formado por Duas Retas no Plano

- 1.º caso: Sejam l e l' duas retas não-paralelas ao eixo OY com declividades m e m', respectivamente. Elas determinam dois pares de ângulos congruentes (mesma medida), por serem opostos pelo vértice. Dois desses ângulos são agudos e dois obtusos

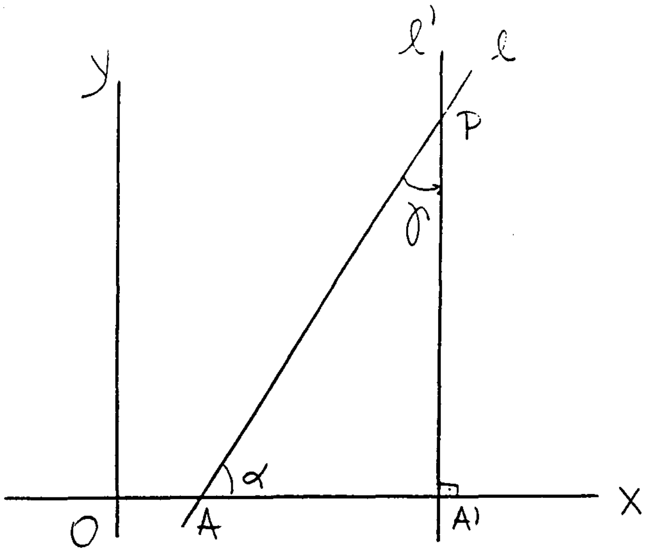
Definimos o ângulo formado pelas retas l e l' como sendo o ângulo agudo γ, medido no sentido anti-horário, desde uma das retas, digamos l até a outra reta, no caso l'.



Sejam P o ponto de intersecção de l com l', A o ponto de intersecção de l com o eixo OX e A' o ponto de intersecção de l' com o eixo OX. Temos $\alpha' = \alpha+\gamma$, já que α' é o ângulo externo do triângulo, isto é, $\gamma = \alpha' - \alpha$. Daí, $\tan\gamma = \tan(\alpha' - \alpha) = (m' - m)/(1 + m'.m)$. Conforme a posição das retas, a fórmula obtida pode nos fornecer $\tan\gamma > 0$ (ângulo agudo), ou $\tan\gamma < 0$ (ângulo obtuso). Para nos assegurarmos de que estamos obtendo a tangente do ângulo agudo, vamos considerar $\tan\gamma = |(m' - m)/(1 + m'.m)|$.

- 2.º caso: Suponhamos que uma das retas é paralela ao eixo OY.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que é a reta l'.



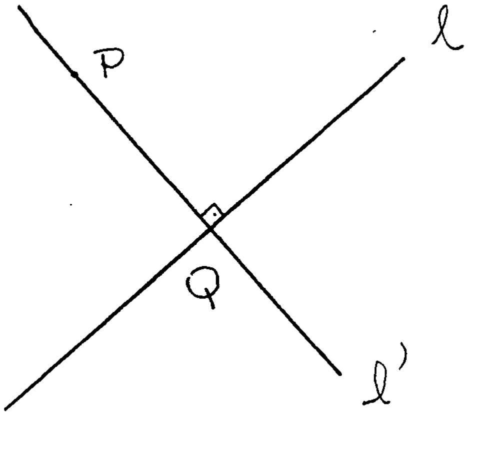
Temos $\gamma + \alpha = 90.^o$, isto é, $\gamma = 90.^o - \alpha$. Daí, $\tan\gamma = \tan(90.^o - \alpha) = 1/\tan\alpha$. Como $\tan\alpha = m$, segue que $\tan\gamma = 1/m$. Pela mesma razão dada no caso anterior, vamos considerar $\tan\gamma = |1/m|$.

3.5 Distância de um Ponto a uma Reta no Plano

Sejam l e P uma reta e um ponto de um plano onde fixamos um sistema de coordenadas retangulares OXY. Suponhamos que $P \notin l$. Gostaríamos de achar a distância entre P e l.

O raciocínio que vamos usar é o seguinte.

Primeiramente, determinamos a equação da reta l' perpendicular a l e que contém o ponto P. Depois fazemos a intersecção de l com l'. Essa vai nos dar um ponto Q. Daí, a distância procurada, na verdade é a distância $d(P, Q)$ entre os pontos P e Q que já sabemos calcular pela seção 2.2.



Com isso, não é preciso "decorar" fórmula alguma.

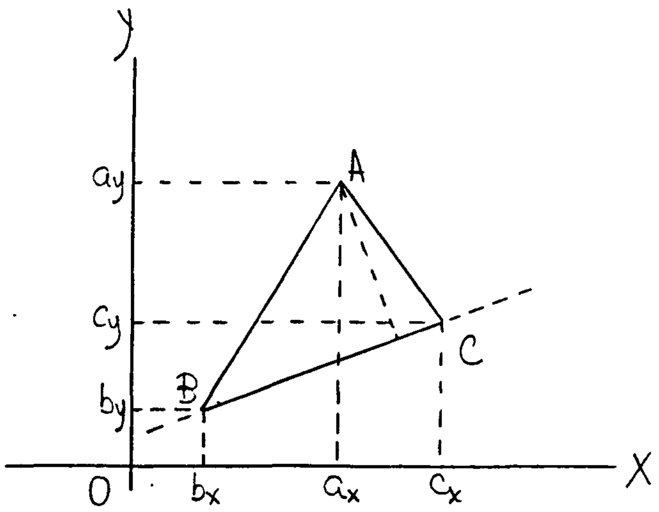
Em todo caso, se a equação da reta l é dada por $ax + by + c = 0$ e as coordenadas do ponto P são (x_0, y_0) com um simples cálculo chegamos à fórmula:

$$d(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esse resultado nos permite algumas aplicações interessantes. Vejamos.

3.5.1 Área de um Triângulo

Sejam $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ e $C = (c_x, c_y)$ vértices de um triângulo. Sabemos que sua área é dada por: $\frac{1}{2}$*base.altura*. Podemos tomar a base como a distância entre os pontos B e C. Com isso, a altura correspondente será a distância entre o ponto A e a reta determinada pelos pontos B e C.

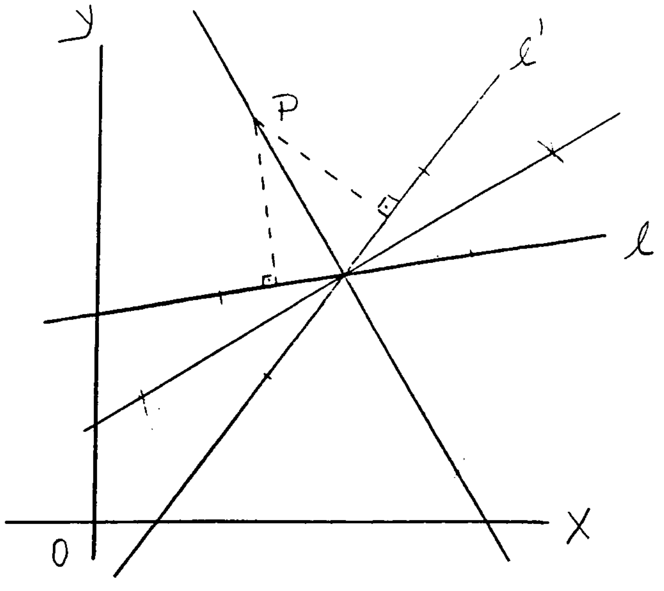


Pelo que já vimos, após alguns cálculos, chegamos que:

$$\frac{1}{2}|a_x b_y + b_x c_y + c_x a_y - c_x b_y - b_x a_y - a_x c_y|.$$

3.5.2 Bissetrizes dos Ângulos Entre Duas Retas

Consideremos l e l' duas retas concorrentes com equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, respectivamente. Seja $P = (x, y)$ um ponto de qualquer uma das duas bissetrizes (bissetriz: reta que divide um ângulo entre duas retas concorrentes em dois ângulos iguais).



Como a distância entre P e l deve ser igual à distância entre P e l' tiramos que:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

E, daí segue que:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

isto é,

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} = 0.$$

Essa igualdade nos dá as duas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas l e l'.

Capítulo 4

A Circunferência no Plano

4.1 A Equação Reduzida

Definição 4.1.1 *Chamamos de circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r ao conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância de P a C é igual a r. Simbolicamente,*

$$\{P : d(P, C) = r\} = \{(x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}.$$

Elevando ambos os membros da equação $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ ao quadrado, obtemos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Essa última é conhecida como *equação reduzida da circunferência*. As coordenadas a e b são chamadas de coordenadas do centro C.

4.2 A Equação Geral

Desenvolvendo a equação reduzida, e agrupando os termos de maneira conveniente, chegamos que:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Chamamos essa expressão de *equação geral da circunferência de centro C e raio r*.

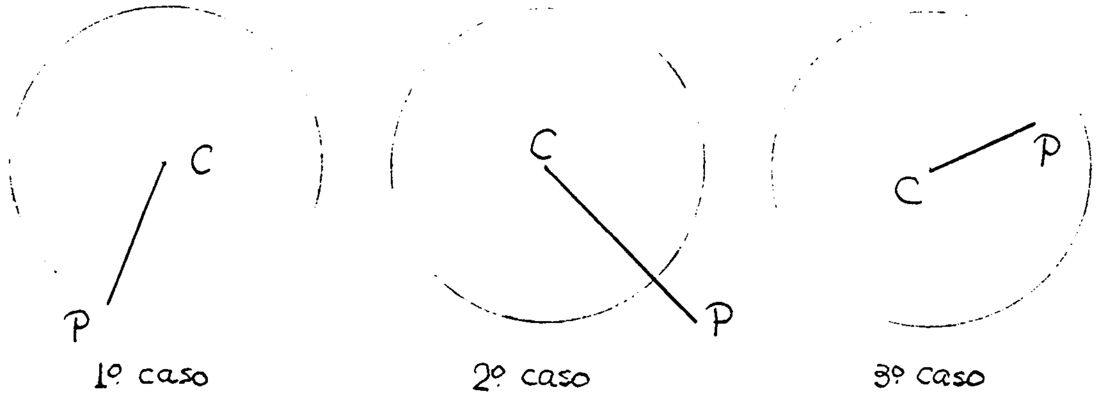
Observação 4.2.1 *Observemos que a expressão acima pode ser reescrita como $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ onde os coeficientes são números reais. Nem toda equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ onde os coeficientes são números reais representam circunferência. Um método prático para se ver isso é a "completação" de* *quadrados. Ao tomarmos esse procedimento, vamos obter o centro e o raio da eventual circunferência.*

4.3 Posições Relativas Entre Ponto e Circunferência

Consideremos uma circunferência de centro C e raio r. Seja P um ponto qualquer do plano. Temos três casos a considerar:

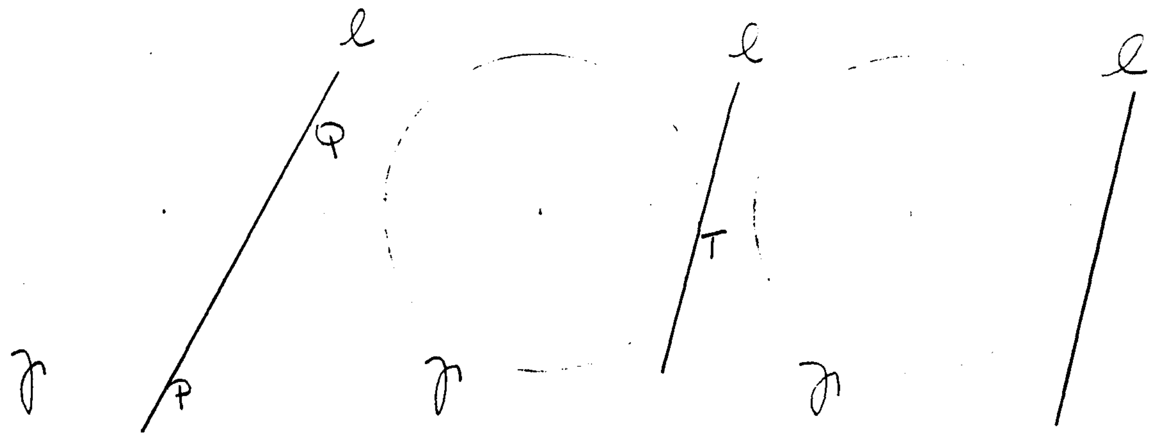
- 1.º caso: se $d(P, C) = r$ então P pertence à circunferência;
- 2.º caso: se $d(P, C) > r$ então P é externo à circunferência;
- 3.º caso: se $d(P, C) < r$ então P é interno à circunferência.

Vejamos as figuras correspondentes.



4.4 Posições Relativas Entre Retas e Circunferência

Consideremos γ uma circunferência de centro C e raio r. Seja l uma reta qualquer do plano. Então essa reta e essa circunferência podem se interseccionar em dois pontos, em apenas um ponto, ou em ponto algum. No primeiro caso, chamamos l de *reta secante* e no segundo caso, de *reta tangente* à γ. Assim, $l \cap \gamma = \{P, Q\} \Rightarrow l$ é secante à γ e, $l \cap \gamma = \{T\} \Rightarrow l$ é tangente à γ.



4.5 Tangência

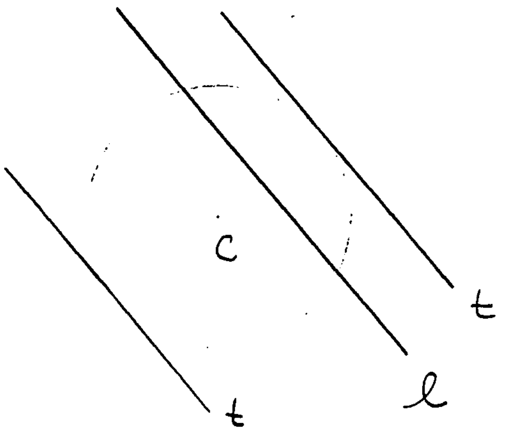
Com o que desenvolvemos até agora estamos capacitados a resolver alguns problemas interessantes.

4.5.1 Problemas Sobre Tangência

1. Dada uma circunferência, determinar as retas tangentes à mesma em uma dada direção.

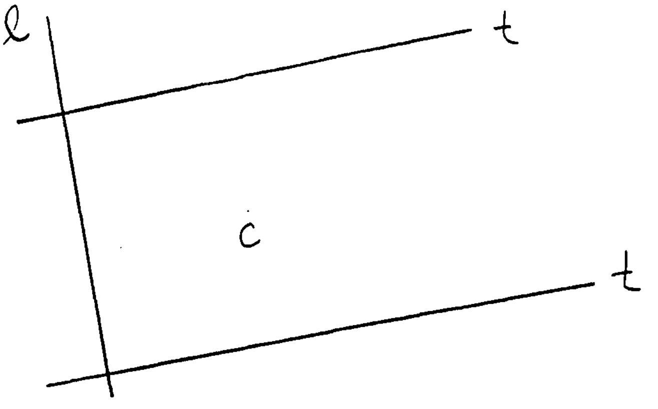
   (a) Determinar as equações das retas t, tangentes à uma circunferência γ com centro C, que são paralelas à uma reta l.

   Se l tem equação geral $ax + by + c = 0$ então t deve ter equação geral também da forma $ax + by + d = 0$, já que ambas são paralelas. Assim, é preciso apenas encontrar o valor de d e este é determinado quando fazemos $d(C, t) = r$ onde r é o raio da circunferência.



(b) Determinar as equações das retas t, tangentes à uma circunferência γ com centro C que são perpendiculares à uma reta l.

Como l e t devem ser perpendiculares, temos a relação entre seus coeficientes angulares $m_t = -1/m_l$. Novamente, usando a equação geral da reta, vamos precisar determinar o termo constante e este vem do fato de $d(C, t) = r$, desde que r seja o raio de γ.

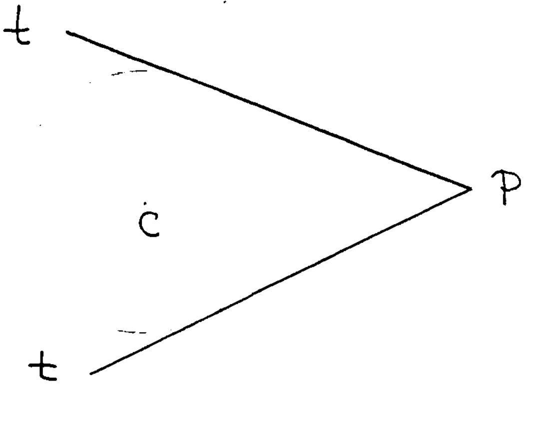


2. Dada uma circunferência γ de centro C e raio r, determinar as retas t, tangentes à mesma, contendo um ponto $P = (x_0, y_0)$ dado.

Primeiramente, precisamos determinar qual a posição desse ponto em relação à circunferência e isso é feito através do cálculo $d(C, P)$. Com esse temos as três possibilidades, consideradas a seguir:

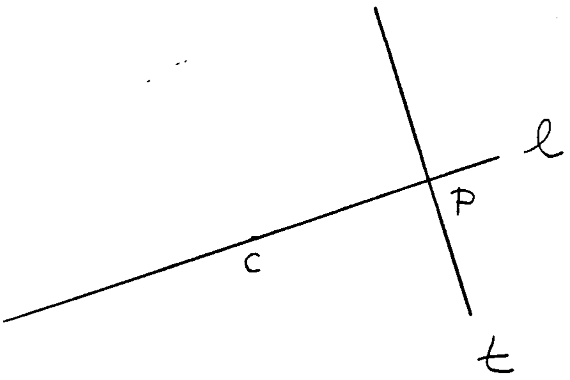
(a) $d(C, P) > r$:

Aqui, temos duas soluções que são as retas t de equações $y - y_0 = m(x - x_0)$, isto é, $mx - y + y_0 - mx_0 = 0$. Falta então determinar o coeficiente angular m e este é dado através da distância $d(C, t) = r$.



(b) $d(C, P) = r$:

Aqui, $P \in \gamma$ e, portanto, P é o próprio ponto de tangência. A única solução t é determinada da seguinte maneira. Achamos o coeficiente angular da reta l que contém os pontos P e C. Esta é perpendicular a t. Sendo assim, temos m_t. E, como t contém P, chegamos ao resultado.



(c) $d(C, P) < r$:

Nesse caso, o problema não tem solução.

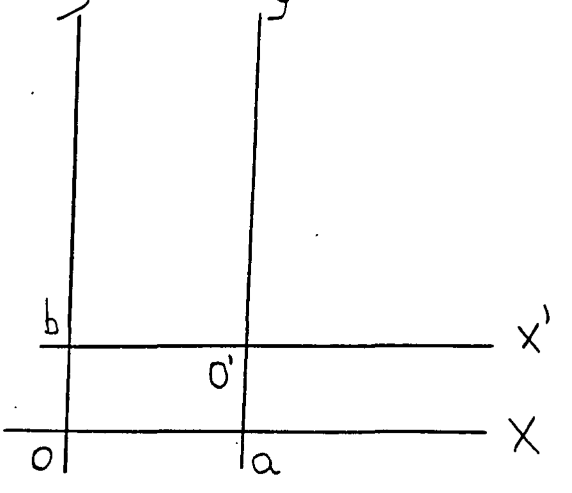
Capítulo 5

Vetores no Plano

5.1 Translação

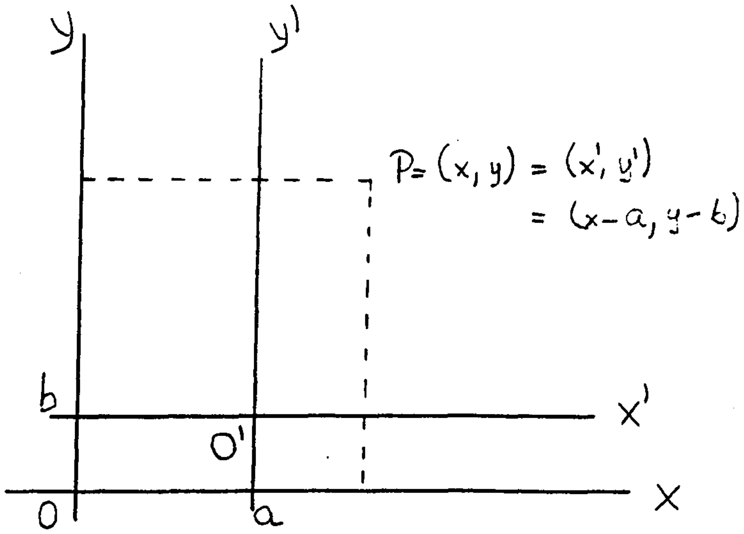
Primeiramente, vamos recordar o movimento rígido do plano todo em uma direção fixa, isto é, o movimento do plano que conserva (preserva) distância, direção e sentido, conhecido por *translação*. Antes porém, precisamos dizer o que entendemos por movimento rígido do plano. Para nós significa uma correspondência biunívoca do plano nele mesmo.

Consideremos um sistema de coordenadas retangulares OXY. Deslocando o eixo OY de a unidades à direita então a abcissa de qualquer ponto fica diminuida de a unidades. Deslocando o eixo OX de b unidades, devemos subtrair essas b unidades da ordenada de todo ponto.



Portanto, se a origem $O = (0,0)$ for mudada para $O' = (a,b)$ e os novos eixos coordenados $O'X'$ e $O'Y'$ permanecerem paralelos a OX e OY, respectivamente (com mesma orientação), as novas coordenadas do ponto $P = (x,y)$ serão (x', y') onde $x' = x - a$ e

$y' = y - b$.



Como já vimos anteriormente, as equações $x' = x - a$ e $y' = y - b$ são conhecidas como equações de translação de $(0,0)$ para (a,b).

5.2 Vetores

Vetores servem principalmente para deslocar pontos ou, mais precisamente, efetuar translações. Conseqüentemente, deslocando cada um dos pontos de uma figura, eles efetuam uma translação dessa figura.

Lembremos que um segmento de reta orientado é um segmento de reta onde escolhemos o ponto (extremidade) inicial e, portanto, o ponto (extremidade) final.

Definição 5.2.1 *Dizemos que dois segmentos de reta orientados são equipolentes quando:*

1. *têm o mesmo comprimento;*
2. *têm a mesma direção (são paralelos, ou colineares);*
3. *têm o mesmo sentido.*

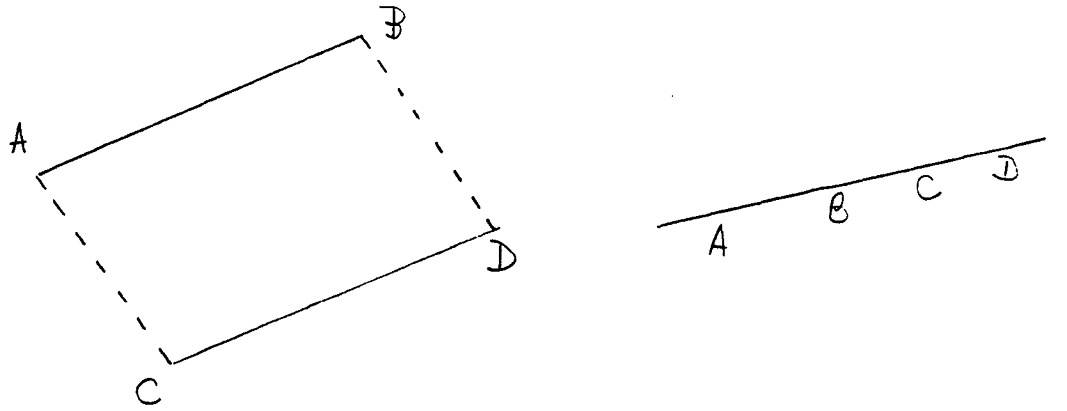
O que significa ter o mesmo sentido?

- AB paralelo a CD e $d(A,B) = d(C,D)$:

AB e CD têm o mesmo sentido quando esses segmentos são lados de um paralelogramo do qual os outros dois lados são AC e BD.

- AB e CD colineares:

AB e CD têm o mesmo sentido quando uma das semi-retas AB e CD está contida na outra.

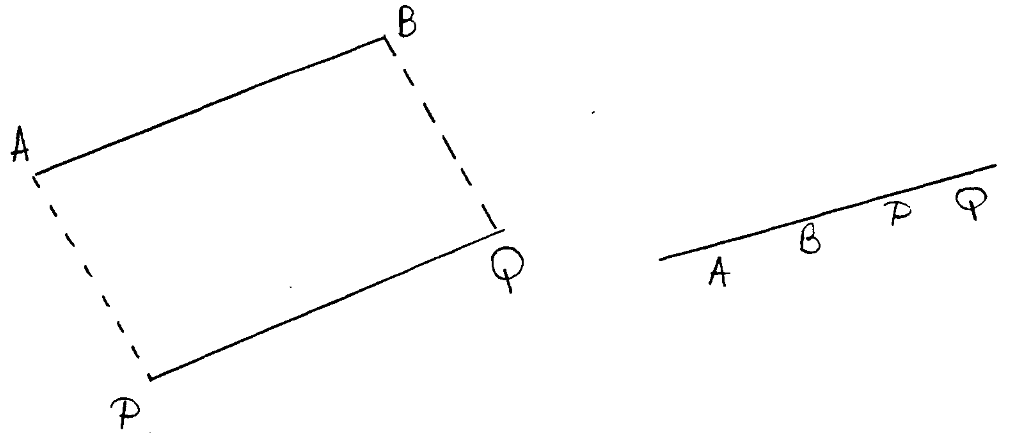


Teorema 5.2.2 *Sejam $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$, $C = (c_x, c_y)$ e $D = (d_x, d_y)$. Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes $\Leftrightarrow$ o ponto médio do segmento AD coincide com o ponto médio do segmento BC $\Leftrightarrow$ $d_x - a_x = b_x - c_x$ e $d_y - a_y = b_y - c_y$.*

Demonstração. Decorrência imediata da definição de segmentos equipolentes. $\square$

Teorema 5.2.3 *Dados um segmento orientado AB e um ponto P, existe um único ponto Q tal que os segmentos orientados AB e PQ são equipolentes.*

Demonstração. Se A, B e P não são colineares então Q é o quarto vértice do paralelogramo $ABPQ$. Caso contrário, D será colinear com A, B e P de modo que AB e PQ têm o mesmo comprimento e sentido.



$\square$

Definição 5.2.4 *Chamamos de vetor determinado por um segmento orientado AB o conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a AB.*

Assim, quando os segmentos orientados AB e CD são equipolentes dizemos que eles representam o mesmo vetor v. Nesse caso, escrevemos $v = \vec{AB} = \vec{CD}$.

Dado então um vetor v, quaisquer segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado que o representa têm o mesmo comprimento. Esse comprimento é conhecido como *módulo do vetor* v e é denotado por $||v||$. A *direção de* v é determinada pela reta que o contém ou por qualquer reta paralela a essa reta. O *sentido* de v onde $v = \vec{AB}$ é do ponto inicial A para o ponto final B.

A importância desses três elementos, *módulo, direção e sentido*, é que eles determinam os vetores, isto é, conhecendo esses três elementos temos o vetor.

Se (a_x, a_y) e (b_x, b_y) são as coordenadas dos pontos A e B então as coordenadas do vetor v são dadas por $(b_x - a_x, b_y - a_y)$, isto é, $v = (v_x, v_y)$ onde $v_x = b_x - a_x$ e $v_y = b_y - a_y$. Além disso, $||v|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ e, portanto, $||v|| = d(A, B)$.

O teorema anterior e a definição de vetor nos permite concluir que: dados o vetor $v = \vec{AB}$ e um ponto P, existe um único ponto Q tal que $\vec{PQ} = v$. Nesse caso, escrevemos $Q = P + v$ e dizemos que o vetor v transportou o ponto P até a posição Q.

Se fixarmos um vetor não-nulo v do plano, podemos considerar uma transformação (= função) $T_v : \pi \longrightarrow \pi$, chamada *translação por* v. Para cada ponto P desse plano π, essa transformação faz corresponder um outro ponto Q de π. Esse ponto Q é determinado de maneira única pelo que acabamos de colocar. Assim, $T_v(P) = Q = P + v$, desde que $\vec{PQ} = v$.

Com isso, se $F \subset \pi$ é uma figura (subconjunto qualquer do plano π) então o conjunto

$$F + v = \{P + v; P \in F\} = T_v(F)$$

é o transladado do conjunto F pelo vetor v.

Teorema 5.2.5 *Seja v um vetor com coordenadas (α, β). A translação $T_v : \pi \longrightarrow \pi$ definida por $P = (x, y) \mapsto T_v(P) = T_v(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$ preserva distâncias, isto é, se $T_v(P) = P'$ e $T_v(Q) = Q'$ então $d(P', Q') = d(T_v(P), T_v(Q)) = d(P, Q)$.*

Demonstração. Se $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ então $P' = (a + \alpha, b + \beta)$ e $Q' = (c+\alpha, d+\beta)$. Daí, $d(P, Q)^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$ e $d(P', Q') = (c+\alpha-a-\alpha)^2 + (d+\beta-b-\beta)^2$. Comparando, vamos obter que $d(P, Q) = d(P', Q')$. $\square$

Observação 5.2.6 *Convém observarmos que preservando distâncias, a translação também preserva áreas. Que a translação preserva direção e sentido é óbvio pela definição de vetores que demos.*

Uma das vantagens em se trabalhar com vetores é que com eles podemos fazer operações. Antes de passarmos à algumas delas, vamos fazer uma colocação.

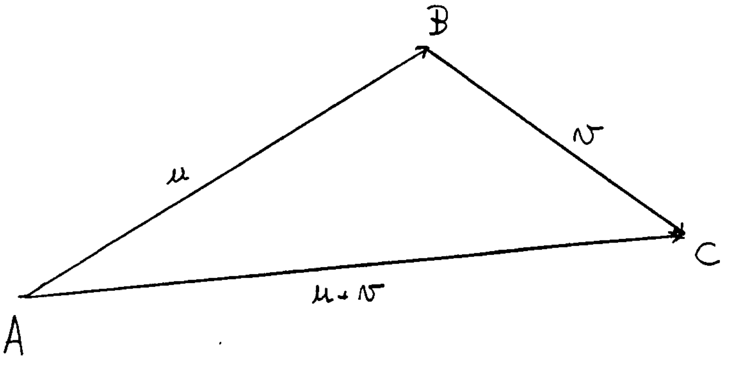
O vetor $\vec{AA}$ é conhecido como *vetor nulo.* Este pode ter, como os demais vetores, sua origem localizada em qualquer ponto do plano.

5.3 Operações com Vetores

5.3.1 Adição de dois vetores

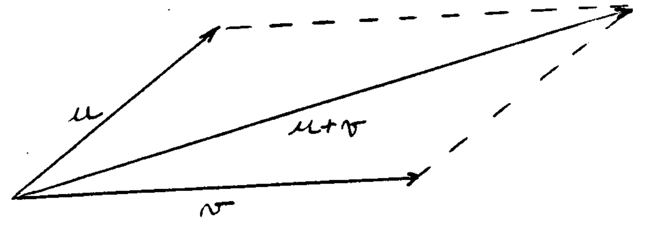
Definimos a soma $u + v$, entre dois vetores u e v, geometricamente, de duas maneiras:

- o ponto final de um vetor, digamos u como sendo o ponto inicial do outro, no nosso caso, v.



Nessa maneira, $u + v$ é o vetor cujo ponto inicial é o ponto inicial do vetor u e o ponto final, o ponto final do vetor v.

- os dois vetores u e v com mesmo ponto inicial. (regra do paralelogramo)



Aqui, o vetor soma $u + v$ é a diagonal principal do paralelogramo. Notemos que essa nossa segunda maneira de definir soma só faz sentido quando o ângulo entre os dois vetores for não-nulo.

Analiticamente, isto é, em coordenadas, essa operação, levando-se em conta a compatibilidade em relação a geometria da primeira maneira acima, é efetuada do seguinte modo.

Se $u = (\alpha, \beta)$, $v = (\gamma, \delta)$ e $A = (a_x, a_y), B = (b_x, b_y), C = (c_x, c_y)$ são pontos tais que os vetores $u = \vec{AB}$ e $v = \vec{BC}$ então tiramos que $b_x = \alpha + a_x$, $b_y = \beta + a_y$, $c_x = \gamma + b_x$ e $c_y = \delta + b_y$. Com isso, $c_x = \gamma + \alpha + a_x$ e $c_y = \delta + \beta + a_y$. Como, por definição, $u + v = \vec{AC}$, segue que $u + v = (\gamma + \alpha, \delta + \beta)$. Resumindo, se $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\gamma, \delta)$ então $u + v = (\gamma + \alpha, \delta + \beta)$.

Essa operação é:

-comutativa: $u + v = v + u$;
-associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

$\forall u, v, w$ vetores.

Além disso, tem:

-elemento neutro que é o vetor nulo já introduzido;
-elemento inverso: dado um vetor $v = \vec{AB}$, existe um único vetor $u = \vec{BA}$ com $u + v = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ (denotamos o vetor $\vec{BA}$ como $-\vec{AB}$).

5.3.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Sejam λ um número real não-nulo e v um vetor também não-nulo. Gostaríamos de definir o produto λv. Para isso, vamos usar os três elementos que determinam um vetor.

Definição 5.3.1 *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e v um vetor não-nulo. Definimos λv o vetor determinado por:*

-módulo: $||\lambda v|| = |\lambda| . ||v||$;
-direção: mesma de v (λv é paralelo à v);
-sentido: mesmo de v se $\lambda > 0$ e contrário de v se $\lambda < 0$.

Em relação a um sistema de coordenadas se $v = (a, b)$ então $\lambda v = (\lambda a, \lambda b)$.

Essa operação é:

-associativa: $\lambda(\alpha v) = (\lambda\alpha)v$;
-distributiva em relação à operação de adição: $(\lambda + \alpha)v = \lambda v + \alpha v$ e
$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

$\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v$ vetores.

5.3.3 Produto Escalar

Vamos definir agora uma operação entre dois vetores cujo resultado é um número real, isto é, um escalar.

Definição 5.3.2 *Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ dois vetores. Chamamos de produto escalar ou produto interno dos vetores u e v, o número real dado por: $ac + bd$ e, escrevemos uv ou $< u, v >$.*

Podemos mostrar as seguintes propriedades dessa operação:

-comutativa: $uv = vu$;
-associativa: $(uv)w = u(vw)$;
-$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$;
-$u(v + w) = uv + uw$;
-$uu \geq 0$ e $uu = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
-$uu = ||u||^2$.

$\forall u, v, w$ vetores e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

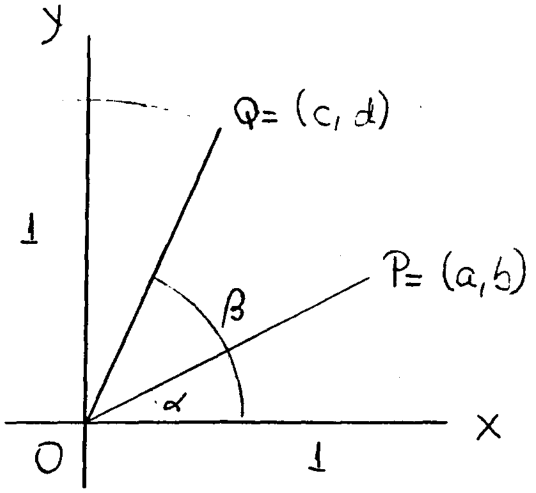
5.4 Ângulo Entre Dois Vetores

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ dois pontos do plano com $P, Q \neq 0$.

- 1.º caso: $d(P, O) = d(Q, O) = 1$.

Consideremos α, β o ângulo que os segmentos OP e OQ fazem com o eixo OX.

Então $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha, c = \cos\beta$ e $d = \sin\beta$.



Seja $\gamma = \beta - \alpha$.
Então, $\cos\gamma = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = ac + bd$, isto é, $\cos\lambda = ac + bd$.
Ainda mais, se analisarmos essa igualdade com cuidado, vamos concluir que $\gamma \in [0, \pi)$.

- 2.º caso: $d(P, O) \neq 1$ ou $d(Q, O) \neq 1$.

Consideremos $P' = (a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$, $Q' = (c/\sqrt{c^2+d^2}, d/\sqrt{c^2+d^2})$.
Então $d(P', O) = d(Q', O) = 1$ e, pelo caso anterior, tiramos que o ângulo λ entre os segmentos OP' e OQ', que é o mesmo ângulo entre os segmentos OP e OQ, é dado por:

$$\cos\lambda = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Observemos que essa última expressão também se aplica no 1.º caso.
Com essas considerações, temos a definição a seguir.

Definição 5.4.1 *Sejam u, v dois vetores não-nulos. Chamamos de ângulo entre os vetores u e v e denotamos por λ o ângulo dado pela igualdade:*

$$\cos\lambda = \frac{uv}{||u||.||v||}.$$

Observemos que $\lambda \in [0, \pi)$.

Com essa definição e a lei dos cossenos, mostramos que $||u - v||^2 = ||u||^2||v||^2 - 2||u||||v||\cos\lambda$, onde λ é o ângulo entre os vetores não-nulos u e v.

5.5 Equação Vetorial da Reta

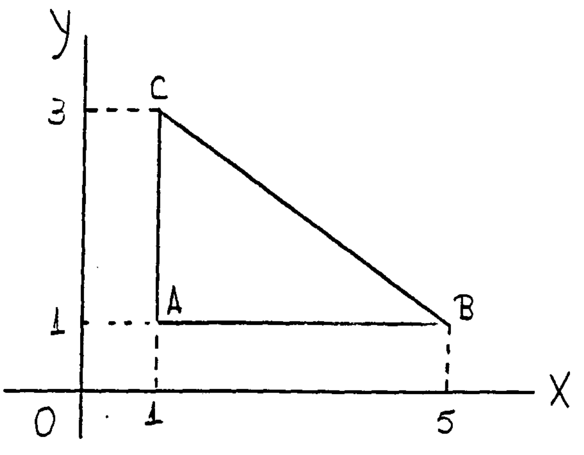
Seja l uma reta que contém os pontos A e B. Então a equação $A + tv$ onde $v = \vec{AB}$ e $t \in \mathbb{R}$ é conhecida como *equação vetorial da reta l.*

Capítulo 6

Exercícios Propostos

1. A distância entre dois pontos M e N de abcissas 3 e k, respectivamente, é igual a 10. Calcule os possíveis valores de k.

2. Observe o triângulo ABC da figura seguinte, no plano cartesiano, e responda:



   (a) Como você classificaria esse triângulo quanto aos ângulos?
   (b) Quantas unidades de comprimento tem o lado $\overline{AB}$?
   (c) Quantas unidades de comprimento tem o lado $\overline{AC}$?
   (d) Qual a área da região limitada por esse triângulo?
   (e) Quais as coordenadas dos vértices desse triângulo?

3. Sabe-se que o ponto $P = (a, 2)$ é eqüidistante dos pontos $A = (3, 1)$ e $B(= 2, 4)$. Calcular a abcissa do ponto P.

4. Prove que o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (2, -2)$, $B = (-3, -1)$ e $C = (1, 6)$ é isósceles .

5. Usando o teorema de Pitágoras, verifique se o triângulo de vértices $A = (-1, -3)$, $B = (6, 1)$ e $C = (2, -5)$ é retângulo.

6. A distância do ponto $P = (a, 1)$ ao ponto $A = (0, 2)$ é igual a 3. Calcule o número a.

7. Calcule o número real a de forma que a distância do ponto $P = (2a, 3)$ ao ponto $Q = (1, 0)$ seja igual a $3\sqrt{2}$.

8. Dados $P = (x, 2)$, $A = (4, -2)$ e $B = (2, -8)$, calcule o número real x de modo que o ponto P seja eqüidistante de A e de B.

9. São dados os pontos $A = (2, y)$, $B = (1, -4)$ e $C = (3, -1)$. Qual deve ser o valor de y para que o triângulo ABC seja retângulo em B?

10. Prove que o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (0, 5)$, $B = (3, -2)$ e $C = (-3, -2)$ é isósceles e calcule o seu perímetro.

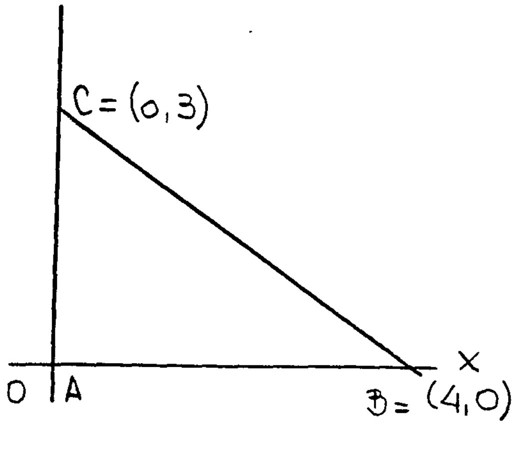
11. Uma das extremidades de um segmento é o ponto $A = (13, 19)$. Sendo $M = (-9, 30)$ o ponto médio do segmento, calcule as coordenadas do ponto B, que é a outra extremidade do segmento.

12. Os vértices de um triângulo são os pontos $A = (0, 4)$, $B = (2, -6)$ e $C = (-4, 2)$. Calcule os comprimentos das medianas do triângulo.

13. Uma das extremidades de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto $A = (3, 2)$. Sendo $M = (-1, 3)$ o ponto médio desse segmento, determine as coordenadas da outra extremidade do segmento.

14. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios dos lados do triângulo são $M = (-2, 1)$, $N = (5, 2)$ e $P = (2, -3)$.

15. A figura abaixo nos mostra um triângulo retângulo ABC. Seja M o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$. Prove, analiticamente, que o ponto M é eqüidistante dos três vértices do triângulo.



16. Calcule os comprimentos das medianas de um triângulo cujos vértices são os pontos $A = (0, 0)$, $B = (4, -6)$ e $C = (-2, -4)$.

17. No plano cartesiano, os pontos $A = (-1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (3, 5)$ e $D = (-1, 5)$ são os vértices de um quadrado. Determine as coordenadas do centro desse quadrado.

18. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados quando:

    (a) $A = (0, 2)$, $B = (-3, 1)$ e $C = (4, 5)$;
    (b) $A = (-2, 6)$, $B = (4, 8)$ e $C = (1, 7)$;
    (c) $A = (-1, 3)$, $B = (2, 4)$ e $C = (-4, 10)$.

19. Os pontos $A = (x, 3)$, $B = (-2, -5)$ e $C = (-1, -3)$ são colineares. Qual é o valor de x?

20. Seja P o ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas. Sendo r a reta determinada pelos pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (4, 2)$, calcule as coordenadas do ponto P.

21. Determine x de modo que os pontos $A = (1, 3)$, $B = (x, 1)$ e $C = (3, 5)$ sejam os vértices de um triângulo.

22. Os pontos $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ e $C = (p, q)$ estão alinhados. Determine o valor de p em função de q.

23. Uma reta r é determinada pelos pontos $A = (2, 0)$ e $B = (0, 4)$, e uma reta s é determinada pelos pontos $C = (-4, 0)$ e $D = (0, 2)$. Seja $P = (a, b)$ o ponto de interseção das retas r e s. Determine as coordenadas do ponto P.

24. Mostre que, para todos os valores reais de t e n, os pontos $A = (2, 3)$, $B = (2 + 4t, 3 - 5t)$ e $C = (2 + 4n, 3 - 5n)$ são colineares.

25. Determine t sabendo que os pontos $A = (\frac{1}{2}, t)$, $B(\frac{2}{3}, 0)$ e $C = (-1, 6)$ são colineares.

26. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A = (3, 2)$ e $B = (-3, -1)$ e esboçe seu gráfico no plano cartesiano.

27. Determine o coeficiente angular das retas que passam pelos pontos A e B e faça o gráfico de cada reta, quando:

    (a) $A = (-1, 4)$ e $B = (3, 2)$;
    (b) $A = (4, 3)$ e $B = (-2, 3)$;
    (c) $A = (2, 5)$ e $B = (-2, -1)$;
    (d) $A = (4, -1)$ e $B = (4, 4)$.

28. Um cientista verifica que, quando a pressão de um gás é de $1atm$, o volume é de $20cm^3$ e, quando a pressão é de $7atm$, o volume é de $8cm^3$. Calcule a taxa média de volume representada pela declividade entre $P_1 = (1, 20)$ e $P_2 = (7, 8)$.

29. O crescimento y de uma cultura biológica passa de $8cm^2$ para $10cm^2$, enquanto o tempo x aumenta de uma para duas horas. Se a taxa média de crescimento é representada pelo coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos, determine essa taxa de crescimento.

30. Determine a equação de uma reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$, e tem coeficiente angular 2.

31. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (5, 2)$.

32. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 5)$ e tem uma inclinação de 60^o.

33. Dado o ponto $A = (-2, 3)$, calcule as coordenadas do ponto $B = (3k, k + 1)$ de modo que o coeficiente angular da reta AB seja $m = \frac{1}{2}$.

34. Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto $A = (1, 5)$ e tem coeficiente angular $m = -2$.

35. Escreva a equação reduzida da reta que tem coeficiente angular $m = 2$ e que cruza o eixo OY no ponto $(0, -3)$.

36. A equação reduzida de uma reta é $y = 4x - 1$. Calcule:
    (a) o ponto da reta de abcissa 2;
    (b) o ponto de interseção da reta com o eixo OX;
    (c) o ponto de interseção da reta com o eixo OY.

37. Dada a reta que tem como equação $3x + 4y = 7$, determine o coeficiente angular da reta.

38. Os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (2, 4)$ são os vértices de um triângulo. Determine as equações das retas suportes dos lados desse triângulo.

39. O ponto $M = (a^2 - 1, 3a)$ pertence à reta de equação $x + y - 3 = 0$. Calcule as coordenadas do ponto M.

40. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

41. Determine a posição da reta r, de equação $2x - 3y + 5 = 0$, em relação à reta s, de equação $4x - 6y - 1 = 0$.

42. Para que valores de a as retas l_1 e l_2, de equações $2x+(a-2)y-5=0$ e $4x+ay-1=0$, respectivamente, são concorrentes?

43. Qual é a posição da reta r, de equação $4x-y-2=0$, em relação à reta s, cuja equação é $12x-3y-25=0$?

44. As retas l_1 e l_2, de equações $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$ e 2x-y+5 = 0, respectivamente, são paralelas ou concorrentes?

45. Determine os valores de m para que as retas l_1 e l_2 de equações $(1-m)x-10y+3=0$ e $(m+2)x+4y-11m-18=0$, sejam concorrentes.

46. As retas r e s, de equações $px+8y+1=0$ e $2x+py-1=0$, respectivamente, são paralelas. Nessas condições, calcule o valor de p.

47. Qual deve ser a relação de igualdade entre a e b para que a reta l_1, de equação $x-3y+15=0$, seja paralela à reta l_2, determinada pelos pontos $A=(a,b)$ e $B=(1,2)$?

48. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $A=(3,-5)$ e é paralela à reta de equação $8x-2y+1=0$.

49. Dada a reta de equação $2x-y+5=0$, escreva a equação da reta paralela à reta dada e que passa pelo ponto $A=(-2,2)$.

50. São dados os pontos $A=(4,3)$ e $B=(-2,-5)$. Determine a equação da reta t que passa pelo ponto $C=(8,-6)$ e que é paralela à reta determinada pelos pontos A e B.

51. Ache a equação da reta r que é paralela à reta $3x-2y+1=0$ e que passa pelo ponto $A=(-2,5)$.

52. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P=(6,-4)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares?

53. As retas r e s, de equações $x+y-4=0$ e $2x-y+1=0$, respectivamente, se intersectam num ponto $P=(a,b)$. Determine as coordenadas do ponto P.

54. As equações das retas suportes dos lados de um triângulo são $x+6y-11=0$, $3x-2y+7=0$ e $x-6y-5=0$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo.

55. O ponto M é o ponto de interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um quadrilátero $ABCD$. Sendo $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(4,2)$ e $D=(0,5)$ os vértices do quadrilátero, determine as coordenadas do ponto M.

56. As retas de equações $4x-3y+a=0$, $5x-y+9=0$ e $3x-2y+4=0$ se intersectam em um ponto. Determine a e o ponto de interseção das retas.

57. Ache a e b para que as retas $ax+5y-7=0$ e $4x+by-5=0$ sejam concorrentes no ponto $P=(2,-1)$.

58. Dada a reta r de equação $2x-y+5=0$ e o ponto $P=(3,5)$, determine a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.

59. Dados os pontos $A=(1,3)$ e $B=(-3,-5)$, determine a equação da mediatriz desse segmento.

60. São dados um ponto $P=(2,6)$ e uma reta r de equação $x+y-2=0$. Determine as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre a reta r.

61. Sabe-se que as retas de equações $4x+ay-7=0$ e $x+2y-a=0$ são perpendiculares. Nessas condições, determine a.

62. Determine o valor de k para que as retas l_1 e l_2 de equações $kx+y+2=0$ e $3x+(k+1)y-7=0$, respectivamente, sejam perpendiculares.

63. Seja $6x-3y+2=0$ a equação da reta suporte da diagonal $\overline{AC}$ de um quadrado $ABCD$. Sendo $D=(1,5)$, determine a equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$ desse quadrado. (Lembre-se de que as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si).

64. São dados a reta l, de equação $x-y+1=0$ e o ponto $P=(3,2)$. Determine as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre a reta l.

65. Os pontos $A=(2,1)$, $B=(-2,-4)$ e $C=(0,2)$ são os vértices de um triângulo ABC. Determine a equação suporte da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo.

66. Determine a equação da reta que intersecta o eixo OY no ponto $A=(0,-1)$ e é perpendicular à bissetriz do primeiro quadrante.

67. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, são dados um ponto $P=(2,3)$ e uma reta r de equação $x+y+1=0$. Seja Q o ponto de interseção da perpendicular à reta r, traçada pelo ponto P, com a reta r. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{PQ}$

68. Determine o ângulo formado pelas retas l_1 e l_2 de equações $2x-y+1=0$ e $3x+y-2=0$, respectivamente.

69. Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $P=(2,3)$ e que forma um ângulo de 45^o com a reta s de equação $3x-2y+1=0$.

70. Ache a tangente do ângulo agudo formado pelas retas de equações $x - 2 = 0$ e $y - 4x = 0$.

71. Determine o valor de a para que a distância do ponto $P = (-1, a)$ à reta r, de equação $3x + 4y - 5 = 0$, seja igual a duas unidades.

72. As retas l_1 e l_2, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $2x + 3y - 10 = 0$, respectivamente, são paralelas. Calcule a distância entre as retas.

73. Calcule a distância do ponto $P = (5, 7)$ à reta de equação $4x - 3y + 2 = 0$.

74. Qual é a distância entre a origem e a reta r que passa pelos pontos $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 3)$?

75. A distância entre o ponto $P = (0, p)$ e a reta r de equação $4x + 3y - 2 = 0$ é igual a duas unidades. Determine o valor de p.

76. O ponto $A = (-1, -2)$ é um vértice de um triângulo equilátero ABC cujo lado $\overline{BC}$ está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determine a medida h da altura desse triângulo.

77. Seja A o ponto de interseção da reta r, de equação $x + y - 2 = 0$, com o eixo das abcissas. Determine a distância do ponto A à reta s, de equação $3x - 4y + 10 = 0$.

78. Os pontos $A = (2, 4)$, $B = (-6, 2)$ e $C = (0, -2)$ são os vértices de um triângulo ABC. Calcule a área desse triângulo.

79. A reta r de equação $x + 2y - 8 = 0$, intersecta o eixo OX no ponto A e o eixo OY no ponto B. Determine a área do triângulo OAB, sendo O o ponto de origem.

80. Os vértices de um triângulo ABC são os pontos $A = (2, k)$, $B = (4, 2)$ e $C = (5, 3)$. A área desse triângulo é seis unidades. Calcule, então, o valor de k.

81. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C = (4, 7)$ e raio $r = 2$.

82. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C = (2, 3)$ e que passa pelo ponto $P = (-1, 2)$.

83. Dentre os pontos $A = (2, 5)$, $B = (0, 5)$ e $C = (3, 1)$, quais pertencem à circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

84. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C = (2, 1)$ e que passa pelo ponto $A = (1, 1)$.

85. O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo $A = (2, -5)$ e $B = (-2, -3)$. Se o raio dessa circunferência é $3\sqrt{2}$, determine a equação da circunferência.

86. Determine a equação de uma circunferência cujo diâmetro é o segmento de extremidade $A = (2, 8)$ e $B = (4, 0)$.

87. Determine a equação da circunferência que tem centro na reta de equação $x-2y+9 = 0$ e que passa pelos pontos $P = (1, -4)$ e $Q = (5, 2)$.

88. Uma circunferência de centro no ponto $Q = (2, 0)$ passa pelo ponto de interseção das retas l_1 e l_2, de equações $x + y - 6 = 0$ e $x - y - 2 = 0$, respectivamente. Determine a equação dessa circunferência.

89. A equação de uma circunferência com centro em $C = (a, b)$ e raio r é $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$. Determmine as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

90. Determine a equação da circunferência de raio $r = 3$ e que é concêntrica com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$.

91. Dada uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, qual é a posição do ponto $P = (3, -4)$ em relação a essa circunferência?

92. Sabe-se que a reta r, de equação $x - y - 1 = 0$, e a circunferência, de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$, são secantes. Nessas condições, determine as coordenadas dos pontos de interseção.

93. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo OX no ponto A e é tangente ao eixo OY no ponto B. Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

94. São dadas a reta l, de equação $4x + 3y - 1 = 0$, e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Qual é a posição da reta l em relação à circunferência?

95. Determine os valores de m de modo que a reta, de equação $4x + 3y + m = 0$, e a circunferência, de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, sejam tangentes.

96. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C = (1, 3)$ e que é tangente à reta s de equação $x + y + 2 = 0$.

97. A reta de equação $x+y-7 = 0$ e a circunferência de equação $x^2+y^2-6x-4y+9 = 0$ são secantes nos pontos A e B. Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

98. Determine os valores de n para que a reta de equação $y = x + n$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

99. A reta l de equação $x = 3$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$. Nessas condições, calcule o valor de k.

100. Determine a equação de uma circunferência de centro $C = (2, 1)$ e que é tangente à reta l de equação $2x + y - 20 = 0$.

101. Uma circunferência tangencia o eixo OX e tem o centro no ponto $C = (3, -2)$. Determine a equação dessa circunferência.

102. Determine a equação da reta t, tangente à circunferência de equação $x^2+y^2-4x = 1$ no ponto $P = (1, -2)$, sabendo que P é o ponto de tangência.

103. A circunferência com centro no ponto $C = (1, 1)$ é tangente à reta de equação $x + y - 10 = 0$. Calcule a equação da circunferência.

104. A reta l, de equação $x-y-2 = 0$, intersecta a circunferência, de equação $x^2 + y^2 = 100$, nos pontos A e B. Sendo C o centro da circunferência, determine a área do triângulo ABC.

105. Mostre que o triângulo de vértices (2,4),(5,1) e (6,5) é isósceles. Calcule, a seguir, seu perímetro.

106. Os pontos $A = (3, 4)$ e $B = (1, -2)$ são eqüidistantes de $P = (0, y)$. Determine y.

107. Determine os valores de x para os quais a distância entre os pontos $A = (x + 2, -3)$ e $B = (3, x - 3)$ é 5.

108. Determine um ponto do eixo das abcissas, eqüidistante de (1,2) e (0,-5).

109. O ponto P tem coordenadas iguais e dista cinco unidades do ponto $Q = (3, 2)$. Quais as coordenadas de P?

110. Qual a condição para que $P = (x, y)$ seja eqüidistante de $A = (2, 3)$ e $B = (5, -1)$?

111. Determine as coordenadas do centro O da circunferência que passa pelos pontos $A = (2, 0)$, $B = (-3, 3)$ e $C = (5, 3)$.(Sugestão: o centro 0 é eqüidistante de A, B e C).

112. Seja o segmento $\overline{AB}$, cujo ponto médio M tem coordenadas $x_M = 3$ e $y_M = -2$. Sendo $A = (1, 0)$, encontre as coordenadas de B.

113. Dados os pontos $A = (2, 4)$ e $B = (6, 2)$, determine:

    (a) as coordenadas do ponto M, médio de $\overline{AB}$;
    (b) as coordenadas do ponto C, sendo B o ponto médio do segmento $\overline{AC}$;
    (c) as distâncias $d(A, B)$ e $d = (A, C)$.

114. Determine os comprimentos das medianas do triângulo de vértices $A = (1, 3)$, $B = (3, 1)$ e $C = (2, 4)$.

115. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $(0,2), (\frac{-1}{2}, 1)$ e $(\frac{3}{3}, 0)$. (Sugestão: use três vezes a fórmula do ponto médio e resolva os dois sistemas de equações resultantes.)

116. De um losango são conhecidos os vértices (1,3),(-3,5) e (0,6). Determine as coordenadas do ponto de interseção das suas diagonais.

117. Quais os valores de k para os quais os pontos (2,3), (5,4) e (1,k) são vértices de um triângulo?

118. São dados os pontos $A = (3,0)$, $B = (4,2)$ e $C = (7,8)$. Calcule as distâncias $d(A,B)$, $d(B,C)$ e $d(A,C)$ e, a seguir, verifique, com base apenas nas distâncias calculadas, se A, B e C estão alinhados.

119. O ponto $(m, 2)$ pertence à reta que contém o ponto $(6,4)$ e a origem do sistema cartesiano. Determine m.

120. Dentre os pontos que eqüidistam de $A = (1,2)$ e $B = (3,4)$, qual o mais próximo de $P = (4,3)$?

121. Encontre a equação reduzida da reta que forma ângulo de 45^o com o eixo das abcissas no seu sentido positivo e que passa por $P = (0,3)$.

122. Qual a equação reduzida da reta que passa pelos pontos (2,6) e (11,6)?

123. Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos (-1,-2) e (-2,3).

124. Encontre a equação geral da reta que passa pelo ponto $A = (1,6)$ e pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$, sendo $B = (2,3)$ e $C = (-1,-3)$.

125. Determine k para que a reta r de equação $2x + 3y - k = 0$ intersecte a primeira bissetriz no ponto de abscissa igual ao coeficiente angular de r.

126. Qual é a relação entre t e z para que a reta determinada por $P = (t, z)$ e $Q = (2,3)$ passe também pela origem do sistema de coordenadas?

127. Qual é a reta dada pelas equações $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$?

128. Encontre a área e o perímetro do triângulo com vértices na origem e nos pontos em que a reta de equação $3x + 2y + 9 = 0$ corta os eixos cartesianos.

129. Obtenha as equações geral, reduzida e segmentária da reta s, dada por $s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$

130. Sejam os pontos $A = (1,1)$, $B = (-1,-1)$, $C = (0,3)$, $D = (\frac{1}{2},2)$ e $E = (2,\frac{1}{2})$ e a reta $r : 2x + y - 3 = 0$. Escreva a equação da reta determinada pelos pontos, dentre os dados, que não pertencem a r.

131. Obtenha o ponto de interseção das retas $r : 2x - 3y + 6 = 0$ e $s : x + y = 3$.

132. Determine as coordenadas de P onde P é o ponto em que a reta determinada por $A = (-3,2)$ e $B = (2,-3)$ intersecta o eixo das abscissas.

133. Encontre a interseção da reta $r : y = 2x - 3$ com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

134. Encontre os valores de a e b para que as retas de equações $ax + 3y - 1 = 0$ e $x + by + 1 = 0$ intersectem-se no ponto (-4,3).

135. Encontre uma equação da reta traçada pelo ponto (2,5) e paralela à reta $4x - 3y = 1$.

136. Dê a equação da reta que é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa pelo ponto (1,6).

137. Para que valores de k as retas $2x + 5y - 3 = 0$ e $kx - 3y + 1 = 0$ são:

a) paralelas e distintas? b) coincidentes c) concorrentes?

138. Obtenha a reta s que passa por $P = (1,2)$ e é perpendicular a $r : 3x + 2y - 5 = 0$.

139. A bissetriz dos quadrantes ímpares é perpendicular à reta r, que contém $P = (2,3)$. Determine a equação de r, bem como sua interseção com o eixo das abscissas.

140. Encontre a distância entre os pontos $P = (2,3)$ e Q, sendo Q o pé da perpendicular à reta $r : 3x - 4y + 1 = 0$ traçada por P.

141. Quais as equações das retas que passam por $P = (1,2)$ e formam ângulos de 45^o com $r : 2x - y + 1 = 0$?

142. Encontre a distância entre o ponto $P = (1,-1)$ e a reta $r : y = 3x + 4$.

143. Dados os pontos $A = (2,5)$, $B = (3,-1)$ e $C = (6,0)$, encontre a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC.

144. Entre os pontos $A = (3,-4)$ e $B = (6,1)$, qual é o mais próximo da reta de equação $y = 3x/2$?

145. Qual é o ponto da reta $y = 2x - 1$ menos distante da origem do sistema de coordenadas?

146. Encontre os pontos do eixo das abcissas que distam sete unidades da bissetriz dos quadrantes pares.

147. Sabendo que a distância entre o ponto $P = (3, k)$ e a reta $r : 2x + 5y - k = 0$ vale $10\sqrt{29}/29$, encontre os valores de k.

148. Calcule a área do triângulo de vértices (2,3), (3,5) e (-1,2).

149. Calcule a área do losango que tem três de seus vértices em $A = (6, 8)$, $B = (3, 4)$ e $C = (6, 0)$.

150. Encontre os valores de k, de modo que o dobro da área do triângulo de vértices (8,4), $(0, k)$ e (5,1) seja 21.

151. Encontre as equações das bissetrizes dos ângulos formados entre as retas de equações $5x + 3y - 16 = 0$ e $3x - 5y + 2 = 0$.

152. Qual a equação da bissetriz do ângulo agudo formado entre as retas $2x + 3y - 5 = 0$ e $3x + 2y + 3 = 0$?

153. A circunferência de centro (1,2) e raio $\sqrt{5}$ passa pelo ponto $(2, p)$. Encontre os valores de p.

154. O centro de uma circunferência tem coordenadas iguais. Sabendo que os pontos (-1,-2) e (6,5) pertencem à circunferência, determine sua equação.

155. As retas de equações $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ e $y = x + 2$ intersectam-se no centro de uma circunferência de raio unitário. Obtenha a equação da circunferência.

156. Verifique se cada uma das equações abaixo representa, ou não, uma circunferência. Em caso afirmativo, forneça o centro e o raio da circunferência representada.

    a) $x^2 + y^2 - 14x - 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 12x + 20y + 134 = 0$

    c) $x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y + 100 = 0$ d) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 4 = 0$

157. Qual é a equação da circunferência, de centro (3,-2), que passa pela origem?

158. Qual a equação da circunferência que passa pelos pontos $C = (-3, 0)$, $D = (2, 5)$ e $E = (1, 6)$?

159. Qual é a equação da circunferência que passa por $A = (2, 1)$ e $B(5, -2)$ e tem raio 15?

160. O ponto $Q = (2, 1)$ pertence à circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$. Determine k.

161. Obtenha a posição do ponto de interseção das retas $3x - y + 2 = 0$ e $2x + 3y - 1 = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$.

162. Encontre a distância entre a reta $r : 5x - 8y = 20$ e o centro da circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 16x - 10y + 80 = 0$. Qual a posição relativa entre r e λ.

163. Obtenha a interseção entre $x - y - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

164. A reta $2x + 3y - 1 = 0$ passa pelo centro da circunferência $(x + m)^2 + (y - 1)^2 = 200$. Encontre os valores de m e o comprimento do diâmetro da circunferência.

165. Determine as equações das retas t tangentes à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ e paralelas à reta $r : 12x + 5y + 1 = 0$.

166. Obtenha as equações das retas t tangentes à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ e que passem pelo ponto $P = (5, 2)$.

167. Encontre as equações das retas t, que são tangentes à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ e formam ângulo de 60^o com o eixo das abscissas no seu sentido positivo.

Referências Bibliográficas

[1] BEZERRA, M. J.; PUTNOKI, J. C. *Novo Bezerra (Matemática), 2.º grau.* São Paulo, Scipione, 1994.

[2] FERNANDEZ, V. P.; YOUSSEF, A. N. *Matemática: conceitos e fundamentos, 2.o grau.* São Paulo, Scipione, 1993.

[3] GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR., J.R.; BONJORNO, J.R. *Matemática Fundamental, 2.º grau.* São Paulo, FTD, 1994.

[4] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.M.; PÉRIGO, R. *Matemática.* São Paulo, Atual, 1998.

[5] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica.* V. 7, São Paulo, Atual, 1998.

[6] TIZZIOTTI, J. G. *Matemática. Programa Completo: 2.o grau, Vestibular,* São Paulo, Ática, 1982.