

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

**CARGAS MÓVEIS
EM
ESTRUTURAS LINEARES**

3^a Edição

JOÃO C. OS ANTUNES DE O. E SOUZA
HELENA M. C. CARMO ANTUNES

Março de 2012
Reimpressão
Código 01093

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

**CARGAS MÓVEIS
EM
ESTRUTURAS LINEARES**



3^a Edição

**JOÃO CARLOS ANTUNES DE O. E SOUZA
HELENA M. C. CARMO ANTUNES**

**Março de 2012
Reimpressão
Código 01093**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

REITOR: FLAVIO FAVA DE MORAES

PRODUÇÃO: DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Datilografia: Marta Regina Couto Faria

Desenho: Francisco Carlos Guete de Brito

Impressão: Serviço Gráfico da EESC

CONTEÚDO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1. AS ESTRUTURAS SUBMETIDAS A CARGAS MÓVEIS	1
1.2. CONCEITUAÇÃO DE LINHA DE INFLUÊNCIA	2
1.3. EXEMPLO DE CÁLCULO DE VALORES EXTREMOS	5
1.4. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS EM UMA VIGA BIAPOIADA	8

CAPÍTULO II - O TEOREMA DE MÜLLER-BRESLAU

2.1. APRESENTAÇÃO	11
2.2. ENUNCIADO	11
2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA O CASO DE ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS	12
2.4. DEMONSTRAÇÃO PARA O CASO GERAL	15
2.5. O TEOREMA DUAL	17
2.6. ACENO A POSSÍVEIS APLICAÇÕES DOS TEOREMAS	18

CAPÍTULO III - APLICAÇÃO DO PROCESSO DAS CADEIAS CINEMÁTICAS

3.1. O PROCESSO DAS CADEIAS CINEMÁTICAS	21
3.2. APLICAÇÃO A VIGAS ISOSTÁTICAS	21
3.2.1. Exemplo 1 - Viga Biapoiada	21
3.2.2. Exemplo 2 - Viga com Balanços	23
3.2.3. Exemplo 3 - Viga Gerber	24

3.3. ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS QUAISQUER	26
3.3.1. Propriedades do Deslocamento Infinitesimal de Cadeias Cinemáticas com um Grau de Liberdade	26
3.3.1.1. Polos absolutos e relativos	26
3.3.1.2. Propriedades associadas ao deslocamento de um ponto	27
3.3.1.3. Propriedades associadas aos polos	28
3.3.1.4. Propriedades associadas à imposição de deslocamentos absolutos e relativos	30
3.3.1.5. Propriedades da projeção de deslocamentos ..	32
3.3.2. Exemplo 4 - Estrutura Isostática Genérica	33
3.3.3. Exemplo 5 - Arco Triarticulado	35
3.3.4. Exemplo 6 - Pórtico Plano	39
3.3.5. Sistema Isostático de Piso	43
3.3.6. Exemplo 7 - Arco com Sistema de Piso	45
3.3.7. Exemplo 8 - Treliça Isostática	46

CAPÍTULO IV - O FORMATO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA

4.1. APRESENTAÇÃO	49
4.2. EXEMPLO 1 - VIGA CONTÍNUA	49
4.3. EXEMPLO 2 - PÓRTICO PLANO	51

CAPÍTULO V - POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO COMPUTACIONAL DOS TEOREMAS

5.1. APRESENTAÇÃO	53
5.2. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE DESLOCAMENTOS	53
5.3. LINHA DE INFLUÊNCIA DE REAÇÕES	54
5.4. LINHA DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS INTERNOS AO LONGO DO TRAMO	54

CAPÍTULO VI - LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS EM VIGAS CONTÍNUAS

6.1. INTRODUÇÃO TEÓRICA	59
6.2. EXEMPLO	63

PREFÁCIO

Esta publicação tem caráter didático visando apenas apresentar ao aluno de graduação, da disciplina de Estática, do currículum de Engenharia Civil da Escola de Engenharia de São Carlos, alguns aspectos inerentes ao cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas submetidas a cargas móveis; com isso se pretende, de alguma forma, facilitar o desenvolvimento posterior de rotinas e procedimentos para o projeto de pontes, envolvendo tipos os mais diversos de estruturas.

Os Autores

CARGAS MÓVEIS EM ESTRUTURAS LINEARES

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. AS ESTRUTURAS SUBMETIDAS A CARGAS MÓVEIS

Uma das fases importantes no projeto de uma estrutura de ponte rodoviária ou ferroviária, ou mesmo de uma viga de rolamento de ponte rolante, é a definição dos limites de variação dos esforços internos, ou das reações, ou dos deslocamentos, de pontos significativos da estrutura, quando esta é submetida, além de a carregamentos fixos, a carregamentos acidentais ou oriundos de tráfego de veículos.

Numa estrutura usual de edifício, industrial ou residencial, é necessário determinar esses limites de variação, só que por combinação de um número finito de carregamentos possíveis. A solicitação originada pela passagem, por exemplo, de um trem sobre uma ponte, dá origem, para cada posição desse trem, a um carregamento diferente, passando a ser necessária a análise, seção por seção, esforço por esforço, dos valores limites, ou dos extremos algébricos, para poder traçar as mesmas envoltórias de esforços, ou de deslocamentos.

1.2 CONCEITUAÇÃO DE LINHA DE INFLUÊNCIA

No sentido de facilitar o cálculo de valores extremos de um determinado efeito, é interessante fazer uso de um diagrama auxiliar, correspondente a esse efeito, chamado de "linha de influência", definido da seguinte forma:

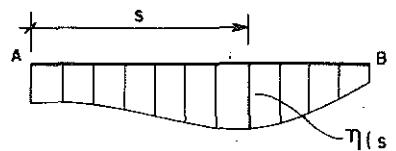
"A linha de influência $\eta(s)$ de um determinado efeito E_C , de uma seção C de uma estrutura, para carga percorrendo uma determinada linha S associada a essa estrutura, é o valor $E_C(s)$ correspondente a uma carga adimensional unitária, vertical e orientada de cima para baixo, aplicada na posição definida pela coordenada s sobre S."

O cálculo dessa linha de influência, dependendo de se tratar de esforços ou de deslocamentos, em estruturas isostáticas ou hiperestáticas, envolve o manuseio de condições de equilíbrio e de compatibilidade.

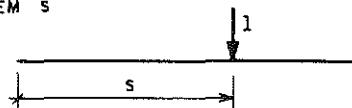
Quando se dispõe dessa linha de influência, é possível, valendo a superposição de efeitos, calcular de maneira expedita, o valor do efeito para uma carga qualquer, aplicada em qualquer posição, sem haver necessidade de recorrer às condições de equilíbrio ou de compatibilidade.

Assim, por exemplo, seja conhecida a linha de influência $\eta(s)$ de um efeito E_C , para carga no trecho A-B, conforme fig. 1.1.a; com ela podem ser calculados os valores de E_C para qualquer dos carregamentos definidos nas fig. 1.1.b a 1.1.f.

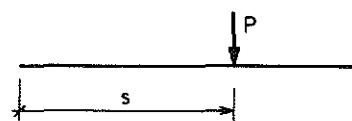
(a) LINHA DE INFLUÊNCIA DE E_C



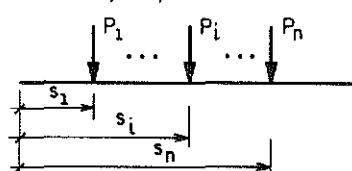
(b) CARGA UNITARIA EM s



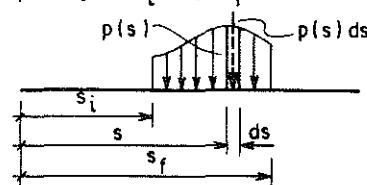
(c) CARGA P EM s



(d) CARGAS P_i EM s_i PARA $i=1, \dots, n$



(e) CARGA DISTRIBUÍDA $p(s)$, DE s_i ATÉ s_f



(f) CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA q DE s_i ATÉ s_f

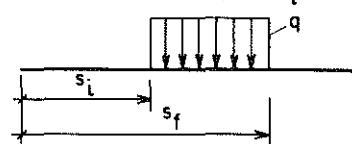


FIG. 1.1 - UTILIZAÇÃO DE UMA LINHA DE INFLUÊNCIA

No caso da fig.1.1.b, pela definição de $\eta(s)$

$$E_C = \eta(s)$$

No caso da fig.1.1.c, valendo a superposição de efeitos:

$$E_C = P \cdot \eta(s)$$

No caso da fig. 1.1.d, também pela superposição de efeitos:

$$E_C = \sum_i P_i \cdot \eta(s_i)$$

No caso da fig.1.1.e:

$$dE_C = p(s) ds \cdot \eta(s)$$

$$E_C = \int_{s_i}^{s_f} p(s) \cdot \eta(s) ds$$

que corresponde a uma integral de produto de duas funções, facilmente calculável, para funções elementares, com o uso de tabelas.

No caso da fig.1.1.f, sendo $p(s)=q$, constante, tem-se:

$$E_C = q \cdot \int_{s_i}^{s_f} \eta(s) ds$$

onde a integral é "assimilável" a uma área, com sinal, do trecho carregado.

Observe-se que no cálculo de E_C não se entrou sequer no mérito de que tipo de efeito seria ele.

1.3. EXEMPLO DE CÁLCULO DE VALORES EXTREMOS

Para a viga da fig. 1.2, determinar os extremos algébricos da reação vertical em E (positiva se orientada para cima), para um carregamento composto por:

a) Carga permanente uniformemente distribuída, $g = 12 \text{ kN/m}$, em toda a extensão da viga.

b) Carga accidental uniformemente distribuída $p = 8 \text{ kN/m}$.

c) "Veículo" com duas cargas $Q = 40 \text{ kN}$, com distância fixa de 2 m entre elas, podendo sair da viga.

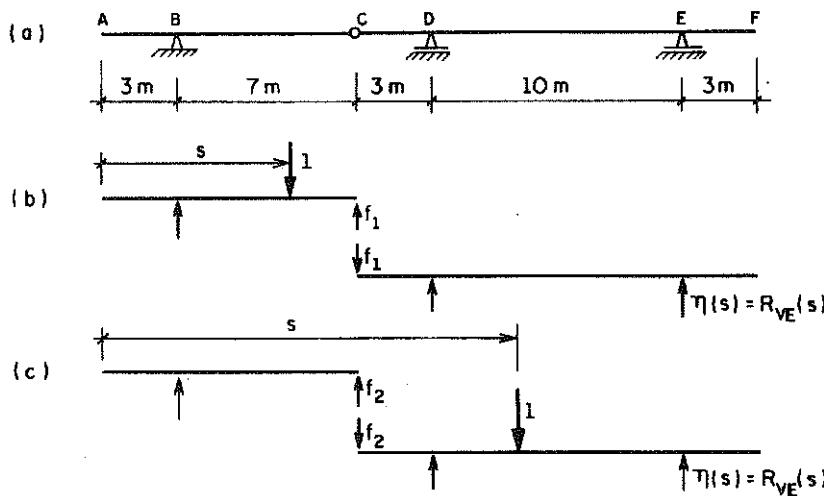


FIG.1.2 - A VIGA E O CÁLCULO DE $\eta(s)$

Para obter a linha de influência $\eta(s)$ de R_{VE} faz-se uso apenas das condições de equilíbrio por se estar tratando com uma estrutura isostática, equacionando as duas situações correspondentes a carga em cada uma das chapas; assim:

*) Para carga na chapa A-C, ou $0 \leq s \leq 10m$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_1 = \frac{1}{7} (s-3)$$

Com f_1 , de:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow \eta(s) = -\frac{3}{70} (s-3) \text{ para } 0 \leq s \leq 10m$$

*) Para carga na chapa C-F, ou $10m \leq s \leq 26m$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_2 = 0$$

Com f_2 nulo, de:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow \eta(s) = \frac{1}{10} (s-13) \text{ para } 10m \leq s \leq 26m$$

Dispondo-se da linha de influência, esquematizada na fig. 1.3.a, é fácil definir em que posições devem ser colocadas as cargas para se obter os valores extremos R_{VE}^{\max} e R_{VE}^{\min} .

A carga permanente existe sempre, e está esquematizada na fig. 1.3.b.

A carga accidental distribuída, que pode existir ou não, será colocada em toda a extensão em que $\eta(s)$ for positiva, quando se visar o máximo, conforme fig. 1.3.c, ou em que $\eta(s)$ for negativa, no caso de se visar o mínimo, conforme fig. 1.3.d.

O veículo será colocado na posição mais crítica, onde $\eta(s)$ for negativo, conforme fig. 1.3.c, caso se vise o mínimo. Visando o máximo, será colocado onde $\eta(s)$ for positiva, conforme fig. 1.3.d. Eventualmente, não é o caso do exemplo, uma situação desfavorável poderia ser com o veículo "fora" da viga.

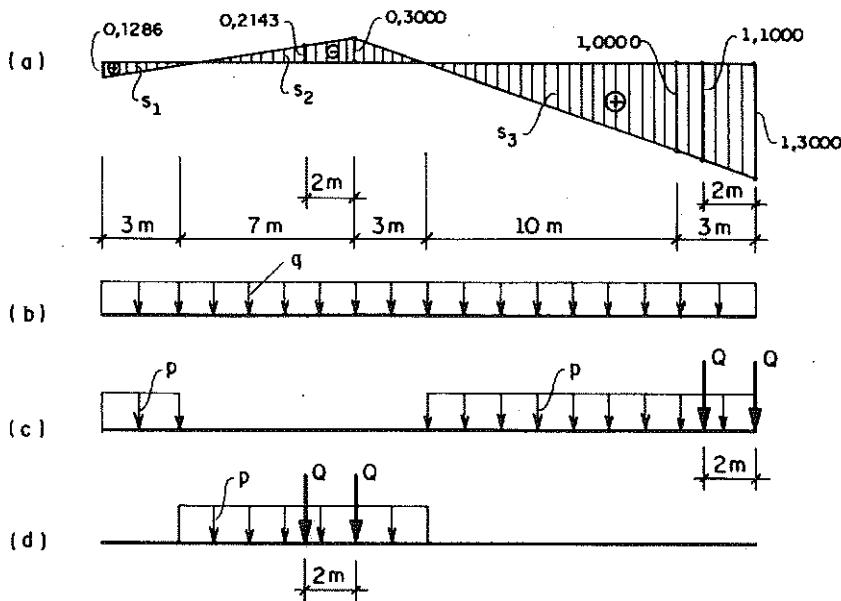


FIG. 1.3 - CARGAS VISANDO EXTREMOS

Calculando previamente as "áreas":

$$S_1 = 0,1929 \text{m} \quad S_2 = -1,5000 \text{m} \quad S_3 = 8,4500 \text{m} \quad S = 7,1429 \text{m}$$

$$R_{VE}^{\text{máx}} = 12 \cdot 7,1429 + 8(0,1929 + 8,4500) + \\ + 40(1,1000 + 1,3000) = 250,86 \text{kN}$$

$$R_{VE}^{\text{mín}} = 12 \cdot 7,1429 + 8(-1,5000) + \\ + 40(-0,2143 - 0,3000) = 53,14 \text{kN}$$

Portanto:

$$250,86 \text{kN} \geq R_{VE} \geq 53,14 \text{kN}$$

1.4. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS EM UMA VIGA BIAPOIADA

Apenas como um exemplo simples, calcular algumas linhas de influência de esforços na viga biapoiada da fig. 1.4.

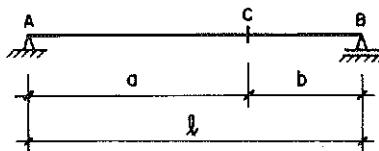


FIG. 1.4 - VIGA BIAPOIADA

- a) L.I. de R_{VA} ($>$ o para cima); v. fig. 1.5.

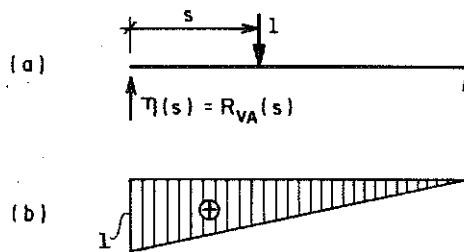


FIG. 1.5 - L.I. DE R_{VA}

Da fig. 1.5.a:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 1(\ell-s) - \ell \eta(s) = 0 \rightarrow \eta(s) = 1 - \frac{s}{\ell}$$

A expressão para $\eta(s)$ é uma reta com s , desenhada na fig. 1.5.b.

b) L.I. de M_C (> 0 tração embaixo); v. fig. 1.6.

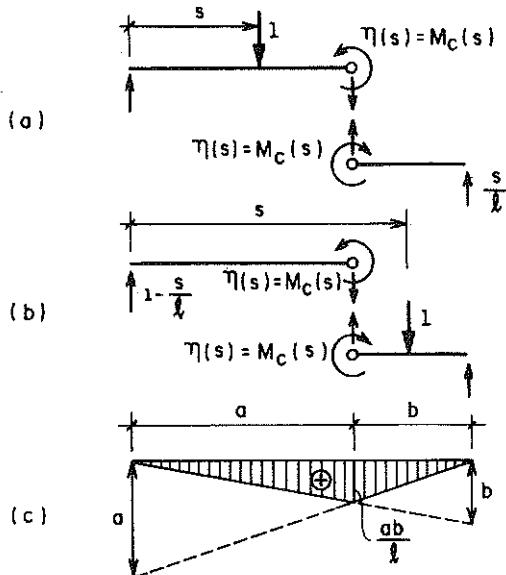


FIG. 1.6 - L.I. DE M_C

Da fig. 1.6.a, como condição de equilíbrio da parte direita :

$$\sum M_C \rightarrow \eta(s) - b \cdot \frac{s}{\ell} = 0 \rightarrow \eta(s) = \frac{bs}{\ell} \quad p/0 \leq s \leq a$$

Da fig. 1.6.b, com a condição de equilíbrio da parte esquerda:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow \eta(s) - a(1 - \frac{s}{\ell}) = 0 \rightarrow \eta(s) = a(1 - \frac{s}{\ell}) \quad p/0 \leq s \leq a$$

Lançando em gráfico as duas expressões tem-se o diagrama bilinear da fig. 1.6.c. Observe-se que no prolongamento da 1.ª reta até $s = \ell$ resulta no valor b , assim como, no prolongamento da 2.ª até $s = 0$, resulta no valor a .

c) L.I. de V_C ($>$ o horário); v. fig. 1.7.

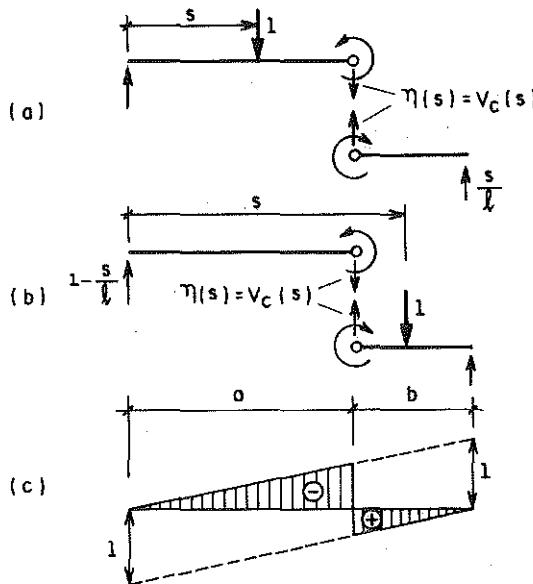


FIG. 1.7 - L.I. DE V_C

Da fig. 1.7.a, como condição de equilíbrio da parte direita:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow \eta(s) + \frac{s}{l} = 0 \rightarrow \eta(s) = -\frac{s}{l} \quad p/ \quad 0 \leq s < a$$

Da fig. 1.7.b, como condição de equilíbrio da parte esquerda:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow \eta(s) - (1 - \frac{s}{l}) = 0 \rightarrow \eta(s) = 1 - \frac{s}{l} \quad p/ \quad a < s \leq l$$

Lançando em gráfico as duas expressões tem-se o diagrama bilinear da fig. 1.7.c. Observe-se que no prolongamento da 1.^a reta até $s = l$ tem-se o valor -1; no prolongamento da 2.^a até $s = 0$, obtém-se o valor +1.

CAPÍTULO II

O TEOREMA DE MÜLLER-BRESLAU

2.1. APRESENTAÇÃO

O problema, muitas vezes complicado, de manusear condições de equilíbrio e de compatibilidade para a obtenção de linhas de influência, pode ser eventualmente simplificado com uma sistematização alternativa, obtida com a utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou do Teorema de Müller-Breslau e seu dual, que daria ao trabalho um caráter mais geométrico ou em alguns casos, meramente cinemático.

2.2. ENUNCIADO

Seja $\eta(s)$ a linha de influência de um particular esforço E_C de uma particular seção C , para carga percorrendo uma determinada linha S associada à estrutura; seja $\delta_v(s)$ a componente vertical, positiva se para baixo, do deslocamento $\vec{\delta}(s)$ do ponto definido por s sobre S , acarretado pela retirada do vínculo correspondente a E_C e imposição de um deslocamento unitário, com geometria de deslocamentos infinitesimais, em sentido contrário a E_C ; o teorema afirma que, numericamente, $\eta(s) = \delta_v(s)$.

Esse teorema será demonstrado em duas fases, separando o caso isostático do geral e mostrando o significado do teorema para os diversos tipos de esforços, internos e de reação.

2.3. DEMONSTRAÇÃO PARA O CASO DE ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

Seja a estrutura isostática da fig. 2.1, com a linha S confundindo-se com seu eixo.

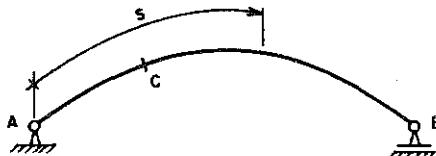


FIG. 2.1 - ESTRUTURA ISOSTÁTICA

Seja, inicialmente, o caso de $\eta(s)$ corresponder a uma força de reação, por exemplo a reação vertical em B, R_{VB} , positiva se para cima. Retirando o vínculo correspondente a R_{VB} , função da posição s da carga unitária, substituindo-o pelo esforço correspondente, tem-se o "estado de forças" da fig. 2.2.a, onde há equilíbrio sobre uma cadeia cinemática com um só grau de liberdade. A essa cadeia cinemática pode-se impor o "estado de deslocamentos" da fig. 2.2.b, definido pelo parâmetro infinitesimal Δ em sentido contrário a R_{VB} .

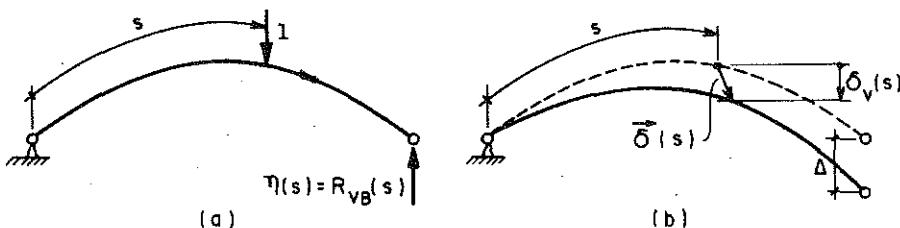


FIG. 2.2 - CASO CORRESPONDENTE A REAÇÃO

Impõe-se o estado de deslocamentos infinitesimais ao estado de forças, não havendo deformação:

Text = 0

ou:

$$-\eta(s) \cdot \Delta + 1 \cdot \delta_y(s) = 0$$

onde:

$$\eta(s) = \frac{\delta_y(s)}{\Delta}$$

Sendo o estado de deslocamentos linearizado, ou infinitesimal, seria perfeitamente plausível impor $\Delta = 1$, mantendo evidentemente a geometria de deslocamentos linearizados, e com isso:

$$\eta(s) = \delta_y(s)$$

Seja agora o caso de $\eta(s)$ corresponder a um esforço cortante, por exemplo V_C , no ponto C, positivo se "horário" sobre a seção transversal. As fig. 2.3.a e 2.3.b contêm, respectivamente, o estado de forças obtido pela substituição por V_C do vínculo a ele correspondente, e o estado de deslocamentos definido pelos dois parâmetros Δ_1 e Δ_2 , evidentemente dependentes.

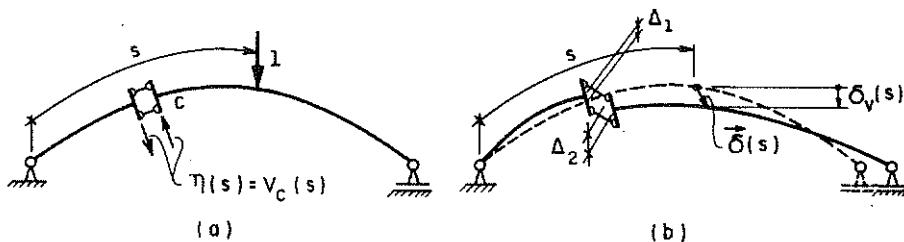


FIG. 2.3 - CASO CORRESPONDENTE A ESFORÇO CORTANTE

Impondo o estado de deslocamentos infinitesimais ao estado de forças, tem-se:

$$Text = 0$$

ou:

$$-\Delta_1 \cdot \eta(s) - \Delta_2 \cdot \eta(s) + 1 \cdot \delta_v(s) = 0$$

onde:

$$\eta(s) = \frac{\delta_v(s)}{\Delta_r}$$

com o deslocamento relativo transversal "em sentido contrário" a V_C , $\Delta_r = \Delta_1 + \Delta_2$. Impondo $\Delta_r = 1$ e mantendo a geometria de deslocamentos infinitesimais:

$$\eta(s) = \delta_v(s)$$

Não vale a pena repetir o caso, absolutamente análogo, de $\eta(s)$ corresponder a um esforço normal, N_C , por exemplo, positivo de tração; nesse caso o "deslocamento unitário em sentido contrário ao esforço" será um deslocamento longitudinal no sentido de afastar as faces da seção C.

Falta apenas considerar o caso de $\eta(s)$ corresponder a um momento fletor, M_C , em C, por exemplo, positivo tração embaixo. Da fig. 2.4 constam, respectivamente, o estado de forças e o estado de deslocamentos envolvidos.

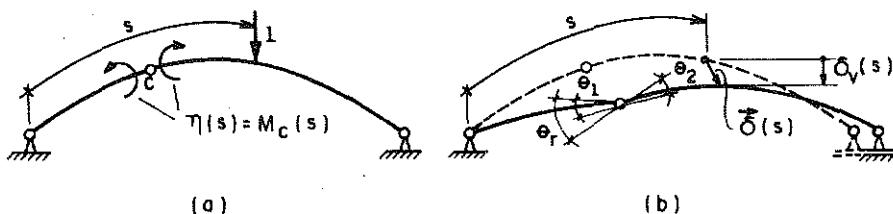


FIG. 2.4 - CASO CORRESPONDENTE A MOMENTO FLETOR

Impondo o estado de deslocamentos ao estado de forças, tem-se, analogamente:

$$-\eta(s) \cdot \theta_1 - \eta(s) \cdot \theta_2 + 1 \cdot \delta_v(s) = 0$$

ou:

$$\eta(s) = \frac{\delta_v(s)}{\theta_r}$$

onde $\theta_r = \theta_1 + \theta_2$ é a rotação relativa "em sentido contrário" a M_C . Impondo $\theta_r = 1$, mantendo a geometria de deslocamentos infinitesimais, tem-se, novamente:

$$\eta(s) = \delta_v(s)$$

2.4. DEMONSTRAÇÃO PARA O CASO GERAL

Com a intenção de representar um caso genérico, seja a estrutura hiperestática da fig.2.5.

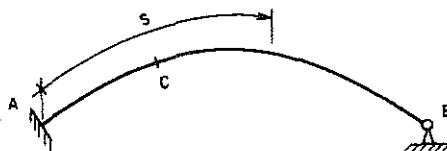


FIG. 2.5 - ESTRUTURA GENÉRICA

Seja também, à guisa de representar um esforço genérico, o caso de determinar a linha de influência $\eta(s)$ da reação vertical em B, R_{VB} , positiva para cima.

Sejam dois estados (1) e (2), constantes das fig.2.6.a e 2.6.b, respectivamente, ambos consideráveis como estados de forças ou de deslocamentos, por sempre haver equilíbrio e serem linearizáveis, por corresponderem a pequenos deslocamentos.

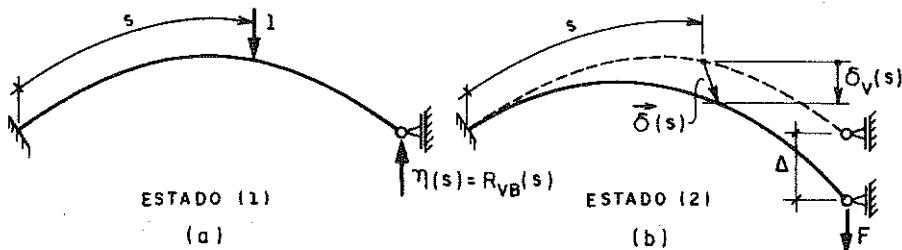


FIG. 2.6 - CASO DE REAÇÃO NA ESTRUTURA GENÉRICA

Do princípio dos Trabalhos Virtuais, impondo o estado de deslocamentos (2) ao estado de forças (1):

$$-\eta(s) \cdot \Delta + 1 \cdot \delta_v(s) = \int_{\text{estr.}} M_1 \frac{M_2 ds}{EI} + \int_{\text{estr.}} V_1 \frac{cV_2 ds}{GS} + \\ + \int_{\text{estr.}} N_1 \frac{N_2 ds}{ES} +$$

Impondo agora o estado de deslocamentos (1) ao estado de forças (2), observando que em (1) não há deslocamento segundo a direção de R_{VB} :

$$F \cdot 0 = \int_{\text{estr.}} M_2 \frac{M_1 ds}{EI} + \int_{\text{estr.}} V_2 \frac{cV_1 ds}{GS} + \int_{\text{estr.}} N_2 \frac{N_1 ds}{ES}$$

Como a ordem dos fatores não altera o produto, das duas conclusões se obtém:

$$\eta(s) = \frac{\delta_v(s)}{\Delta}$$

Impondo também que F seja tal que corresponda a $\Delta = 1$, mantendo-se a geometria de pequenos deslocamentos, tem-se que:

$$\eta(s) = \delta_v(s)$$

Por questão meramente de economia de tempo omitem-se as óbvias verificações correspondentes a $\eta(s)$ estar associado a outros tipos de esforços internos.

2.5. O TEOREMA DUAL

Uma outra aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, conhecida como Teorema Dual de Müller-Breslau, relacionar-se-á ao cálculo das linhas de influência de deslocamentos.

Seja $\eta(s)$ a linha de influência de um particular deslocamento E_C de uma particular seção C, para carga percorrendo uma determinada linha S associada à estrutura. Seja $\delta_v(s)$ a componente vertical, positiva se para baixo, do deslocamento $\vec{\delta}(s)$ do ponto definido por s sobre S, acarretado por se carregar a estrutura com uma carga unitária em C, com a direção e sentido de E_C . O teorema afirma que, numericamente, $\eta(s) = \delta_v(s)$.

É simples a demonstração desse teorema, já para um caso geral; assim, seja $\eta(s)$ definido no problema (1) da fig. 2.7.a e seja o problema (2) da fig. 2.7.b correspondente a carga unitária segundo a direção do deslocamento E_C ; ambos os problemas poderão ser considerados, por haver equilíbrio e compatibilidade, como estados de forças ou de deslocamentos.

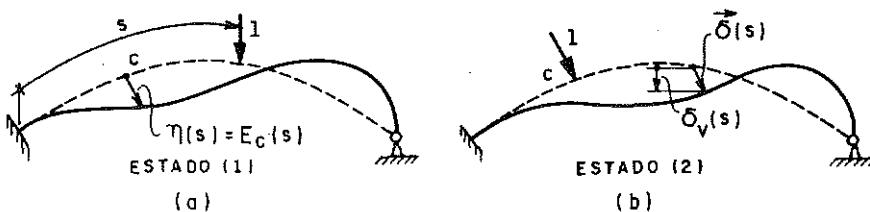


FIG. 2.7 - CASO DE DESLOCAMENTO NA ESTRUTURA GENÉRICA

Impondo o estado de deslocamentos (2) ao estado de forças (1) tem-se:

$$1. \delta_v(s) = \int_{\text{estr.}} M_1 \frac{M_2 \, ds}{EI} + \int_{\text{estr.}} V_1 \frac{cV_2 \, ds}{GS} + \int_{\text{estr.}} N_1 \frac{N_2 \, ds}{ES}$$

Impondo-se, agora, o estado de deslocamentos (1) ao estado de forças (2), tem-se:

$$1. \eta(s) = \int_{\text{estr.}} M_2 \frac{M_1 \, ds}{EI} + \int_{\text{estr.}} V_2 \frac{cV_1 \, ds}{GS} + \int_{\text{estr.}} N_2 \frac{N_1 \, ds}{ES}$$

Das duas condições, como a ordem dos fatores não altera o produto:

$$\eta(s) = \delta_v(s)$$

2.6. ACENO A POSSÍVEIS APLICAÇÕES DOS TEOREMAS

A utilização das conclusões desses teoremas pode ser, às vezes, extremamente interessante, dependendo do tipo de efeito a considerar, do tipo de estrutura e do equipamento de cálculo a utilizar; entre outras possibilidades, nesta publicação se dará ênfase maior pelo menos a três tipos de problemas, a serem detalhados nos itens seguintes.

a) Processo das Cadeias cinemáticas, para cálculo de linhas de influência de esforços em estruturas isostáticas; ao retirar um vínculo de uma estrutura isostática passa-se a ter uma cadeia cinemática com um só grau de liberdade, com leis extremamente simples regendo a imposição de deslocamentos. A aplicação do teorema é ideal no caso.

b) Traçado esquemático do formato de linhas de influência. Com um mínimo de sensibilidade no traçado de elásticas em estruturas quaisquer é viável a obtenção do formato geral da linha de influência, em qualquer caso, o que pode ser muito útil, em estruturas hiperestáticas,

para evitar enganos em cálculos extremamente trabalhosos; isso pode ser útil também em casos de carregamentos onde se possa apenas necessitar, para definir um carregamento crítico de projeto, dos sinais de uma linha de influência.

c) Aplicações computacionais; a imposição de deslocamentos a apoios ou a vínculos internos a uma barra da estrutura é talvez o processo ideal para aproveitar programas usuais de estruturas lineares, montados a partir do processo dos deslocamentos, ou do processo de propagação; são necessárias apenas pequenas adaptações para o cálculo das componentes verticais dos deslocamentos da linha percorrida pelas cargas.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO PROCESSO DAS CADEIAS CINEMÁTICAS

3.1. O PROCESSO DAS CADEIAS CINEMÁTICAS

Conforme acenado em 2.5 a aplicação do Teorema de Müller-Breslau ao cálculo de linhas de influência de esforços em estruturas isostáticas leva, em princípio, a manusear deslocamentos infinitesimais numa cadeia cinemática com um só grau de liberdade, composta de chapas interligadas entre si, cada uma delas com no máximo um grau de liberdade. No caso de vigas o problema seria imediato, conforme se verá nos exemplos do item 3.2; para estruturas isostáticas quaisquer já valeria a pena sistematizar melhor a geometria de deslocamentos, com a introdução de algumas propriedades comuns interessantes.

3.2. APLICAÇÃO A VIGAS ISOSTÁTICAS

3.2.1. Exemplo 1 - Viga Biapoiada

Seja a viga da fig.3.1, para a qual se pretende traçar as linhas de influência de alguns esforços.

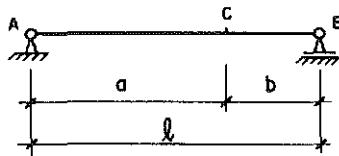


FIG. 3.1 - VIGA BIAPOIADA

A fig.3.2 contém, o que parece ser conveniente neste primeiro exemplo, o esquema da cadeia cinemática, ao lado da projeção $\delta(s)$ de deslocamentos, no caso de viga coincidente com $\delta(s)$, e que será igual à linha de influência $\eta(s)$. Assumem-se reações verticais positivas se orientadas para cima, esforços cortantes positivos se horários sobre a seção e momentos fletores positivos se provocarem tração embaixo.

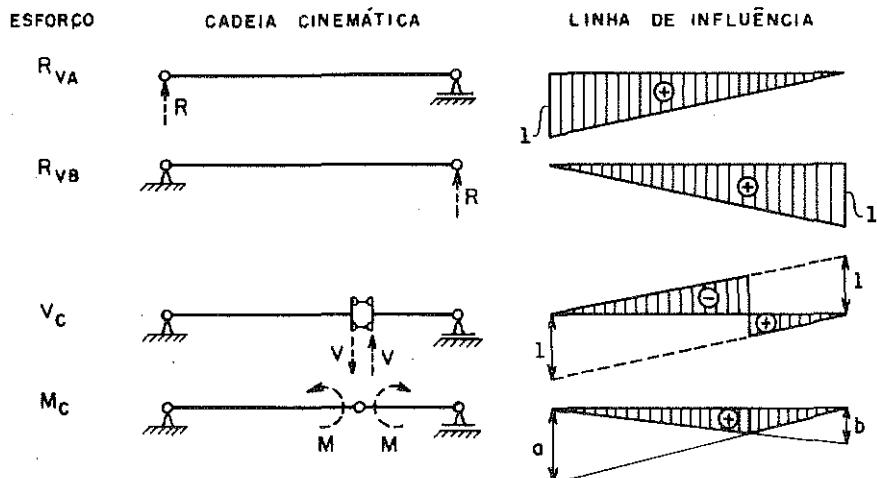


FIG. 3.2 - EXEMPLO 1. LINHAS DE INFLUÊNCIA

Observe-se que na cadeia cinemática não estão aplicados os esforços, que só se equilibrariam se a carga unitária também estivesse aplicada; pretende-se apenas anotar o "sentido" assumido como positivo para os esforços.

3.2.2. Exemplo 2 - Viga com Balanços

Seja agora a viga da fig.3.3, num problema análogo ao do item anterior, com as mesmas convenções de sinal.

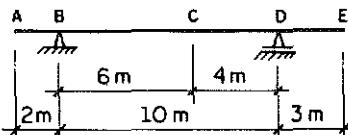


FIG. 3.3 - VIGA COM BALANÇOS

Algumas linhas de influência constam da fig.3.4.

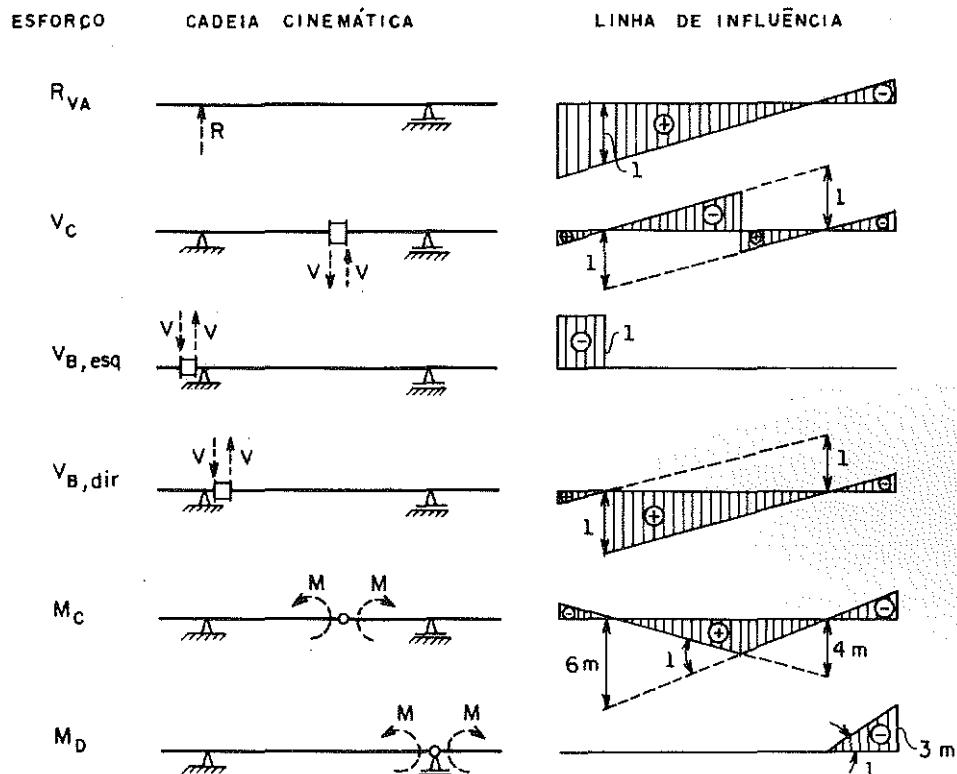


FIG. 3.4 - EXEMPLO 2. LINHAS DE INFLUÊNCIA

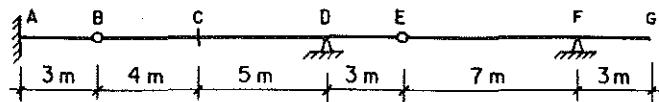
3.2.3. Exemplo 3 - Viga Gerber

A viga Gerber é uma estrutura isostática um pouco mais complicada, para a qual se pretende que tenha um comportamento de viga contínua, para efeito de distribuição de esforços internos devidos a carga permanente; por outro lado teria as vantagens de ser isostática, em termos de insensibilidade a recalques de apoio, com o ônus, é claro, de suportar as cargas acidentais em condições um pouco piores. A estrutura e algumas linhas de influência significativas constam da fig.3.5, acreditando-se não ser necessário o detalhamento utilizado nos dois exemplos anteriores.

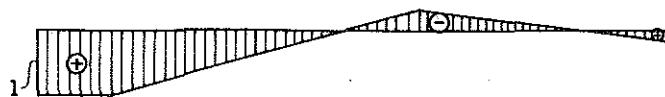
É interessante observar que uma relação de equilíbrio, do tipo, por exemplo, $R_{VD} = V_{D,dir.} - V_{D,esq.}$, vale também em função de s , donde se conclui que:

$$\text{L.I. de } R_{VD} = \text{L.I. de } V_{D,dir.} - \text{L.I. de } V_{D,esq.}$$

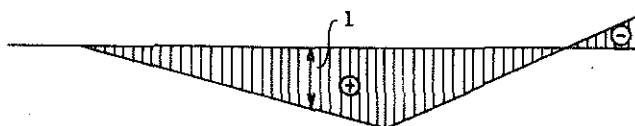
Dada a simplicidade do traçado de linhas de influência de esforços em estruturas isostáticas, a superposição não tem interesse prático; no caso de estruturas hiperestáticas, entretanto, essa idéia pode ser eventualmente aproveitada, obtendo, a partir das linhas de influência de esforços escolhidos como "incógnitas hiperestáticas", as linhas de influência de quaisquer esforços através de triviais relações de equilíbrio.



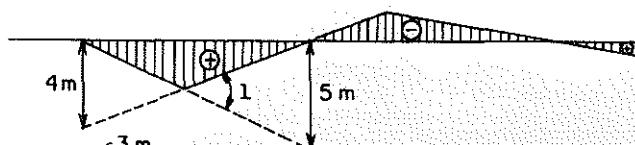
L.I. DE R_{VA}



L.I. DE R_{VD}



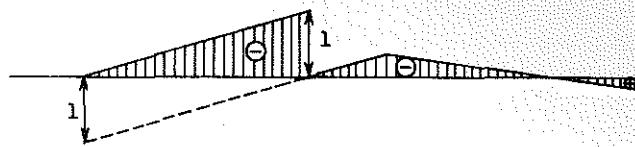
L.I. DE M_C



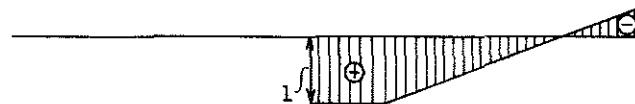
L.I. DE M_A



L.I. DE V_D , esq



L.I. DE V_D , dir



L.I. DE V_E

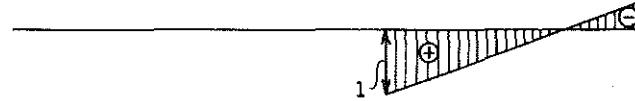


FIG. 3.5 - EXEMPLO 3. LINHAS DE INFLUÊNCIA

3.3. ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS QUAISQUER

3.3.1. Propriedades do Deslocamento Infinitesimal de Cadeias Cinemáticas com um Grau de Liberdade

3.3.1.1. POLOS ABSOLUTOS E RELATIVOS

Ao retirar um único vínculo de uma estrutura isostática plana, obtém-se uma cadeia cinemática com um único grau de liberdade e que sempre pode ser pensada como um conjunto de chapas vinculadas entre si por barras ou barras vinculares equivalentes. Cada chapa terá no máximo um grau de liberdade, absoluto ou em relação a outra chapa.

O deslocamento infinitesimal absoluto dos pontos de uma chapa com um grau de liberdade, portanto vinculada por duas barras, pode ser pensado como sendo uma rotação em torno de um "centro instantâneo de rotação" ou "polo absoluto", próprio ou impróprio, conforme fig.3.6.a e b, respectivamente; o mesmo se pode dizer a respeito do deslocamento de uma chapa em relação a outra, definindo-se, então, um "polo relativo" entre ambas; esse polo relativo poderá ser também próprio ou impróprio, conforme fig.3.6.c e d, respectivamente.

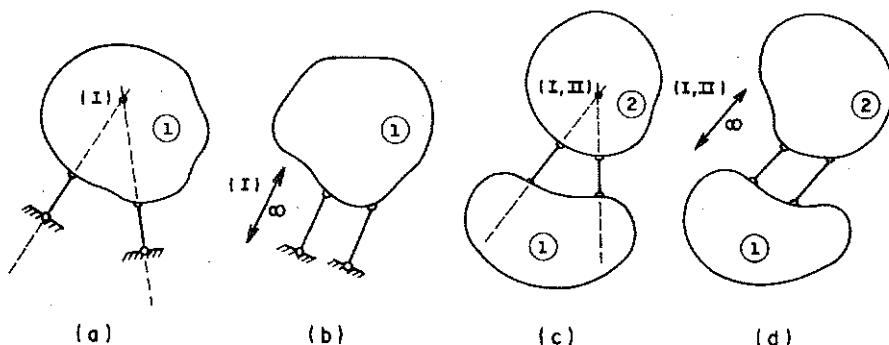


FIG. 3.6 - POLOS ABSOLUTOS E RELATIVOS

Foram numeradas as chapas e os polos envolvidos, adotando a seguinte notação:

- *) Chapas : (1), (2), (3), etc...
- *) Polos Absolutos: (I), (II), (III), etc...
- *) Polos Relativos: (I,II), (II,III), (I,III), etc...

3.3.1.2. PROPRIEDADES ASSOCIADAS AO DESLOCAMENTO DE UM PONTO

a) O deslocamento \vec{v} de um ponto A de uma chapa (1) que gira $\vec{\omega}_1$ em torno de (I), é normal ao vetor posição \vec{r} de A em relação a (I), e tal que $\vec{v} = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{r}$; v.fig.3.7.

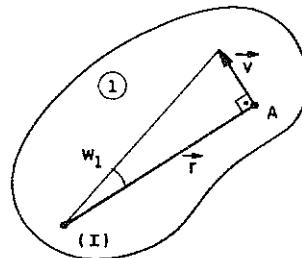


FIG. 3.7 - PROPRIEDADE (a)

b) O deslocamento \vec{v} de qualquer ponto de uma chapa (1) com polo absoluto (I) impróprio é constante e normal à direção definida por esse polo; v.fig.3.8.

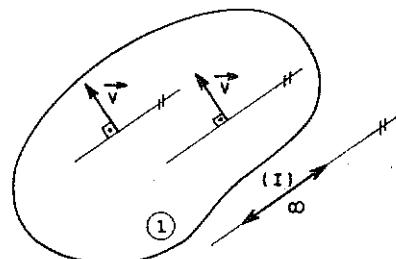


FIG. 3.8 - PROPRIEDADE (b)

c) Definido um sistema de referência $oxyz$, com origem em (I), as componentes do deslocamento \vec{v} de um ponto A, correspondente a uma rotação $\vec{\omega}$ da chapa (1), segundo z, são: $v_x = -\omega_1 \cdot y$; $v_y = \omega_1 \cdot x$; v. fig. 3.9.

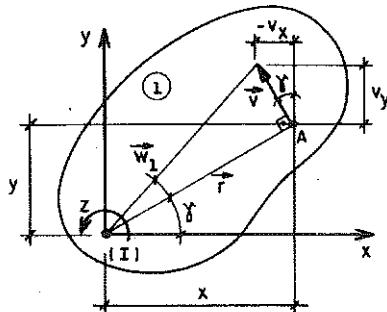


FIG.3.9 – PROPRIEDADE (c)

Observe-se que:

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{-v_x}{v} = \frac{y}{r} \quad \therefore \quad v_x = -\frac{v}{r} y \quad \therefore \quad v_x = -\omega_1 \cdot r$$

$$\cos \gamma = \frac{v_y}{v} = \frac{x}{r} \quad \therefore \quad v_y = -\frac{v}{r} x \quad \therefore \quad v_y = \omega_1 \cdot x$$

3.3.1.3. PROPRIEDADES ASSOCIADAS AOS POLOS

d) Um lugar geométrico do polo absoluto (I) de uma chapa (1) vinculada por uma barra é a reta que contém essa barra; v. fig. 3.10.

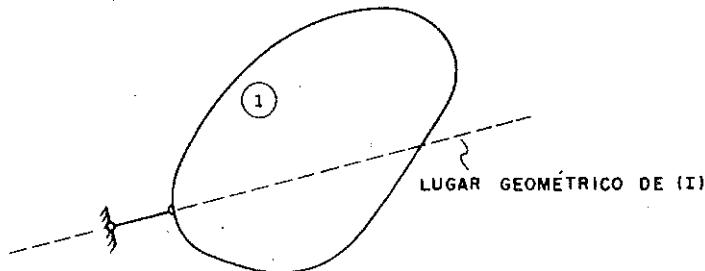


FIG. 3.10 – PROPRIEDADE (d)

- e) Conhecida a direção do deslocamento absoluto \vec{v} de um ponto A de uma chapa (1), um lugar geométrico de (I) é a reta normal a \vec{v} por A; v.fig.3.11.

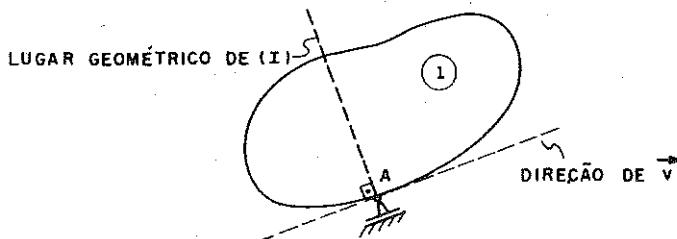


FIG. 3.11 - PROPRIEDADE (e)

- f) Um lugar geométrico do polo relativo (I,II) entre duas chapas (1) e (2) unidas por uma barra é a reta que contém essa barra; v.fig.3.12.

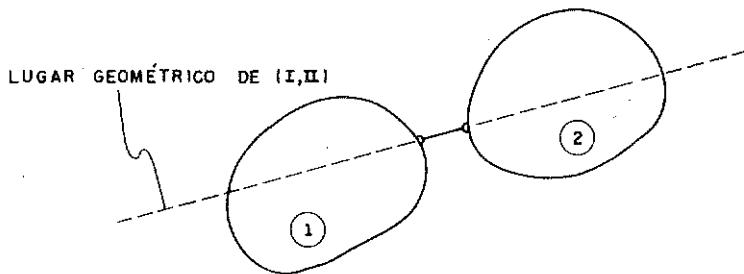


FIG. 3.12 - PROPRIEDADE (f)

- g) Os polos absolutos (I) e (II) de duas chapas (1) e (2), e o polo relativo (I,II) entre elas, situam-se sobre uma mesma reta; v.fig.3.13.

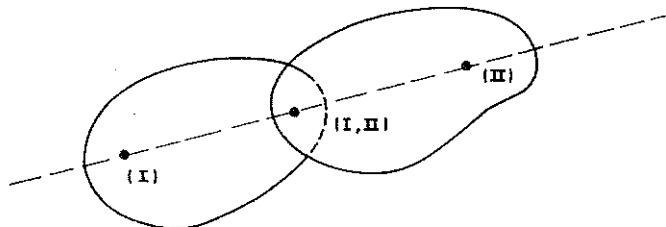


FIG. 3.13 - PROPRIEDADE (g)

3.3.1.4. PROPRIEDADES ASSOCIADAS À IMPOSIÇÃO DE DESLOCAMENTOS ABSOLUTOS E RELATIVOS

h) Variando em $\Delta\overline{OA}$ a distância \overline{OA} entre um ponto fixo O e um ponto A da chapa ① esta gira $\omega_1 = \Delta\overline{OA}/h$, onde h é a distância de (I) à reta OA; v. fig. 3.14.

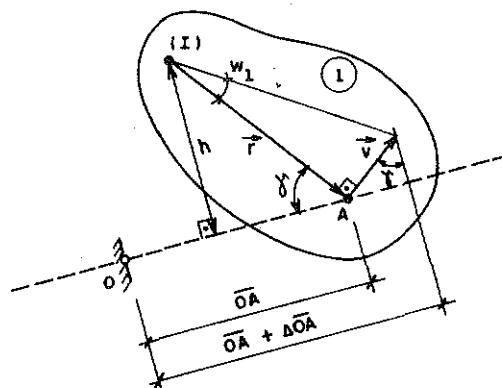


FIG. 3.14 - PROPRIEDADE (h)

É imediata a demonstração, em tudo semelhante à da propriedade (c) :

$$\text{sen } \gamma = \frac{\Delta\overline{OA}}{v} = \frac{h}{r} \quad \therefore \quad \frac{v}{r} = \frac{\Delta\overline{OA}}{h} \quad \therefore \quad \omega_1 = \frac{\Delta\overline{OA}}{h}$$

i) Variando em $\Delta\overline{OA}$ a distância entre um ponto fixo O e um ponto A da chapa ① com polo absoluto (I) impróprio, $\Delta\overline{OA}$ será componente da translação absoluta \vec{v}_1 da chapa ①; fig. 3.15.

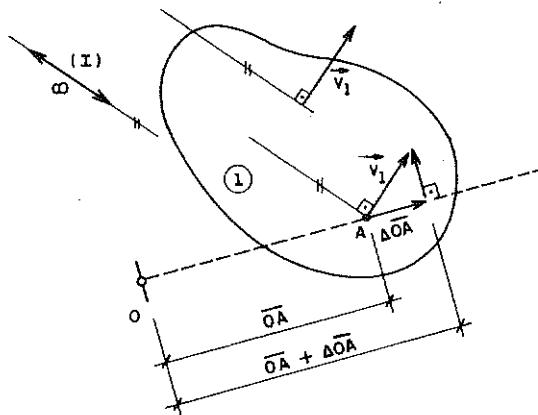


FIG. 3.15 - PROPRIEDADE (i)

j) Variando em $\Delta\overline{AB}$ a distância \overline{AB} entre os ponto A da chapa (1) e B da chapa (2), o giro relativo $\vec{\omega}_{21}$, da chapa (2) em relação à (1), é tal que $\omega_{21} = \Delta\overline{AB}/h$, onde h é a distância do polo relativo (I,II) à reta AB; v. fig. 3.16.

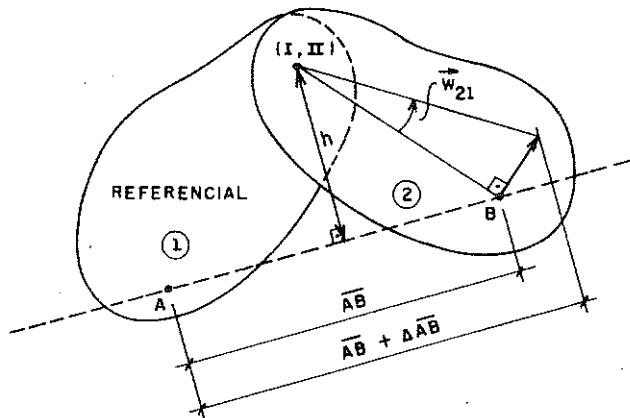


FIG. 3.16 - PROPRIEDADE (j)

Pensando-se em obter $\vec{\omega}_{21}$, observe-se que essa propriedade é semelhante à (h), bastando-se fixar o referencial em ①; $\vec{\omega}_{21}$ é simétrica em relação a $\vec{\omega}_{12}$, sendo seu módulo calculado da mesma maneira.

1) Variando em $\Delta\overline{AB}$ a distância entre os pontos A da chapa ① e B da chapa ②, se o polo relativo (I,II) for impróprio, $\Delta\overline{AB}$ será componente da translação relativa \vec{v}_{21} dos pontos da chapa ② em relação à chapa ①; v. fig. 3.17.

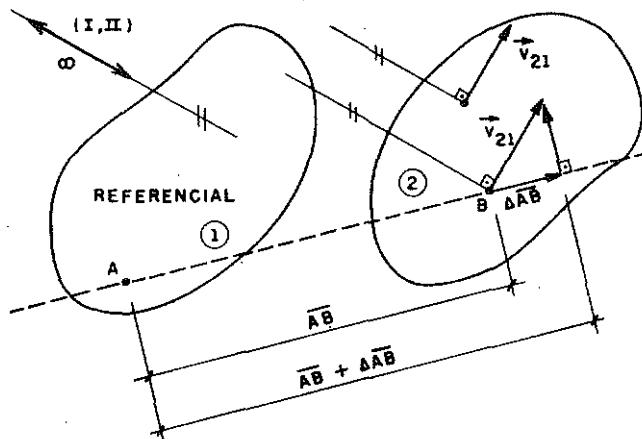


FIG. 3.17 - PROPRIEDADE (l)

Observe-se que \vec{v}_{12} em módulo é igual a \vec{v}_{21} . A propriedade é análoga à (i), com a fixação de um referencial em ①.

3.3.1.5. PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO DE DESLOCAMENTOS

m) A projeção dos deslocamentos de uma chapa ①, numa certa direção, é uma reta, com zero na projeção do polo (I) e girada do mesmo ω_1 ; v. fig. 3.18.

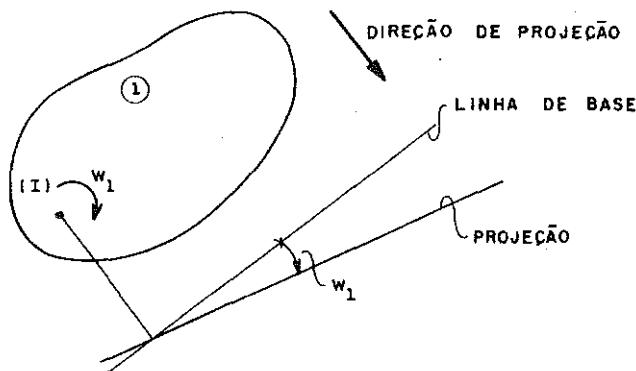


FIG. 3.18 - PROPRIEDADE (m)

Essa propriedade pode ser encarada como uma mera adaptação da propriedade (c).

Observe-se que a forma da chapa não influi na projeção de deslocamentos e mais, todos os giros, absolutos e relativos, se conservam em projeção.

3.3.2. Exemplo 4 - Estrutura Isostática Genérica

Determinar a linha de influência da força axial, positiva se de tração, no vínculo A-B da "estrutura isostática" da figura, para carga percorrendo a linha S; v. fig. 3.19.

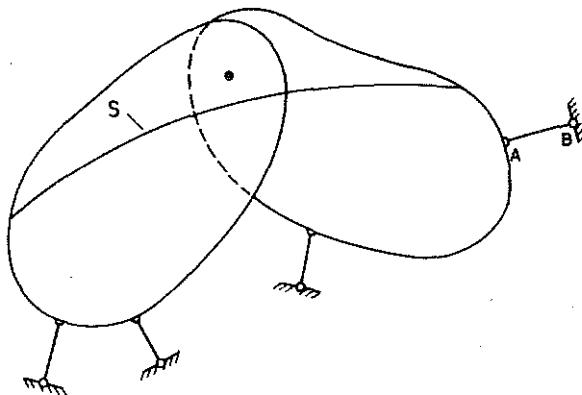


FIG. 3.19 - UMA ESTRUTURA GENÉRICA

O processo das cadeias cinemáticas implica, no caso, em:

- *) Retirar o vínculo A-B e identificar as chapas da cadeia cinemática;
 - *) Determinar os polos absolutos e relativos das chapas identificadas, com as propriedades (d) a (g);
 - *) Impor um deslocamento com a propriedade (h) e com isso fixar o movimento de todas as chapas, calculando sua rotação;
 - *) Projetar na vertical os deslocamentos de todas as chapas;
 - *) Selecionar as projeções de deslocamentos só dos pontos pertencentes à linha S, atribuindo sinal positivo se o deslocamento for para baixo.

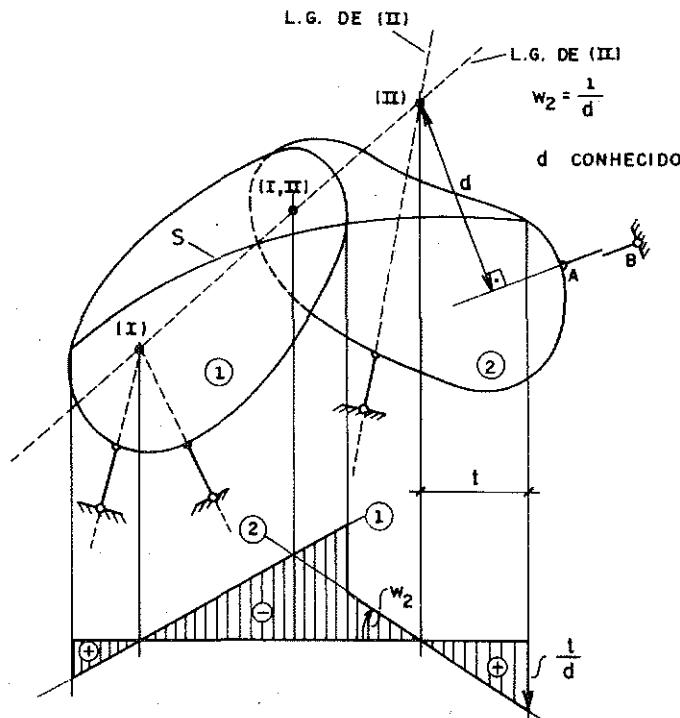


FIG. 3.20 - UMA L.I. NA ESTRUTURA GÊNERICA

Todo esse procedimento foi esquematizado na fig.3.20.

A operação de calcular as rotações de todas as chapas foi omitida; a projeção vertical, ou qualquer projeção, tem um só grau de liberdade, fixável já nessa projeção, que é um conjunto elementar de linhas retas; com isso se evitou a montagem e solução de um sistema de equações lineares.

3.3.3. Exemplo 5 - Arco Triarticulado

Determinar algumas linhas de influência para o arco de eixo circular da fig.3.21.

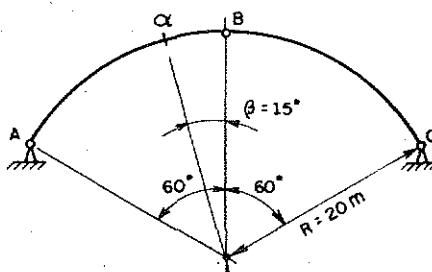


FIG. 3.21 - ARCO TRIARTICULADO

a) L.I. de R_{HA} (> 0 p/ a direita); v.fig.3.22.

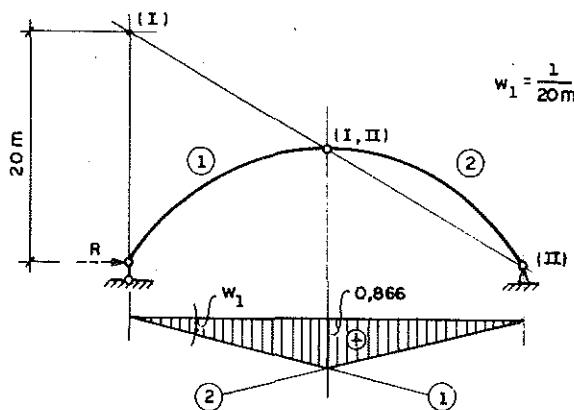


FIG. 3.22 - L.I. DE R_{HA}

OBSERVAÇÃO:

É interessante cotar ordenadas da linha de influência que permitam o seu traçado independentemente de rotações absolutas ou relativas que são inerentes ao Processo das Cadeias Cinemáticas e não à linha de influência em si.

b) L.I. de V_α ($>$ o horário); v. fig. 3.23.

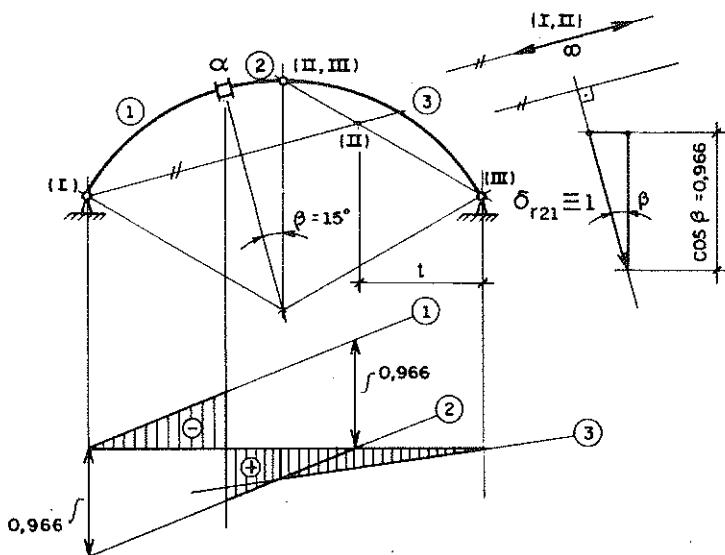


FIG. 3.23 - L.I. DE V_α

OBSERVAÇÃO:

O deslocamento imposto já é o deslocamento relativo final por ter a direção para ele prevista, normal à definida pelo polo (I,II) impróprio. O "cos β " da fig. 3.23 é apenas a componente vertical desse deslocamento. De trigonometria elementar sai $t = 10,983\text{m}$.

c) L.I. de N_α (> 0 tração); v.fig.3.24.

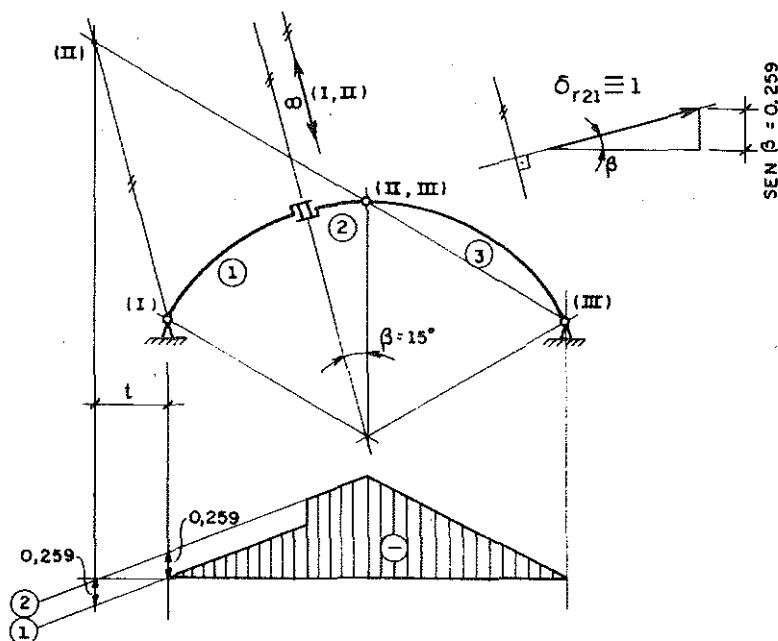


FIG. 3.24 - L.I. DE N_α

OBSERVAÇÃO:

De trigonometria elementar sai $t=6,340\text{m}$.

d) L.I. de N_B (> 0 tração); v.fig.3.25.

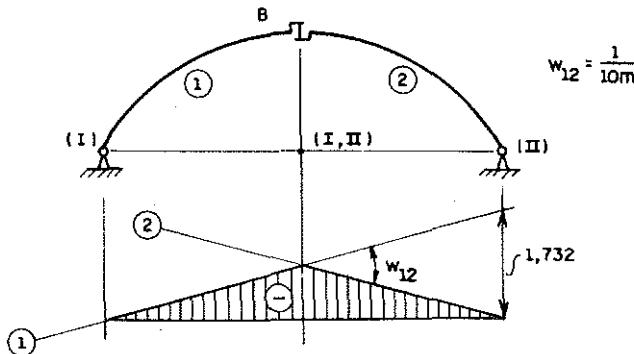


FIG. 3.25 - L.I. DE N_B

OBSERVAÇÃO:

Nesse caso, por ter restado um único vínculo em B, as chapas ① e ② não têm polo relativo impróprio. Caso, numa situação mais complexa que esta, surja a dúvida quanto ao sentido do deslocamento relativo imposto, é interessante correr o risco de desenhar a figura com as projeções de deslocamento e depois verificar, do ponto de vista de uma das chapas envolvidas, o sentido do deslocamento da outra; em caso de erro redesenhar.

e) L.I. de M_α ($>$ o tração embaixo); v. fig. 3.26.

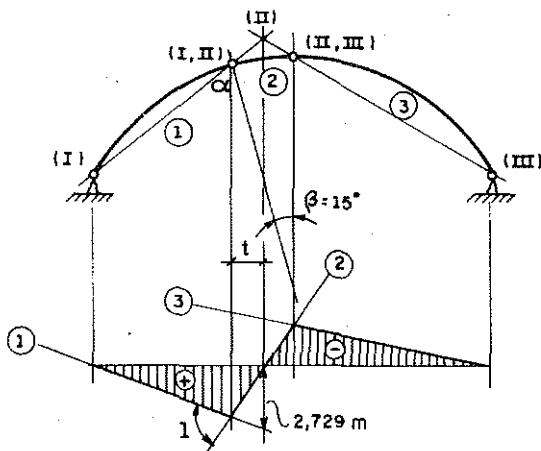


FIG. 3.26 - L.I. DE M_α

A ordenada $t=2,729\text{m}$ sai de trigonometria elementar.

3.3.4. Exemplo 6 - Pórtico Plano

Para carga percorrendo o trecho horizontal superior, determinar as linhas de influência de alguns esforços no pórtico plano da fig.3.27.

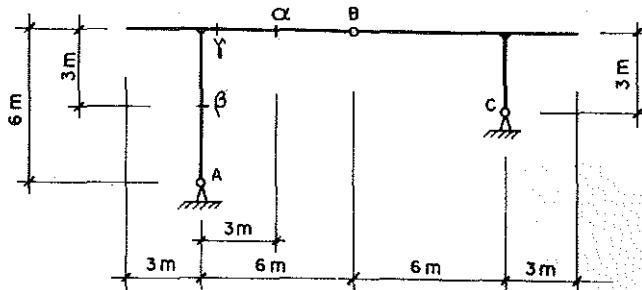


FIG. 3.27 - PÓRTICO PLANO

a) L.I. de R_{VA} (> 0 p/ cima); v. fig. 3.28.

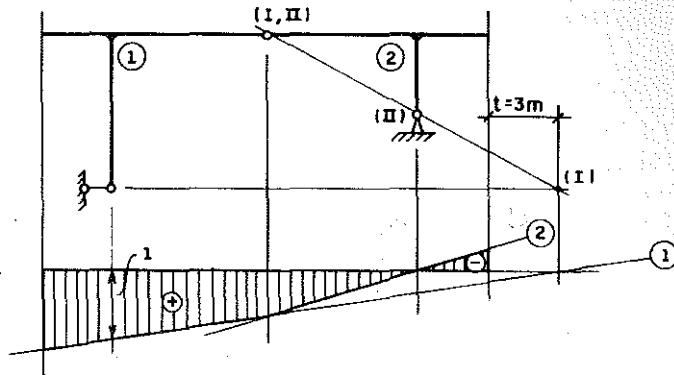


FIG. 3.28 - L.I. DE R_{VA}

OBSERVAÇÃO:

Como o deslocamento unitário é vertical não há qualquer razão prática para calcular a rotação ω_1 .

b) L.I. de M_{α} (> 0 tração embaixo); v.fig. 3.29.

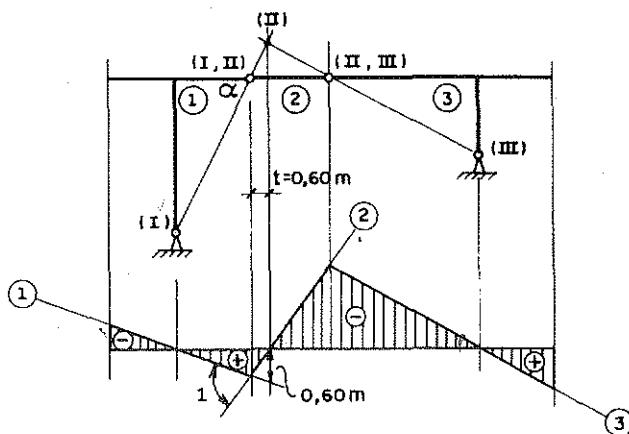


FIG. 3.29 - L.I. DE M_{α}

c) L.I. de M_{β} (> 0 tração à direita); v.fig. 3.30.

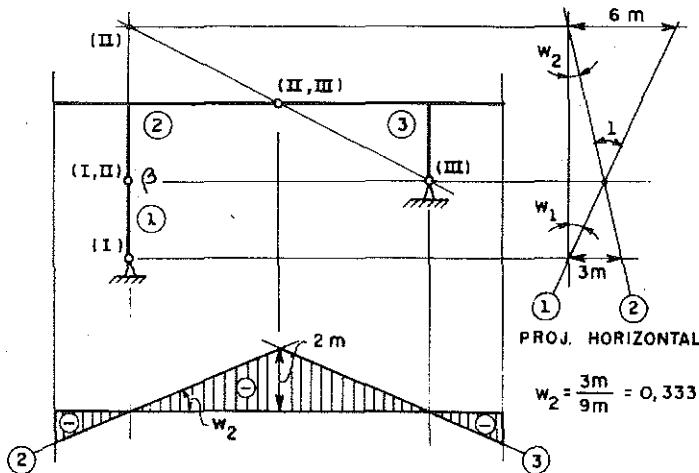


FIG. 3.30 - L.I. DE M_{β}

OBSERVAÇÃO:

Devido ao fato de os três polos (I), (II) e (I,II), estarem na mesma vertical a imposição da rotação unitária diretamente na projeção vertical é inviável; por outro lado, dada a simplicidade de trabalhar em projeção, optou-se por recorrer à projeção horizontal para determinar a rotação das chapas; no caso bastou determinar $\omega_2 = 0,333$.

d) L.I. de M_{γ} (γ o tração embaixo); v. fig. 3.31.

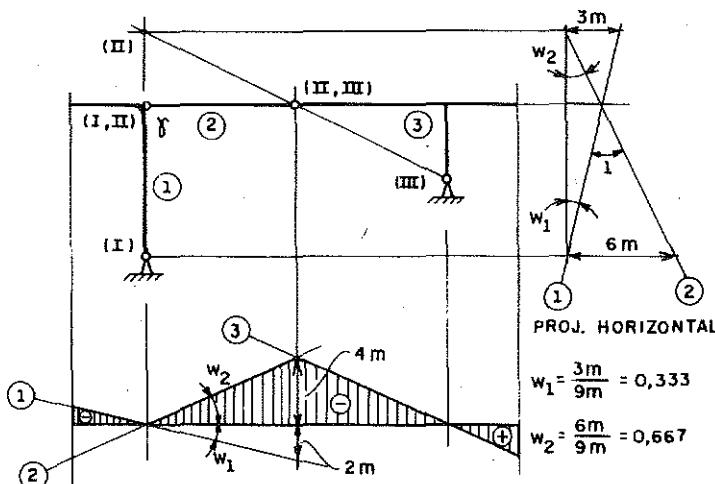


FIG. 3.31 - L.I. DE M_{γ}

OBSERVAÇÃO:

A única diferença conceitual em relação ao caso anterior é a necessidade de obter, da projeção horizontal, as rotações das chapas (1) e (2).

e) L.I. de N_{α} (> 0 de tração); v. fig. 3.32.

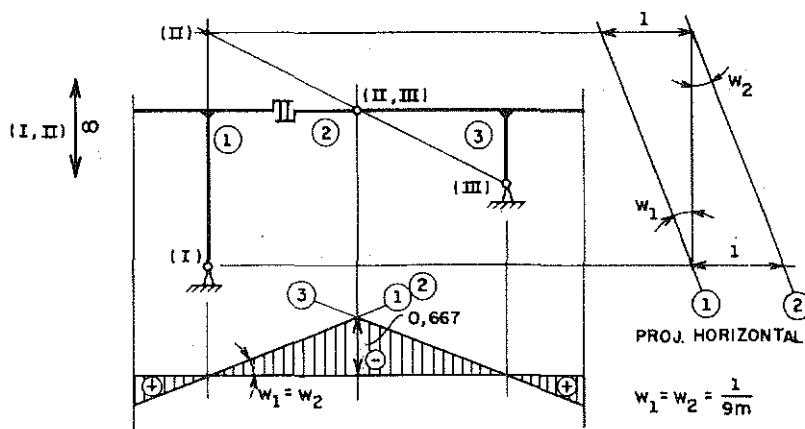


FIG. 3.32 - L.I. DE N_α

f) L.I. de V_α (> 0 horário); v. fig. 3.33.

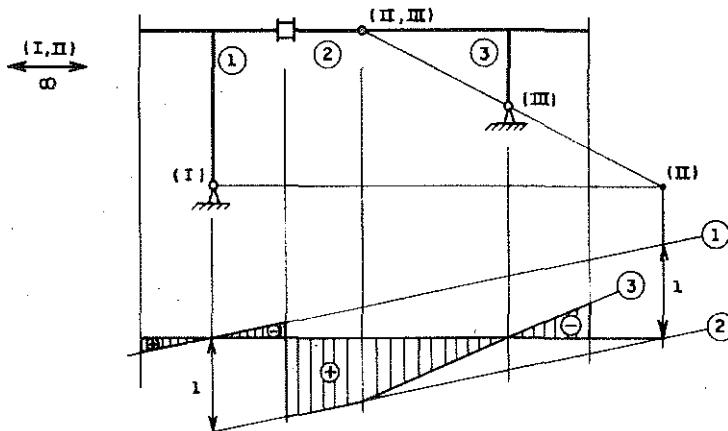


FIG. 3.33 - L.I. DE V_α

g) L.I. de V_B ($>$ o horário); v.fig.3.34.

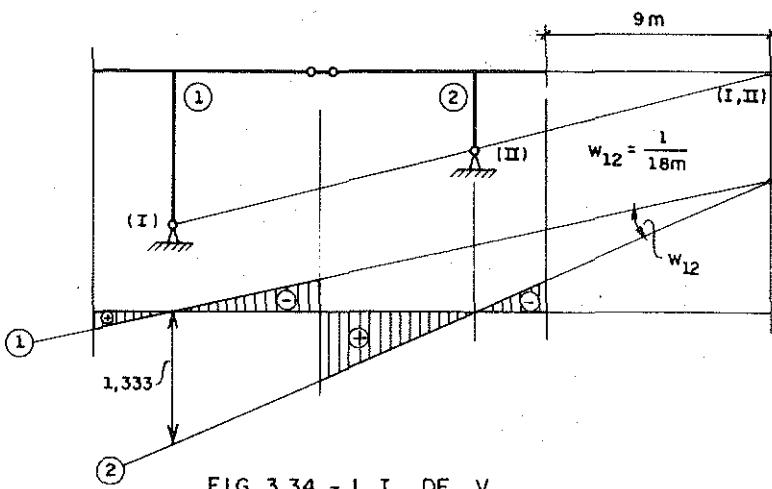


FIG. 3.34 - L.I. DE V_B

3.3.5. Sistema Isostático de Piso

Alguns tipos de estruturas como os arcos e as treliças podem ser extremamente interessantes, para suportar cargas sobre um determinado vão, mas, não recebem as cargas móveis usuais, decorrentes de tráfego por exemplo, de uma maneira contínua e adequada; assim, num arco, pela sua forma, se a pista de rolamento correspondesse ao seu eixo, haveria a necessidade de o tráfego vencer aclives e declives injustificáveis; já numa treliça a carga teria que ser nodal, para que ela se comportasse como tal, sem flexão considerável nas barras. Para superar esse problema o que se faz é criar um "sistema de piso", isostático, com a única função de receber as cargas e transmiti-las adequadamente à estrutura principal.

Um "sistema isostático de piso", ou um "sistema isostático de carga indireta" será aqui definido como um conjunto de vigas biarticuladas horizontais apoiadas em barras, tirantes ou montantes, verticais, conforme fig. 3.35.

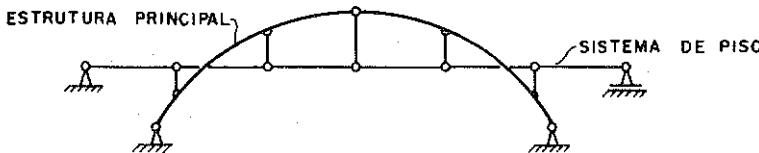


FIG. 3.35 - SISTEMA ISOSTÁTICO DE PISO

É interessante observar, dentro do contexto desta publicação, que, ao analisar esforços na estrutura principal, as cargas estarão aplicadas ao sistema de piso e se necessitará de linhas de influência $\eta(s)$ correspondentes a essa linha.

É fácil constatar, estática ou cinematicamente, que é possível obter a linha de influência $\eta(s)$ de um esforço E_C de uma seção C da estrutura principal, para carga percorrendo o sistema de piso, a partir da linha de influência $\eta^*(s)$ do mesmo esforço E_C , para carga aplicada diretamente à estrutura; assim, nos pontos onde existem barras verticais $\eta(s) \equiv \eta^*(s)$ e nos trechos intermediários $\eta(s)$ é linear.

A demonstração desse "teorema" é elementar, bastando observar que o sistema de piso adicionando não oferece qualquer impedimento à translação vertical dos pontos da estrutura principal que pelo processo das cadeias cinemáticas acabou sendo assimilada às linhas de influência de esforços.

No caso de treliças planas, salvo segundo aviso, se partirá do princípio que deva existir um sistema de piso com uma barra horizontal "em paralelo" a cada barra do banzo "percorrido" pelas cargas, conforme fig. 3.36, tudo se passando, para efeito externo à própria barra, como se ela estivesse sendo percorrida pela carga.

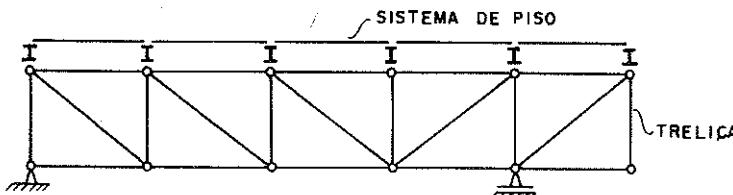


FIG. 3.36 - SISTEMA DE PISO EM TRELICA

3.3.6. Exemplo 7 - Arco com Sistema de Piso

Para carga aplicada ao sistema de piso, traçar a linha de influência do esforço cortante em B, positivo se horário sobre a seção, na estrutura da fig. 3.37.

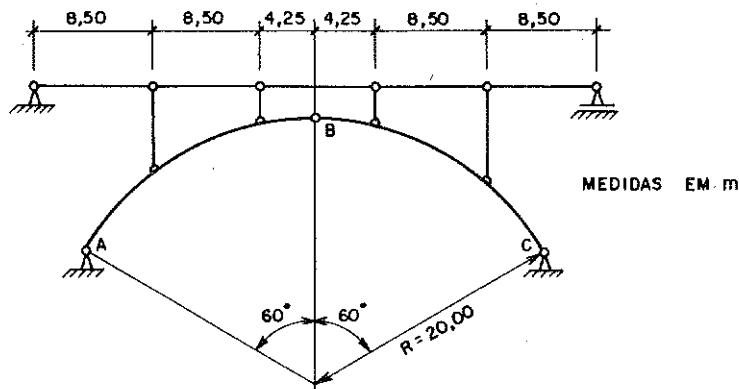


FIG. 3.37 - ARCO COM SISTEMA DE PISO

L.I. de V_B (> 0 horário); v. fig. 3.38.

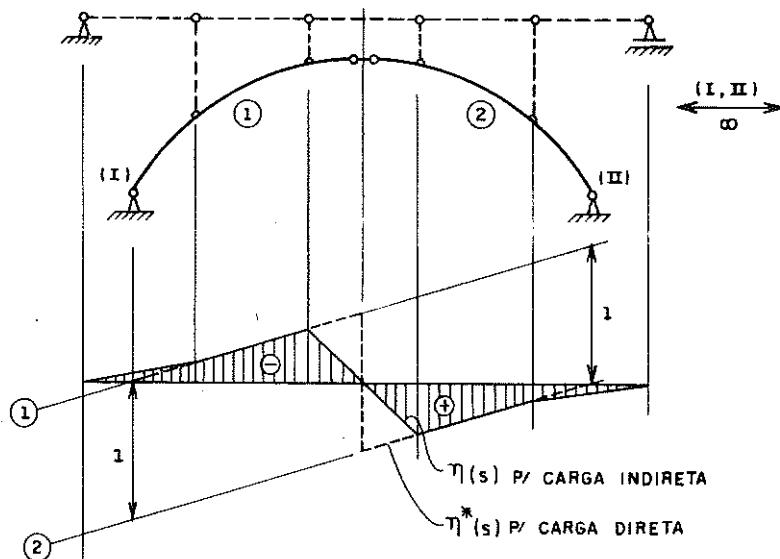


FIG. 3.38 - L.I. DE V_B

Observe-se que a obtenção da linha de influência $\eta^*(s)$ é simples, manuseando-se um número relativamente pequeno de chapas.

3.3.7. Exemplo 8 - Treliça Isostática

Para carga indiretamente aplicável ao trecho horizontal 1-3-5-7-8, determinar as linhas de influência de alguns esforços na treliça da fig.3.39.

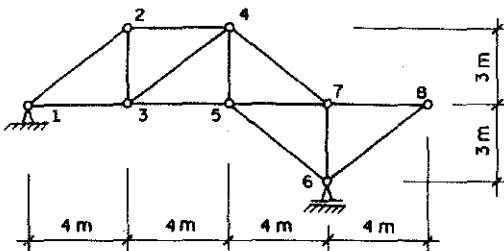


FIG. 3.39 - TRELIÇA ISOSTÁTICA

a) L.I. de N_{24} (> 0 de tração); v. fig.3.40.

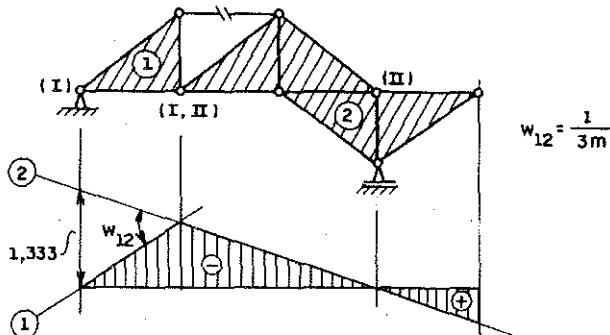


FIG. 3.40 - L.I. DE N_{24}

b) L.I. de $N_{4.5}$ (> 0 de tração); v.fig.3.41.

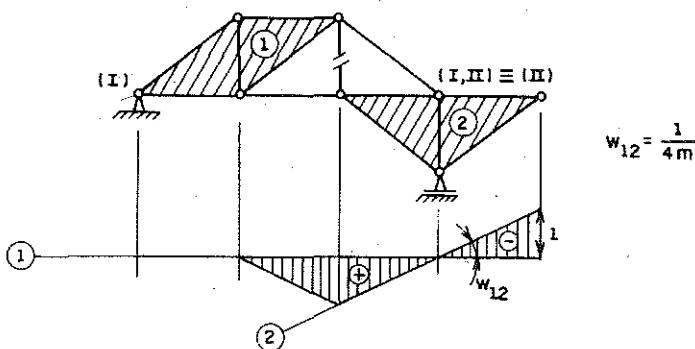


FIG. 3.41 - L.I. DE $N_{4.5}$

OBSERVAÇÃO:

A chapa (1) é fixa pois, além de (I) ser fixo, também o polo (I,II) que pertence à chapa (1) é fixo, já que coincide com o polo (II) da chapa (2).

c) L.I. de $N_{3.4}$ (> 0 de tração); v.fig.3.42.

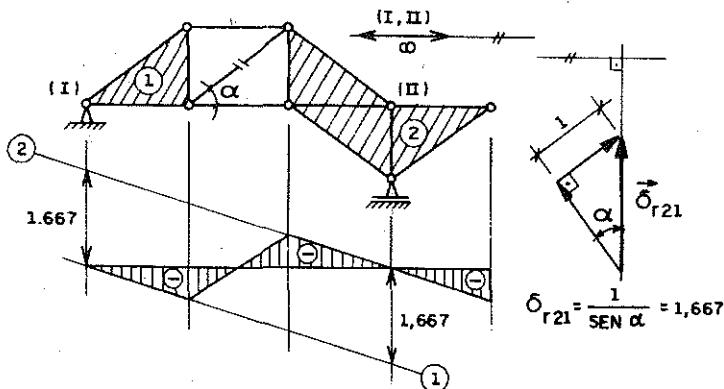


FIG. 3.42 - L.I. DE $N_{3.4}$

d) L.I. de $N_{2 \cdot 3}$ (> 0 de tração); v. fig. 3.43.

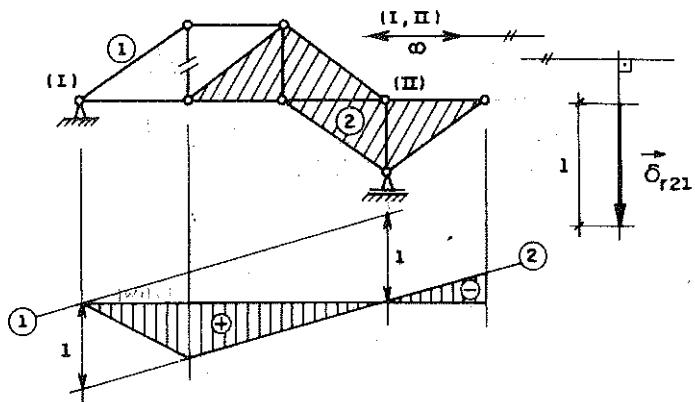


FIG. 3.43 - L.I. DE N_{23}

OBSERVAÇÃO:

A barra 1-2 foi chamada de chapa para recair nas condições das propriedades, que não prevêm barras em série.

L.I. de N_{5-7} (> 0 de tração); v. fig. 3.44.

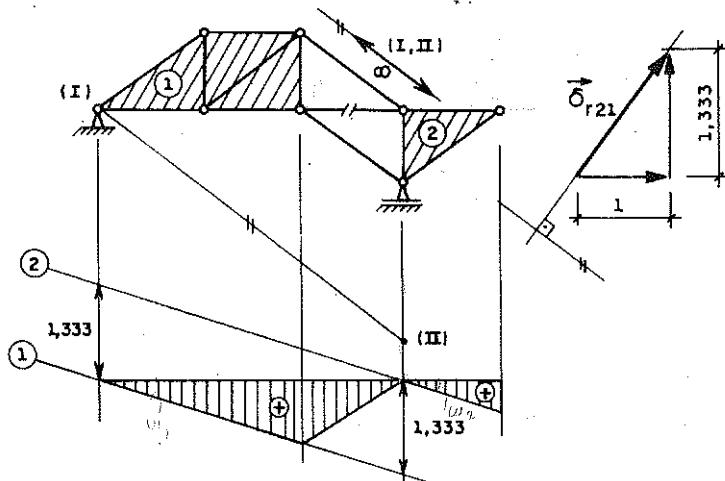


FIG. 3.44 - L.I. DE N₅₇

CAPÍTULO IV

O FORMATO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA

4.1. APRESENTAÇÃO

O problema de traçar linhas de influência de esforços ou outros efeitos quaisquer nem sempre é tão absurdamente elementar como no caso das linhas de influência de esforços em estruturas isostáticas. No caso de estruturas hiperestáticas não existem técnicas simples e generalizáveis, quer de origem estática quer cinemática, para viabilizar o traçado manual dessas linhas; o problema em si acaba sendo numericamente complicado; para evitar erros, controlando sinais e ordens de grandeza relativas é que seria interessante aproveitar os teoremas de Müller-Breslau para, com um pouco de sensibilidade no tocante a adivinhar elásticas devidas a deslocamentos impostos, esquematizar o formato das linhas de influência.

4.2. EXEMPLO 1 - VIGA CONTÍNUA

Para a viga contínua, de seção transversal constante, da fig.4.1, esquematizar o formato de algumas linhas de influência.

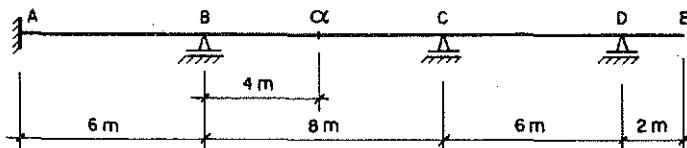


FIG. 4.1 - EXEMPLO 1 - VIGA CONTÍNUA

a) L.I. de M_α (> 0 tração embaixo); v.fig.4.2.

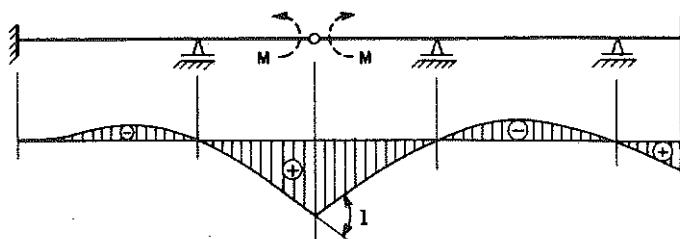


FIG. 4.2 - L.I. DE M_α

b) L.I. de M_c (> 0 tração embaixo); v.fig.4.3.

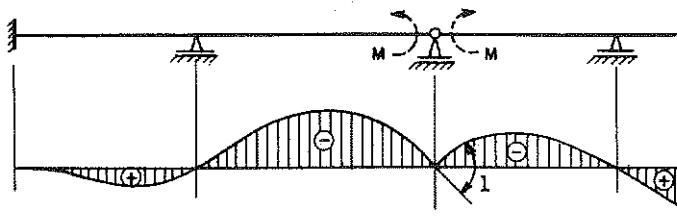


FIG. 4.3 - L.I. DE M_c

c) L.I. de R_{vc} (> 0 tração embaixo); v.fig.4.4.

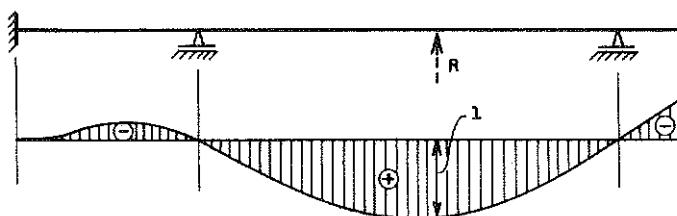


FIG. 4.4 - L.I. DE R_{vc}

d) L.I. de $\delta_{v\alpha}$ (> 0 tração para baixo); v.fig.4.5.

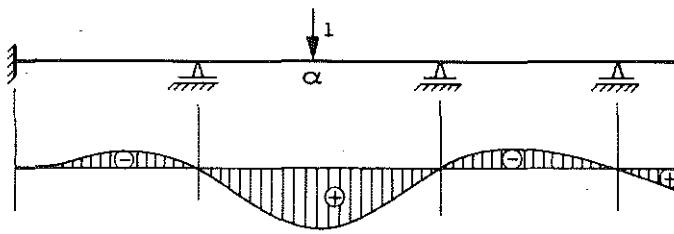


FIG.4.5 - L.I. DE $\delta_{v\alpha}$

e) L.I. de $V_{c, \text{esq.}}$ (> 0 horário); v.fig.4.6.

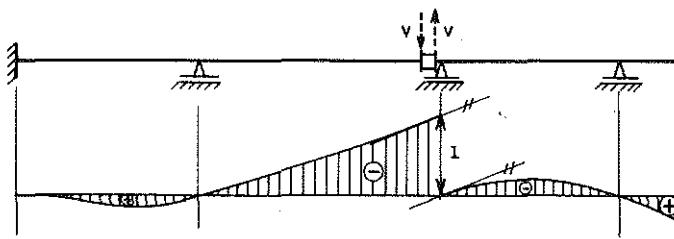


FIG.4.6 - L.I. DE $V_{c, \text{esq.}}$

4.3. EXEMPLO 2 - PÓRTICO PLANO

Para carga percorrendo o trecho horizontal superior determinar o formato de algumas linhas de influência para o pórtico da fig. 4.7.

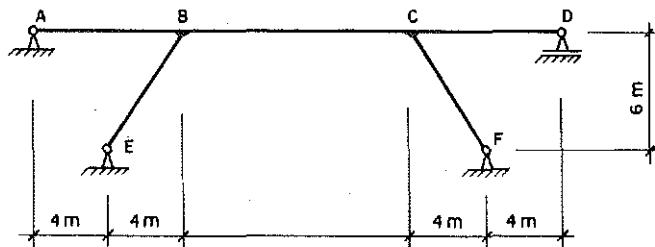


FIG.4.7 - PÓRTICO PLANO

a) L.I. de R_{HF} (> 0 para a esquerda); v.fig.4.8.

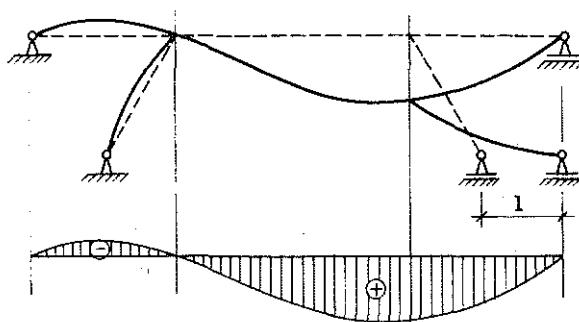


FIG. 4.8 - L.I. DE R_{HF}

b) L.I. de $V_{C, \text{esq}}$ (> 0 horário); v.fig.4.9.

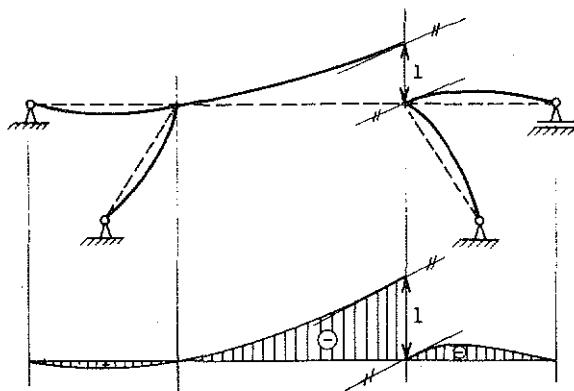


FIG. 4.9 - L.I. DE $V_{C, \text{esq}}$

CAPÍTULO V

POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO COMPUTACIONAL DOS TEOREMAS

5.1. APRESENTAÇÃO

O teorema de Müller-Breslau, e o seu dual, dão origem a técnicas absolutamente simples para o cálculo de linhas de influência em estruturas hiperestáticas quando se pretende efetuar esse cálculo em computador. Vale a pena ressaltar alguns pontos quando se pensa em programação utilizando o processo de deslocamentos, para vigas, pórticos ou treliças, ou mesmo o processo de propagação, muito simples, utilizado no caso de vigas contínuas. Os procedimentos a serem programados poderão variar dependendo de se tratar com linhas de influência de deslocamentos, de reações ou de esforços internos. Em qualquer dos casos estaria implícito o cálculo, ponto a ponto, da projeção vertical dos deslocamentos da linha percorrida pelas cargas.

5.2. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE DESLOCAMENTOS

Carrega-se a estrutura com uma carga unitária na direção do deslocamento cuja linha de influência se deseja; no caso de o deslocamento ser nodal o problema é particularmente simples, não envolvendo, no cálculo da elástica, sequer a alternativa de fórmula num possível caso de um ponto da linha percorrida pelas cargas. Não esquecer que os parâmetros elásticos e geométricos efetivos das seções devem ser dados.

5.3. LINHA DE INFLUÊNCIA DE REAÇÕES

Nesse caso impõe-se um recalque de apoio unitário em sentido contrário ao esforço de reação cuja linha de influência se deseja calcular.

5.4. LINHA DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS INTERNOS AO LONGO DO TRAMO

Nesse caso já é necessária uma adaptação mais significativa nos programas usuais, a menos que eles já disponham da possibilidade de tratar problemas de deformação prévia das barras; de qualquer forma, o problema seria o de incluir o cálculo de esforços de bloqueio, nas coordenadas locais associadas à barra, para diversas situações de "deformação imposta"; para linha de influência de momento, cortante ou esforço axial num ponto C essas situações seriam as da fig.5.1.a, b ou c, respectivamente, correspondentes às convenções:

$M > 0$ tração embaixo

$V > 0$ horário

$N > 0$ tração

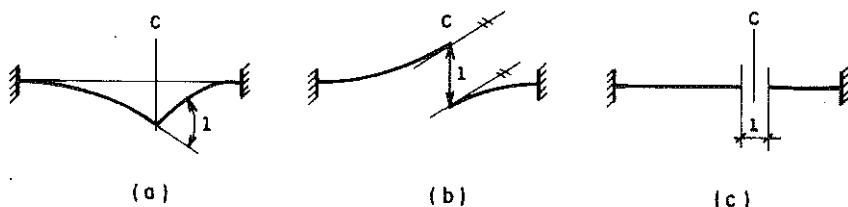


FIG. 5.1 - DEFORMAÇÕES IMPOSTAS

No caso da fig. 5.1.a seria extremamente simples calcular os momentos de engastamento perfeito a partir dos fatores de carga equivalentes A e B , definidos na fig.5.2.

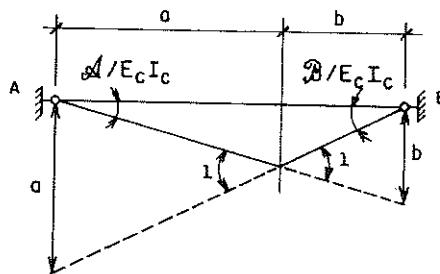


FIG.5.2 - FATORES DE CARGA PARA L.I. DE MOMENTO

Da fig.5.2:

$$A = E_c I_c \frac{b}{l}$$

$$B = E_c I_c \frac{a}{l}$$

Para o caso de barras prismáticas; $G=G'=2F=l'/3$ e então:

$$M_{AB} = \frac{2}{l'} (2A - B) = \frac{2EI}{l^2} (2b - a)$$

$$M_{BA} = \frac{2}{l'} (2B - A) = -\frac{2EI}{l^2} (2a - b)$$

$$M'_{AB} = \frac{3}{l'} A = \frac{3EI}{l^2} a$$

$$M'_{BA} = -3 \frac{B}{l'} = -\frac{3EI}{l^2} a$$

Com esses momentos saem também os esforços cortantes de extremidade.

Caso se queira tratar com processos que envolvam os "termos de carga", \mathcal{E} e \mathcal{D} , ter-se-á:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{F} = \frac{6EI}{l^2} b$$

$$\mathcal{D} = \frac{B}{F} = \frac{6EI}{l^2} a$$

No caso da fig. 5.1.b os fatores de carga equivalentes seriam obtidos com o auxílio da fig. 5.3.

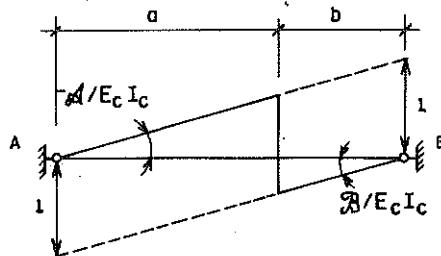


FIG.5.3 - FATORES DE CARGA PARA L.I. DE CORTANTE

Da fig. 5.3:

$$A = -B = -E_c I_c \frac{1}{l}$$

Para o caso de barras prismáticas:

$$M_{AB} = M_{BA} = - \frac{6EI}{l^2}$$

$$M'_{AB} = M'_{BA} = - \frac{3EI}{l^2}$$

Os termos de carga seriam:

$$\mathcal{E} = -\mathcal{D} = - \frac{6EI}{l^2}$$

Com esses momentos, com condições de equilíbrio, saem os esforços cortantes de extremidade.

No caso da fig.5.1.c a solicitação seria só axial e o esforço de compressão N , resultante, seria:

$$N = \frac{ES}{\ell}$$

Não se pretende nesta publicação estruturar programas ou desenvolver algoritmos para programação em computador; fica aqui apenas delineada uma metodização plausível, deixando-se o resto por conta de alguém que se interesse pelo assunto.

CAPÍTULO VI

LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS EM VIGAS CONTÍNUAS

6.1. INTRODUÇÃO TEÓRICA

Apenas como ilustração de uma técnica interessante, de origem "estática", apropriada para um tipo particular de estruturas, será aqui desenvolvido o cálculo de linhas de influência de esforços em vigas contínuas, recaindo em linhas de influência de esforços elementares associados a barras geometricamente determinadas. O acoplamento das barras para compor a estrutura ficará restrito a problemas correspondentes a carregamentos fixos sobre a viga contínua.

Seja o caso de obter a linha de influência $\eta(s)$ de um esforço E em princípio correspondente a uma seção C e pensado como "pertencente" a um tramo $r-s$ da viga.

Para se obter $\eta(s)$ num tramo genérico $i-j$, utiliza-se o esquema de solução da fig.6.1; a carga, só no tramo $i-j$, pode ter sua posição definida pelo parâmetro adimensional ξ .

A idéia essencial é introduzir momentos externos de forma a impedir, num problema (0), que os efeitos da carga se espalhem para fora do tramo $i-j$ carregado. Isso se consegue aplicando os simétricos dos momentos de engastamento perfeito, $M_{ij}(\xi)$ e $M_{ji}(\xi)$, que por serem função de ξ são linhas de influência desses esforços.

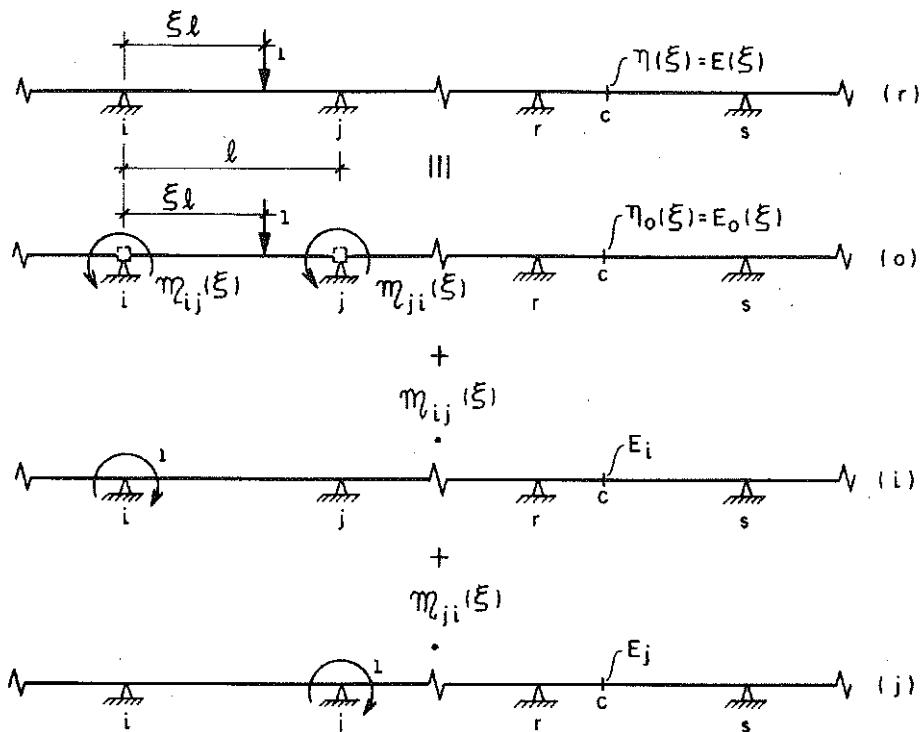


FIG. 6.1 - ESQUEMA DE SOLUÇÃO

Evidentemente se $i-j$ for tramo de extremidade basta utilizar um deles, no caso de a extremidade ser engastada, ou então, se a extremidade for articulada, utilizar $M'_{ij}(\xi)$ ou $M'_{ji}(\xi)$; também pode ocorrer o caso de $i-j$ corresponder a uma barra em balanço, caso em que se utilizará $M''_{ij}(\xi)$ e $M''_{ji}(\xi)$.

Para reproduzir o problema original, aplicam-se então os próprios momentos de engastamento perfeito, cujo simétrico fora antes adicionado; colocando em evidência os valores numéricos desses momentos resultam problemas (i) e (j) independentes de ξ .

Com isso:

$$\text{se } i-j \neq r-s \rightarrow \eta(\xi) = E_i M_{ij}(\xi) + E_j M_{ji}(\xi)$$

$$\text{se } i-j = r-s \rightarrow \eta(\xi) = \eta_0(\xi) + E_i M_{ij}(\xi) + E_j M_{ji}(\xi)$$

É interessante observar que a mesma idéia pode ser utilizada mesmo quando se tratar com esforços naturalmente não associáveis a um tramo como as reações de apoio e os momentos na viga sobre os apoios; no caso da reação o esforço "pertencerá" a ambos os tramos adjacentes; no caso dos momentos "pertencerá" a qualquer dos dois tramos, ou, sistematicamente ao "outro".

Os momentos de engastamento perfeito, na convenção de Grinter, para carga unitária em ξ , numa barra A-B, sairiam, com $a=\xi\ell$ e $b=(1-\xi)\ell$, de:

$$M_{AB} = \frac{Pab}{\ell^2} \rightarrow M_{AB} = \xi(1-\xi)^2 \ell$$

$$M_{BA} = \frac{Pa^2 b}{\ell^2} \rightarrow M_{BA} = -\xi^2(1-\xi)\ell$$

$$M'_{AB} = \frac{Pab}{2} \frac{\ell+b}{\ell^2} \rightarrow M'_{AB} = \frac{\xi}{2} (1-\xi)(2-\xi)\ell$$

$$M'_{BA} = -\frac{Pab}{2} \frac{\ell+a}{\ell^2} \rightarrow M'_{BA} = -\frac{\xi}{2} (1-\xi^2)\ell$$

$$M''_{AB} = Pa \rightarrow M''_{AB} = \xi\ell$$

$$M''_{BA} = -Pb \rightarrow M''_{BA} = -(1-\xi)\ell$$

Essas expressões estão tabeladas no final desta publicação, para ξ variando em 0,05, de 0 a 1; ver TABELA 1.

Os valores de $\eta_0(\xi)$, linhas de influência de um esforço numa seção definida associada a um tramo, para carga nesse tramo, estão tabeladas, em termos de

formulário, na TABELA 2 do final da publicação.

A primeira expressão da segunda parte dessa tabela, corresponde a $\eta_0(\xi) = M_C(\xi)$ para a seção C definida pela ordenada γl , conforme fig.6.2.a, no caso de viga com extremidade A e B engastadas e para $\xi \leq \gamma$.

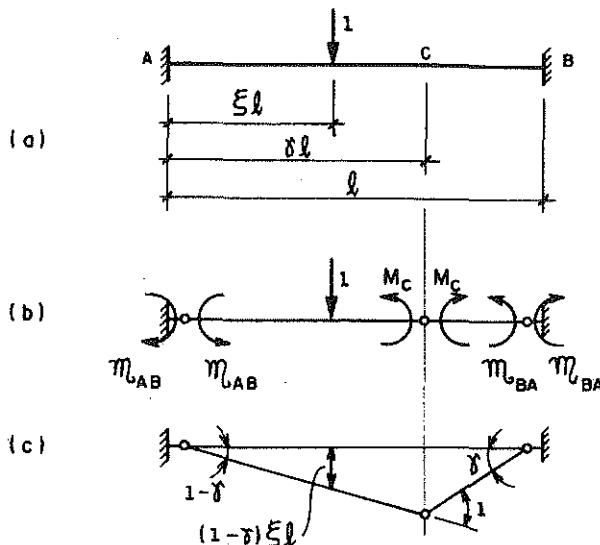


FIG.6.2 - EXEMPLO DE CÁLCULO DE $\eta_0(\xi)$

Para calcular $\eta_0(\xi) = M_C(\xi)$, pode-se retirar os vínculos correspondentes a $M_{AB}(\xi)$ e $M_{BA}(\xi)$, conhecidos, e $M_C(\xi)$, incógnito, obtendo o estado de forças da fig. 6.2.b. A esse estado de forças, impõe-se o estado de deslocamentos da fig.6.2.c, compatível, sem deformação, com um deslocamento "unitário" em sentido contrário a M_C , mantendo, é claro, a geometria de deslocamentos infinitesimais; do Princípio dos Trabalhos Virtuais, já isolando $M_C = M_C(\xi) = \eta_0(\xi)$, tem-se:

$$M_C = (1-\gamma) \xi \ell - M_{AB} (1-\gamma) + M_{BA} \gamma \quad \text{p/ } \xi \leq \gamma$$

Para cada nó que, no cálculo de qualquer das linhas de influência que se deseja, venha a ser bloqueado, deve-se previamente resolver o problema de aplicar um momento unitário, horário, determinando os diagramas de esforços internos e as reações.

6.2. EXEMPLO

Determinar as linhas de influência de alguns esforços na viga contínua da fig.6.3.

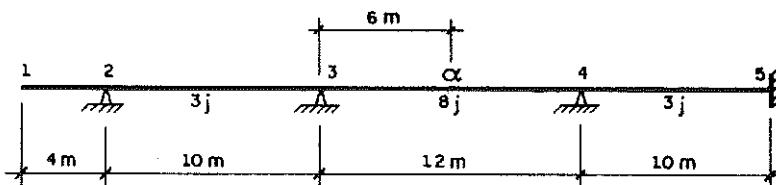


FIG. 6.3 - EXEMPLO. VIGA CONTÍNUA

No traçado de uma qualquer linha de influência deverão ser, não simultaneamente, bloqueados os nós 2, 3 e 4. Um primeiro passo no cálculo é o de resolver os 3 problemas correspondentes a aplicar momentos unitários em cada um desses nós. Como serão determinadas linhas de influência de diversos esforços, seria interessante ter em mãos os diagramas de esforços internos em cada caso; isso consta da fig.6.4.

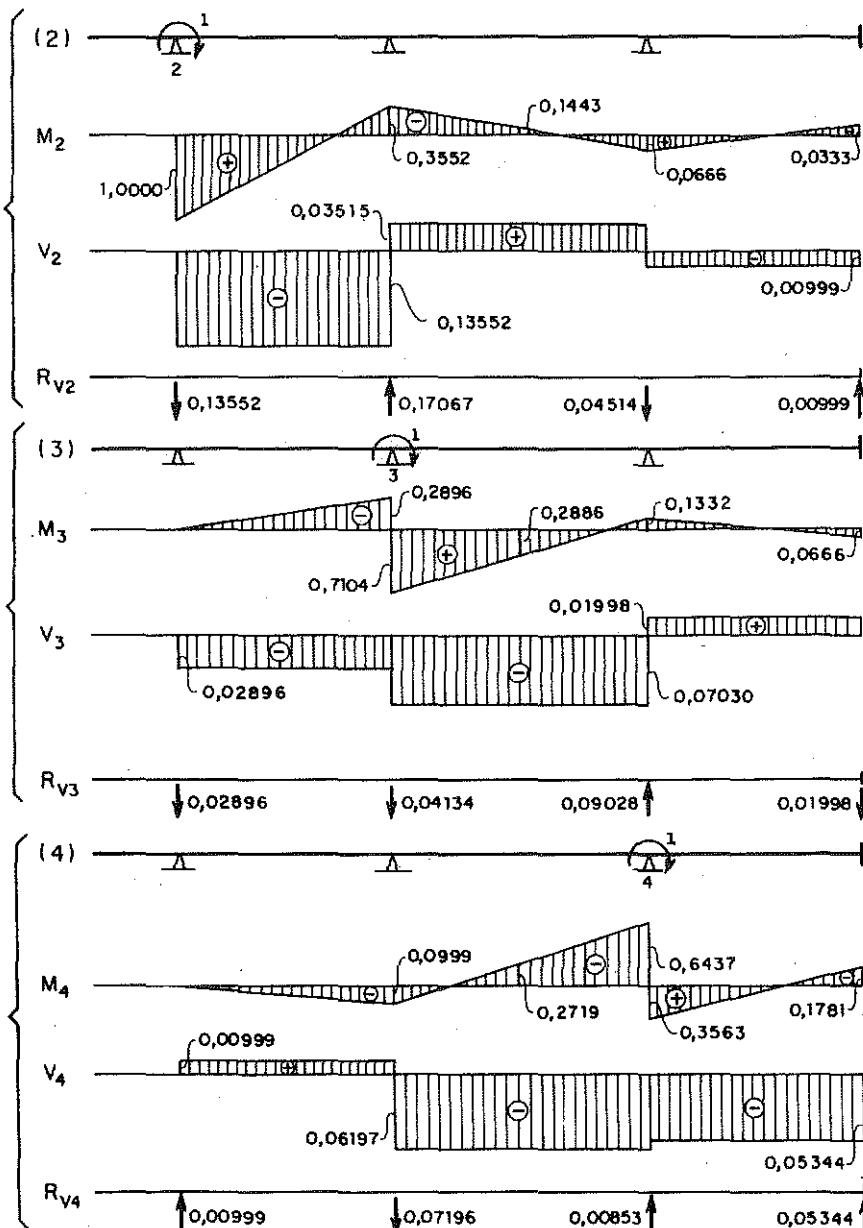


FIG. 6.4 – ESFORÇOS PARA MOMENTOS APLICADOS

Calcular ordenadas em quartos de vão e utilizar m como unidade de comprimento.

a) L.I. de M_α (> 0 tração embaixo)

tramo 1-2 (carga em 1-2; esforço em 3-4)

$$\eta(\xi) = -\mathfrak{M}_{21}'' \cdot 0,1443 = -0,5772 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{21}''}{\ell_{21}}$$

ξ	\mathfrak{M}_{21}''/ℓ	η
0	-1,000	0,5772
0,5	-0,500	0,2886
1,0	0	0

tramo 2-3 (carga em 2-3; esforço em 3-4)

$$\eta(\xi) = \mathfrak{M}_{32}' \cdot 0,2886 = 2,886 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{32}'}{\ell}$$

ξ	\mathfrak{M}_{32}'/ℓ	η
0	0	0
0,25	-0,1172	-0,3382
0,50	-0,1875	-0,5411
0,75	-0,1640	-0,4733
1,00	0	0

tramo 3-4 (carga em 3-4; esforço em 3-4)

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= \eta_0(\xi) + M_{34} \cdot 0,2886 - M_{43} \cdot 0,2719 = \\ &= \eta_0(\xi) + 3,4632 \cdot \frac{M_{34}}{\ell} - 3,2628 \cdot \frac{M_{43}}{\ell}\end{aligned}$$

$$\eta_0(\xi) = (1-0,5)\xi \cdot 12 - M_{34}(1-0,5) + M_{43} \cdot 0,5 \quad p/\xi \leq 0,5$$

$$\eta_0(\xi) = (1-\xi)0,5 \cdot 12 - M_{34}(1-0,5) + M_{43} \cdot 0,5 \quad p/\xi \geq 0,5$$

$$\eta(\xi) = 6\xi - 2,5368 \cdot \frac{M_{34}}{\ell} + 2,7372 \cdot \frac{M_{43}}{\ell} \quad p/\xi \leq 0,5$$

$$\eta(\xi) = 6(1-\xi) - 2,5368 \cdot \frac{M_{34}}{\ell} + 2,7372 \cdot \frac{M_{43}}{\ell} \quad p/\xi \geq 0,5$$

ξ	M_{34}/ℓ	M_{43}/ℓ	η
0	0	0	0
0,25	0,1406	-0,0469	1,0150
0,50	0,1250	-0,1250	2,3407
0,75	0,0469	-0,1406	0,9962
1,00	0	0	0

tramo 4-5 (carga em 4-5; esforço em 3-4)

$$\eta(\xi) = -M_{45} \cdot 0,2719 = -2,719 \cdot \frac{M_{45}}{\ell}$$

ξ	M_{45}	η
0	0	0
0,25	0,1406	-0,3823
0,50	0,1250	-0,3399
0,75	0,0469	-0,1275
1,00	0	0

Os resultados estão esquematizados na fig.6.5.

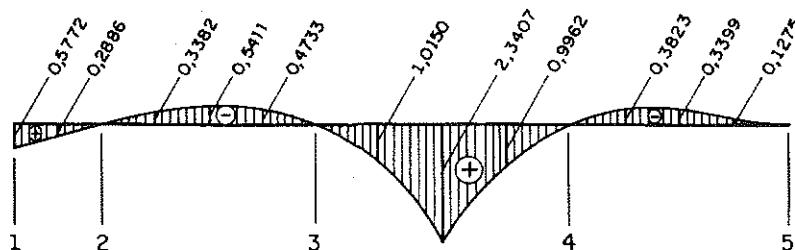


FIG. 6.5 - L.I. DE M_α (m)

b) L.I. de M_3 (> 0 tração embaixo)

tramo 1-2 (carga em 1-2; esforço em 3-2 ou 3-4)

$$\eta(\xi) = -M''_{21} \cdot 0,3552 = -1,4208 \cdot \frac{\ell}{\ell}$$

ξ	M''_{21} / ℓ	η
0	-1,000	1,4208
0,5	-0,500	0,7104
1,0	0	0

tramo 2-3 (carga em 2-3; esforço em 3-4)

$$\eta(\xi) = \mathfrak{M}_{32}' \cdot 0,7104 = 7,104 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{32}'}{\ell}$$

ξ	$\mathfrak{M}_{32}' / \ell$	η
0	0	0
0,25	-0,1172	-0,8326
0,50	-0,1875	-1,3320
0,75	-0,1640	-1,1651
1,00	0	0

tramo 3-4 (carga em 3-4; esforço em 3-2)

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= -\mathfrak{M}_{34} \cdot 0,2896 + \mathfrak{M}_{43} \cdot 0,0999 = \\ &= -3,4752 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{34}}{\ell} + 1,1988 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{43}}{\ell} \end{aligned}$$

ξ	\mathfrak{M}_{34} / ℓ	\mathfrak{M}_{43} / ℓ	η
0	0	0	0
0,25	0,1406	-0,0469	-0,5448
0,50	0,1250	-0,1250	-0,5843
0,75	0,0469	-0,1406	-0,3315
1,00	0	0	0

tramo 4-5 (carga em 4-5; esforço em 3-2 ou 3-4)

$$\eta(\xi) = \mathfrak{M}_{45} \cdot 0,0999 = 0,999 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{45}}{\ell}$$

ξ	\mathfrak{M}_{45}/ℓ	η
0	0	0
0,25	0,1406	0,1405
0,50	0,1250	0,1249
0,75	0,0469	0,0469
1,00	0	0

Os resultados estão esquematizados na fig.6.6.

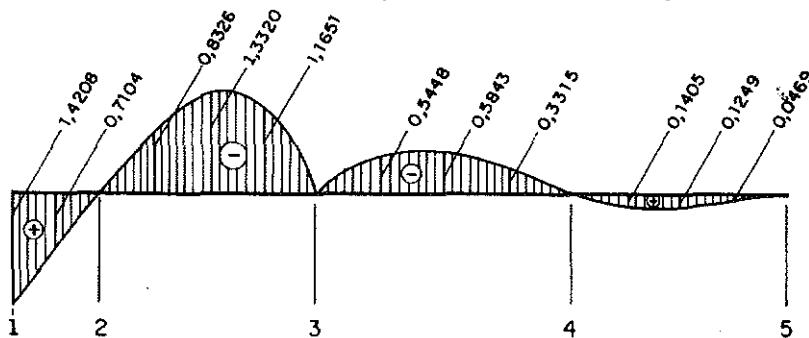


FIG.6.6 - L.I. DE M_3 (m)

c) L.I. de R_{y4} (> 0 se para cima)

tramo 1-2 (carga em 1-2; esforço em 3-4 ou 4-5)

$$\eta(\xi) = -\mathfrak{M}_{21}'' \cdot 0,04514 = -0,1806 \cdot \frac{\mathfrak{M}_{21}''}{\ell}$$

ξ	M''_{21}/ℓ	η
0	-1,000	0,1806
0,5	-0,500	0,0903
1,0	0	0

tramo 2-3 (carga em 2-3; esforço em 3-4 e 4-5)

$$\eta(\xi) = M'_{32} \cdot 0,09028 = 0,9028 \cdot \frac{M'_{32}}{\ell}$$

ξ	M'_{32}/ℓ	η
0	0	0
0,25	-0,1172	-0,1058
0,50	-0,1875	-0,1693
0,75	-0,1640	-0,1481
1,00	0	0

tramo 3-4 (carga em 3-4; esforço em 3-4)

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_0(\xi) + M_{34} \cdot 0,09028 + M_{43} \cdot 0,00853 = \\ &= \eta_0(\xi) + 1,0834 \cdot \frac{M_{34}}{\ell} + 0,1024 \cdot \frac{M_{43}}{\ell} \end{aligned}$$

$$\eta_0(\xi) = \xi - \frac{M_{34}}{\ell} - \frac{M_{43}}{\ell}$$

$$\eta(\xi) = \xi - 0,0834 \cdot \frac{M_{34}}{\ell} - 0,8976 \cdot \frac{M_{43}}{\ell}$$

ξ	M_{34}/ℓ	M_{43}/ℓ	η
0	0	0	0
0,25	0,1406	-0,0469	0,2804
0,50	0,1250	-0,1250	0,6018
0,75	0,0469	-0,1406	0,8723
1,00	0	0	1,0000

tramo 4-5 (carga em 4-5; esforço em 4-5)

$$\eta(\xi) = \eta_0(\xi) + M_{45} \cdot 0,00853 = \eta_0(\xi) + 0,0853 \cdot \frac{M_{45}}{\ell}$$

$$\eta_0(\xi) = 1 - \xi + \frac{M_{45}}{\ell} + \frac{M_{54}}{\ell}$$

$$\eta(\xi) = 1 - \xi + 1,0853 \cdot \frac{M_{45}}{\ell} + \frac{M_{54}}{\ell}$$

ξ	M_{45}/ℓ	M_{54}/ℓ	η
0	0	0	1,0000
0,25	0,1406	-0,0469	0,8557
0,50	0,1250	-0,1250	0,5107
0,75	0,0469	-0,1406	0,1603
1,00	0	0	0

Os resultados estão esquematizados na fig.6.7.

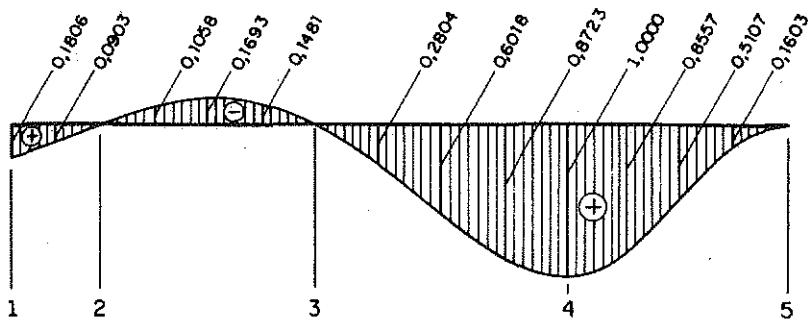
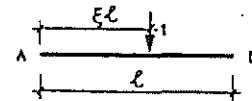


FIG. 6.7 - L.I. DE R_{v4}

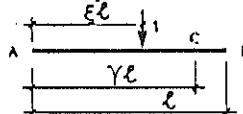
De maneira análoga, poderá ser traçada qualquer linha de influência de qualquer esforço. Obviamente, será interessante calcular as linhas de influência em série, aproveitando resultados.

TABELA 1 - LINHAS DE INFLUÊNCIA DE MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO
(CONVENÇÃO DE GRINTER)



ξ	$\frac{M_{AB}}{l}$	$\frac{M_{BA}}{l}$	$\frac{M'_{AB}}{l}$	$\frac{M'_{BA}}{l}$	$\frac{M''_{AB}}{l}$	$\frac{M''_{BA}}{l}$
	A B	A B	A B	A B	A B	A B
0,00	0	0	0	0	0	-1,000
0,05	+0,0451	-0,0024	+0,0463	-0,0249	+0,050	-0,950
0,10	+0,0810	-0,0090	+0,0855	-0,0495	+0,100	-0,900
0,15	+0,1084	-0,0191	+0,1179	-0,0733	+0,150	-0,850
0,20	+0,1280	-0,0320	+0,1440	-0,0960	+0,200	-0,800
0,25	+0,1406	-0,0469	+0,1640	-0,1172	+0,250	-0,750
0,30	+0,1470	-0,0630	+0,1785	-0,1366	+0,300	-0,700
0,35	+0,1478	-0,0796	+0,1877	-0,1535	+0,350	-0,650
0,40	+0,1440	-0,0960	+0,1920	-0,1680	+0,400	-0,600
0,45	+0,1361	-0,1114	+0,1918	-0,1794	-0,450	-0,550
0,50	+0,1250	-0,1250	+0,1875	-0,1875	+0,500	-0,500
0,55	+0,1114	-0,1361	+0,1794	-0,1918	+0,550	-0,450
0,60	+0,0960	-0,1440	+0,1680	-0,1920	+0,600	-0,400
0,65	+0,6796	-0,1478	+0,1536	-0,1877	+0,650	-0,350
0,70	+0,0630	-0,1470	+0,1365	-0,1785	+0,700	-0,300
0,75	+0,0469	-0,1406	+0,1172	-0,1640	+0,750	-0,250
0,80	+0,0320	-0,1280	+0,0960	-0,1440	+0,800	-0,200
0,85	+0,0191	-0,1084	+0,0733	-0,1179	+0,850	-0,150
0,90	+0,0090	-0,0810	+0,0495	-0,0855	+0,900	-0,100
0,95	+0,0024	-0,0451	+0,0249	-0,0463	+0,950	-0,050
1,00	0	0	0	0	1,000	0

TABELA 2 - LINHA DE INFLUÊNCIA DE UM ESFORÇO EM A, B OU C NUM TRAMO
(CONVENÇÕES USUAIS)



	$M_C = (1-\gamma)\xi\ell - M'_{AB} (1-\gamma) + M'_{BA} \gamma$ $M_C = (1-\xi)\gamma\ell - M'_{AB} (1-\gamma) + M'_{BA} \gamma$ $R_{VA} = 1 - \xi + M'_{AB} / \ell + M'_{BA} / \ell$	$V_C = -\xi + M'_{AB} / \ell + M'_{BA} / \ell$ $V_C = 1 - \xi + M'_{AB} / \ell + M'_{BA} / \ell$ $R_{VB} = \xi - M'_{AB} / \ell - M'_{BA} / \ell$	$\xi \leq \gamma$ $\xi \geq \gamma$ $-$
	$M_C = (1-\gamma)\xi\ell + M'_{BA} \gamma$ $M_C = (1-\xi)\gamma\ell + M'_{BA} \gamma$ $R_{VA} = 1 - \xi + M'_{BA} / \ell$	$V_C = -\xi + M'_{BA} / \ell$ $V_C = 1 - \xi + M'_{BA} / \ell$ $R_{VB} = \xi - M'_{BA} / \ell$	$\xi \leq \gamma$ $\xi \geq \gamma$ $-$
	$M_C = 0$ $M_C = (\gamma - \xi)\ell$ $R_{VA} = 1$	$V_C = 0$ $V_C = 1$ $-$	$\xi \leq \gamma$ $\xi \geq \gamma$ $-$
	$M_C = (\xi - \gamma)\ell$ $M_C = 0$ $-$	$V_C = -1$ $V_C = 0$ $R_{VB} = 1$	$\xi \leq \gamma$ $\xi \geq \gamma$ $-$