RT-MAE-9219

TEMPOS EXPONENCIAIS E APROXIMAÇÃO DO EQUILÍBRIO PARA UM PASSEIO ALEATÓRIO NO HIPERCUBO

by

Cláudia Peixoto

Palavras Chaves: passeio aleatório, equilíbrio, tempo de parada, convergência em distribuição, hipercubo de dimensão N.
(key words)

Classificação AMS: 60J15
(AMS Classification)

I. Introdução:

Neste trabalho estudaremos tempos de parada para um passeio aleatório homogêneo em H_N, um hipercubo de dimensão N, obtendo resultados assintóticos.

A cada instante o processo assumirá uma configuração que será uma seqüência de N elementos pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$. Teremos portanto 2^N configurações distintas que podem ser consideradas os vértices do hipercubo.

A evolução do processo dar-se-á em tempo discreto e pode ser descrita da seguinte maneira: a cada passo com probabilidade $\frac{1}{2}$ o passeio permanecerá no mesmo lugar e com probabilidade $\frac{1}{2}$ modificará um de seus elementos escolhido de maneira uniforme.

Em nosso primeiro teorema, exibiremos a escala de tempo em que dois passeios aleatórios acoplados se encontram quando N diverge. O mesmo teorema pode ser encontrado em [1], mas aqui, a demonstração está bastante simplificada.

O segundo teorema trata do instante do primeiro retorno a uma posição já visitada pelo passeio. Neste teorema caracterizaremos, com probabilidade 1, como será este primeiro retorno quando N diverge. Este resultado fará parte de um artigo de Castro,Cassandro e Galves.

O terceiro teorema trata do tempo de retorno a um conjunto fixado. Este tempo, devidamente normalizado, converge em lei a uma exponencial de parâmetro um quando N diverge. O que foi feito neste teorema generaliza um resultado de Bellman e Harris [3] , onde é tratado o tempo de retorno a uma única posição fixada. O artigo de Bellman e Harris estuda o modelo de Ehrenfest do qual o passeio aleatório no hipercubo é uma espécie de versão microscópica. A nossa demonstração aborda o problema de maneira análoga a de Cassandro, Galves, Olivieri e Vares em [2] juntamente com o segundo teorema.

Nosso quarto resultado refere-se ao instante de chegada do passeio a um conjunto aleatório $M \subset H_N$. Pontos em M serão chamados de pontos pretos.

Mostramos que o tempo necessário para o passeio alcançar M, normalizado pela densidade de pontos pretos, converge em lei a uma exponencial de parâmetro um quando N diverge.

O modelo descrito acima foi estudado por Cassandro, Galves e Picco em [1], o qual serviu de motivação geral para este trabalho. Nosso objetivo foi desenvolver e refinar alguns resultados que ali aparecem.

Na seqüência apresentaremos a descrição do modelo e enunciaremos os quatro principais resultados. Após essa seção seguirão as respectivas demonstrações .

II. Notação, Definições e Principais Resultados

Denotaremos por $H_N = \{-1,+1\}^N$ o conjunto de configurações com N spins ±1(hipercubo). Elementos de H_N serão representados por σ e ξ, ou seja, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_N)$ onde $\sigma_i \in \{+1,-1\}$, $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$.

Dado $j \in \{1,\ldots,N\}$ e $\sigma \in H_N$, a configuração obtida a partir de σ por uma troca de spin na posição j será dada por σ^j, isto é :

$$(\sigma^j)_i = \begin{cases} \sigma_i, & \text{se } i \neq j; \\ -\sigma_i, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Primeiramente definiremos o passeio aleatório homogêneo $\sigma(t)$ em H_N .

Tomaremos $\sigma(0) = \eta$, $\eta \in H_N$ a configuração inicial e consideraremos a seguinte evolução estocástica em H_N: dada a configuração $\sigma(t)$ no tempo t escolhemos um índice $i \in \{1,\ldots,N\}$ com probabilidade $\frac{1}{N}$ e tornaremos o spin σ_i $+1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Uma realização desta evolução estocástica pode ser obtida da seguinte maneira : introduzimos duas seqüências independentes de variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$ onde $t = 1,2,\ldots$. Estas são definidas em um novo espaço de probabilidade $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$.

As variáveis aleatórias $I(t)$ assumem valores no conjunto $\{1,\ldots,N\}$, são independentes e identicamente distribuídas e para qualquer $k \in \{1,\ldots,N\}$, $\mathbb{P}_N\{I(t) = k\} = \frac{1}{N}$.

As variáveis aleatórias $U(t)$ são independentes, identicamente distribuídas com distribuição uniforme em $[0,1]$, isto é , $\mathbb{P}_N(U(t) < u) = u$ para $\forall\ u \in [0,1]$.

Assim,

$$\sigma_i(t,\omega) = \begin{cases} \sigma_i(t-1,\omega) & \text{se } I(t,\omega) \neq i\ ; \\ +1 & \text{se } I(t,\omega) = i; \quad U(t,\omega) < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{se } I(t,\omega) = i; \quad U(t,\omega) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

O passeio aleatório homogêneo pode ser construído a partir de um outro passeio aleatório $\xi(t)$. Tomamos $\xi(0) = \eta, \eta \in H_N$ e definimos $\xi(t)$,$t \in \mathbb{N}$, como um passeio aleatório em H_N, definido no espaço de probabilidade $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ com probabilidade de transição dada por:

$$\mathbb{P}_0(\xi(k+1) = \eta^i | \xi(k) = \eta) = \frac{1}{N}, \text{ para todo } k \geq 0, i \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } \eta \in H_N.$$

Note que $\mathbb{P}_0(\xi(k+1) = \eta | \xi(k) = \eta) = 0$ e o processo $\xi(t)$ é periódico.

Introduziremos agora um meio aleatório em nosso espaço de configurações.

Seja M um subconjunto aleatório de H_N, definido no espaço de probabilidade $(\overline{\Omega}_N, \overline{\mathcal{F}}_N, \overline{\mathbb{P}}_N)$. Cada ponto do hipercubo pertencerá a M com probabilidade $\frac{1}{N^\gamma}, \gamma > 0$, independentemente dos outros pontos, ou seja, terá distribuição de Bernoulli.

Assim para qualquer $F \subset H_N$,

$$\overline{\mathbb{P}}(M \cap F = \emptyset) = (1 - \frac{1}{N^\gamma})^{|F|}.$$

onde $|F|$ é o cardinal de F.

A partir de agora, se nenhuma ambiguidade ocorrer, omitiremos os índices dos espaços de probabilidades.

Notação:

ξ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^-(0) = (-1, \ldots, -1)$.

ξ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^+(0) = (+1, \ldots, +1)$.

ξ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

σ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^-(0) = (-1, \ldots, -1)$.

σ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^+(0) = (+1, \ldots, +1)$.

σ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

$t_N^- = \inf(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t))$.

$t_N^{\eta,\zeta} = \inf(t > 0 : \sigma^\eta(t) = \sigma^\zeta(t))$.

$V[0, N^\gamma] = \{\sigma^+(0), \ldots, \sigma^+(N^\gamma)\}$.

Obs.: A diferença entre $\xi(t)$ e $\sigma(t)$ é que $\xi(t)$ salta a cada passo com probabilidade 1, enquanto que $\sigma(t)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de não saltar.

Resultados Principais

Considere dois passeios homogêneos $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ construídos simultaneamente com o auxílio das variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$.

O teorema I, a seguir, mostrará que o número de passos necessários para os dois passeios acima se encontrarem será da ordem de $N log N$ quando N diverge.

Este resultado, será muito utilizado em outras demonstrações.

Teorema I : Seja $t_N^- = \inf(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t))$. Então,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{t_N^-}{N log N} - 1\Big| > \delta\Big) = 0, \quad \forall\, \delta > 0.$$

O teorema II, a seguir, prova que o primeiro retorno do passeio $\xi(t)$ a uma posição já visitada será, com probabilidade 1, do tipo $\xi(j) \neq \xi(i)\ \forall i, j \leq k+1, \xi(k+2) = \xi(k)$ quando N diverge.

Teorema II : Sejam $S_N = \inf(k > 0 : \xi(k) \in \{\xi(0), \ldots, \xi(k-1)\})$ e
$\Gamma_1 = \inf(k > 0 : I(k) = I(k-1))$. Então,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(S_N = \Gamma_1) = 1.$$

O terceiro teorema trata do tempo que $\sigma^+(t)$ gasta para retornar a um conjunto fixado. Este tempo, convenientemente normalizado, tem lei exponencial de parâmetro 1 quando N diverge.

Teorema III : Sejam $R_N = \inf(k > N^\gamma : \sigma^+(k) \in V[0, N^\gamma])$ e
$\beta_N = \min(n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(R_N \geq n) \leq e^{-1})$.
Então, para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(R_N > \beta_N t) = e^{-t}$$

O próximo resultado refere-se ao tempo gasto, pelo passeio homogêneo $\xi(t)$, para alcançar um ponto do conjunto M.

Teorema IV : Seja $\Theta = \inf(t > 0 : \xi^\eta(t) \in M)$. Para $0 < \gamma < 1$ e $\delta > 0$ temos:

$$\lim_{N \to \infty} \overline{\mathbb{P}}\Big(|\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \delta\Big) = 0.$$

A demonstração do último teorema utilizará fortemente o fato de que as posições ocupadas pelo processo serão distintas a cada passo em um tempo da ordem de N^{γ} quando N diverge.

Os teoremas II e IV foram enunciados para o passeio $\xi(t)$, suas extensões para o passeio homogêneo $\sigma(t)$ são válidas .

Por convenção $N^{\gamma}t = [N^{\gamma}t]$ e $\lim_{N\to\infty} o(N) = 0$.

III. Resultados

Demonstração do Teorema I

A seguir verificaremos que dois passeios homogêneos acoplados com configurações iniciais tais que sua distância seja máxima, encontrar-se-ão em um tempo de ordem $N log N$ com probabilidade 1 quando N diverge.

Teorema I:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t_N^-}{N log N} = 1 \quad \text{em probabilidade.}$$

Demonstração :

Como mencionamos, $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ serão construídos usando o mesmo ω ?, isto é , a mesma escolha de índices $I(t,\omega)$ e a mesma escolha de $U(t,\omega)$ da seguinte maneira:

dados $\sigma^+(t)$, $\sigma^-(t)$ e $I(t+1) = i$ → i-ésimo vértice

já está acoplado ou vai acoplar ←

se $U(t+1) < \frac{1}{2}$ então $\sigma_i^+(t+1) = +1$, $\sigma_i^-(t+1) = +1$; → "acopla" um vértice

se $U(t+1) > \frac{1}{2}$ então $\sigma_i^+(t+1) = -1$, $\sigma_i^-(t+1) = -1$.

Chamo $D_N(n) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} | \sigma_i^+(n) - \sigma_i^-(n) |$, a distância no instante n entre os dois passeios .

Pela evolução de $\sigma(t)$ temos que $D_N(n)$ é uma Cadeia de Markov em $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, com probabilidade de transição dada por:

↓ o i-ésimo já era =

$$P(x,y) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } y = x; \\ x, & \text{se } y = x - \frac{1}{N}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

→ o i-ésimo era ≠

Primeiramente notamos que :

$$t_N^- = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \, ,$$

instante do acoplamento

onde $\lambda_1 = 1$ e λ_k para $k = 2, \ldots, N$ são variáveis aleatórias independentes, geométricas de parâmetro $p_k = 1 - \frac{(k-1)}{N}$.

O tempo λ_k é exatamente o número de passos que o processo $D_N(n)$ gasta para ir de $1 - \frac{k-1}{N}$ a $1 - \frac{k}{N}$.

Temos então que suas esperanças e variâncias valem respectivamente :

$E(\lambda_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{N}{N-k+1}$,

$V(\lambda_k) = \frac{q_k}{p_k{}^2} = \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}$.

Agora,

$E(t_N^-) = \sum_{k=1}^N E(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1} = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

Como $\int_1^N \frac{1}{x} = logN$, temos: → melhorar a aprox $\sum \frac{1}{i} = \log N + \frac{1}{2N} + C$

$$Nlog(N-1) \leq E(t_N^-) \leq N(1 + logN).$$

Assim para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|t_N^- - E(t_N^-)| > \epsilon\, E(t_N^-)\Big) \leq \frac{V(t_N^-)}{\epsilon^2 [E(t_N^-)]^2}$$

$$\leq \frac{N(N-1)[\frac{1}{(N-1)^2} + \ldots + 1]}{\epsilon^2\ N^2 log^2 N}$$

$$\leq \frac{N(N-1)[1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k^2-1)}]}{\epsilon^2\ N^2 log^2 N}$$

Passando ao limite quando N diverge temos que :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(|\frac{t_N^-}{E(t_N^-)} - 1| > \epsilon\Big) = 0.$$

■

Corolário I: Sejam σ^η e σ^ζ passeios homogêneos em H_N construídos simultaneamente, com configurações iniciais η, ζ. Suponha que $D_N(0) = \frac{\lfloor Nf \rfloor}{N}$, onde $0 \leq f \leq 1$. Então,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) = 0,$$

para qualquer $t(N)$ que satisfaça $\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{NlogN} = \infty$.

Demonstração: Primeiro notamos que:

$t_N^- = \inf(t > 0 : \{I(1), \ldots, I(t)\} = \{1, \ldots, N\})$.

Assim,

$$\mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) \leq \mathbb{P}(t_N^- > t(N)) \leq \frac{N(\log N + 1)}{t(N)}.$$

Portanto por hipótese temos que:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) = 0.$$

■

Note que o limite acima é uniforme, ou seja, independe das configurações η e ζ.

Corolário II: Seja $t(N)$ tal que $\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{N\log N} = \infty$. Então,

$$\lim_{N\to\infty} \left| \mathbb{P}\Big(\sigma^+(t(N)) = \zeta\Big) - \frac{1}{2^N} \right| = 0,$$

onde $\zeta \in H_N$.

Demonstração:

Seja $\nu(\eta) = \frac{1}{2^N}$ a medida uniforme em H_N. Esta medida é invariante com respeito à evolução do passeio homogêneo, ou seja,

$$\nu(\zeta) = \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta)\mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta\Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \frac{1}{2^N}\right| &= \left|\mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta)\mathbb{P}(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta)\right| \\
&\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta)\left|\mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \mathbb{P}(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta)\right| \\
&\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) \neq \sigma^\eta(t(N)))
\end{aligned}$$

Passando ao limite em N e utilizando o corolário I a expressão acima vai a zero e portanto temos o resultado.

■

O teorema I e seus corolários fornecem o tempo que o processo gasta até alcançar o equilíbrio, ou seja, a medida invariante. Este resultado será muito utilizado para simplificar outras demonstrações.

Demonstração do Teorema II

Considere os seguintes eventos:

$$J_1 = \Big\{(i_1, i_2) \in \{1, \ldots, N\}^2 : i_1 = i_2\Big\}$$

$$J_l = \Big\{(i_1, \ldots, i_{2l}) \in \{1, \ldots, N\}^{2l} : \sum_{k=1}^{2l} \mathbf{1}_{\{i=i_k\}} \in \{0, 2, \ldots, 2l\}\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$
$$\text{e}\ \ \big(i_k, \ldots, i_{k+2m-1}\big) \notin J_m,\ \forall m \in \{1, \ldots, l-1\},\ k \geq 1\ \ \text{e}\ \ k + 2m - 1 \leq 2l.\Big\}$$

Note que J_l caracteriza os possíveis tipos de retorno, ou seja, $2l$ é o número de passos para se dar um retorno.

Lema I: Para $l \geq 3$ temos:

1º retorno em 2l ser do tipo J_l

$$I\!P\Big(\{I(1), \ldots, I(2l)\} \in J_l\Big) \leq \frac{8}{N^3}.$$

Demontração:

$$I\!P\Big(\{I(1), \ldots, I(2l)\} \in J_l\Big) = \frac{|J_l|}{N^{2l}}.$$

Primeiramente notamos que $|J_l| \leq 2N^{2l-2}$ pois nas duas últimas posições os índices estão fixados a menos de uma permutação.

Agora dividiremos o conjunto J_l em dois conjuntos disjuntos: aqueles em que as três últimas posições são ocupadas por índices distintos entre si e aqueles em que nas três últimas posições aparecem apenas dois índices distintos entre si.

Denotaremos esses conjuntos por J_l' e J_l'' respectivamente.

Temos então que: $\ |J_l| = |J_l'| + |J_l''|$.

Note que:

a) $|J_l'| \leq 3!\ N^{2l-3}$, pois as três últimas posições devem estar fixadas, a menos de uma permutação, para que ocorra retorno.

b) $|J_l''| \ \leq N\ |J_{l-1}|$, pois eliminando o par que aparece nas três últimas posições temos exatamente um retorno do tipo J_{l-1}; além disso, o algarismo repetido pode assumir no máximo N valores.

Portanto,

$$\frac{|J_l|}{N^{2l}} \leq \frac{3!\ N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N\ |J_{l-1}|}{N^{2l}}$$
$$\leq \frac{3!\ N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N\ 2N^{2l-4}}{N^{2l}} \leq \frac{8}{N^3}.$$

■

Introduziremos agora as seguintes variáveis aleatórias:

$S_N = \inf(k \geq 2 : \xi(k) \in V[0, k-1])$, onde $V[0, k-1] = \{\xi(0), \ldots, \xi(k-1)\}$;

$\Gamma_1 = \inf(k \geq 2 : I(k) = I(k-1))$, → 1º ciclo de tamanho 1

$\Gamma_l = \inf(k \geq 2l : (I(k-2l+1), \ldots, I(k)) \in J_l)$. → 1º ciclo de tamanho l

5ª **Lema II :** Para $l \geq 3$ temos:

$$\mathbb{P}(\Gamma_l \leq n) \leq n\ \frac{8}{N^3}.$$

Demonstração:

$$\mathbb{P}(\Gamma_l \leq n) = \sum_{k=2l}^{n} \mathbb{P}(\Gamma_l = k)$$
$$\leq \sum_{k=2l}^{n} \mathbb{P}\Big((I(k-2l+1), \ldots, I(k)) \in J_l\Big)$$
$$= (n-2l)\mathbb{P}\Big((I(1), \ldots, I(2l)) \in J_l\Big)$$

Portanto, utilizando o resultado do lema I temos:

$$\mathbb{P}\Big(\Gamma_l \leq n\Big) \leq \frac{8n}{N^3}.$$

O teorema II a seguir, afirmará com probabilidade 1, que o primeiro retorno do processo a uma configuração já visitada será aquele realizado em dois passos.

Teorema II: Para S_N e Γ_1 como definidos anteriormente temos,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(S_N = \Gamma_1\Big) = 1.$$

Demonstração: Inicialmente observamos que $S_N = \min_{l \geq 1} \Gamma_l$.

Para provarmos este teorema é suficiente mostrar que:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\Gamma_1 < N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2} \geq l \geq 2} \Gamma_l) = 1, \quad \text{para algum } \delta > 0.$$

$N^1 \cdot N^\delta$

Primeiro notamos que :

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\Gamma_1 < N^{1+\delta}) &= \lim_{N\to\infty} 1 - \mathbb{P}(\Gamma_1 > N^{1+\delta}) \\ &= \lim_{N\to\infty} 1 - (1 - \frac{1}{N})^{N^{1+\delta}} = 1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P}(N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2} \geq l \geq 2} \Gamma_l) \geq 1 - \frac{2N^{1+\delta}}{N^2} - \sum_{l \geq 3}^{\frac{N^{1+\delta}}{2}} \frac{8N^{1+\delta}}{N^3}.$$

Se tomarmos $0 < \delta < \frac{1}{2}$ a última expressão vai a 1 quando N diverge. Isto conclui a demonstração do teorema.

■

O próximo corolário verificará que não haverá retornos até um instante da ordem de N^γ.

Corolário III: Para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(|\{\xi(0), \ldots, \xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\Big) = 1.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(|\{\xi(0), \ldots, \xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\Big) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(S_N > N^\gamma t\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Gamma_1 > N^\gamma t\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{N^\gamma t} = 1. \end{aligned}$$

■

Corolário IV: A variável aleatória $N^{-1} S_N$ converge em lei para a distribuição exponencial de parâmetro 1 .

Demonstração: Basta provarmos que para qualquer $t > 0$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(S_N > tN) = e^{-t}.$$

Agora,

$$\left|\mathbb{P}\Big(S_N > tN\Big) - \mathbb{P}\Big(\Gamma_1 > tN\Big)\right| \leq \mathbb{P}\Big(\Gamma_1 \neq S_N\Big).$$

Pelo teorema II, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Gamma_1 \neq S_N\Big) = 0.$

Por outro lado,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Gamma_1 > tN\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{Nt} = e^{-t}.$$

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(S_N > tN\Big) = e^{-t}.$$

■

III.3 Demonstração do Teorema III

Obteremos agora resultados sobre o tempo de retorno do processo $\sigma^+(t)$ ao conjunto $V[0, N^\gamma]$. A partir de agora $V[0, N^\gamma]$ será denotado por F.

Considere

$$R_N = \inf\Big(t > N^\gamma : \sigma^+(t) \in F\Big), \quad \text{e}$$

$$R_N^\eta = \inf\Big(t > 0 : \sigma^\eta(t) \in F\Big).$$

Proposição I : Para $0 < \gamma < 1$ e $0 < \delta < \frac{1}{2}$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(R_N > N^{1+\delta}\Big) = 1.$$

Demonstração:

Do teorema II temos que:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\min_{l\geq 2} \Gamma_l < N^{1+\delta}) = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(R_N \leq N^{1+\delta}) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\sigma^+(N^\gamma + 1) = \sigma^+(N^\gamma)) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{N^\gamma}{N}.\end{aligned}$$

Como por hipótese $0 < \gamma < 1$ o limite acima é zero.

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(R_N > N^{1+\delta}\Big) = 1.$$

■

Proposição II : Seja F um conjunto fixado de cardinal $N^{\gamma}, 0 < \gamma < 1$. Para δ tal que $\gamma + \delta < 1$, $\forall\, \eta \notin F$ fixado temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N^{\eta} > N^{1+\delta}\big) = 1.$$

Demonstração: Basta demonstrarmos para o processo ξ^{η} . Primeiramente mostraremos que para uma configuração fixada em F, o processo ξ^{η} gastará um tempo maior que $N^{1+\delta}$ para encontrá-la quando N diverge.

Fixe $\zeta \in F$. Defina $d(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \mid \xi_i^{\eta}(n) - \zeta_i \mid$ a distância do passeio ξ^{η} a ζ no instante n. Por hipótese, $d(0) \geq 1$ pois $\eta \notin F$.

Observe que $d(n)$ evolue como o modelo de Ehrenfest; ou seja, uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$I\!P_{i,j} = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & \text{se } j = i+1; \\ \frac{i}{N}, & \text{se } j = i-1. \end{cases}$$

Sejam

$n_1 = \inf(n > 1 : d(n) = 2)$,

$n_2 = \inf(n > n_1 : d(n) = 2)$, e assim sucessivamente.

A cada retorno ao ponto "2", a probabilidade de em seguida visitar o ponto "0" antes de voltar ao "2" é $\frac{2}{N^2}$.

Seja $K = \inf(k \geq 1 : d(n_k + 2) = 0)$, então o tempo para ξ^{η} alcançar ζ é maior ou igual a K.

Mas,

$$
\begin{aligned}
I\!\!P(K > t) &= \sum_{j=1}^{\infty} I\!\!P(K = t + j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} I\!\!P(d(n_1+2) \neq 0, \ldots, d(n_{t+j-1}+2) \neq 0, d(n_{t+j}+2) = 0) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{N^2})^{t+j-1} \frac{2}{N^2} = (1 - \frac{2}{N^2})^t.
\end{aligned}
$$

Note que para $t = N^{1+\delta}$ o limite acima vai a zero quando N diverge.

Agora terminaremos a demonstração observando que:

$$
\begin{aligned}
&I\!\!P(\xi^\eta(u) \in F, \ \text{para algum} \ u \leq N^{1+\delta}) = \\
&\qquad \leq \sum_{\zeta \in F} I\!\!P(d(u) = 0, \ \text{para algum} \ u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = d(\zeta, \eta)) \\
&\qquad \leq N^\gamma I\!\!P(d(u) = 0, \ \text{para algum} \ u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = 1) \\
&\qquad \leq N^\gamma \Big(1 - (1 - \frac{2}{N^2})^{N^{1+\delta}}\Big) \\
&\qquad = N^\gamma \Big(1 - exp\{N^{1+\delta} log(1 - \frac{2}{N^2})\}\Big) \\
&\qquad = N^\gamma \Big(1 - exp\{N^{1+\delta}[-(\frac{2}{N^2} + \frac{4}{2N^4} + \ldots)]\}\Big) \\
&\qquad = N^\gamma \Big(1 - exp\{-2N^{\delta-1} - 2N^{\delta-3} - \frac{8}{3}N^{\delta-5} - \ldots\}\Big) \\
&\qquad = N^\gamma \Big(1 - [1 - 2N^{\delta-1} + 2N^{2\delta-2} - \frac{8}{6}N^{3\delta-3} + 4N^{4\delta-4} - \ldots]\Big) + o(N) \\
&\qquad = N^\gamma 2N^{\delta-1} + o(N).
\end{aligned}
$$

Portanto passando ao limite e utilizando a hipótese $\gamma + \delta < 1$ temos o resultado.

$\blacksquare$

Proposição III : Para $0 < \gamma < 1$ e qualquer $t(N) > N^{1+\delta}$ tal que $\lim_{N \to \infty} \frac{t(N) N^\gamma}{2^N} = 0$ temos :

$$
\lim_{N \to \infty} I\!\!P\Big(R_N > t(N) \Big) = 1.
$$

Demonstração : Para algum $0 < \delta < 1$ temos:

$$\begin{aligned}
I\!P\Big(R_N \leq t(N)\Big) &= I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } t \leq t(N)\Big) \\
&\leq I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } t \leq N^{1+\delta}\Big) + \\
&+ I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)\Big) \\
&= I\!P\Big(R_N < N^{1+\delta}\Big) + I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)\Big).
\end{aligned}$$

Como pela proposição I $\lim_{N \to \infty} I\!P\Big(R_N \leq N^{1+\delta}\Big) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
I\!P\Big(R_N \leq t(N)\Big) &\leq o(N) + I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)\Big) \\
&= o(N) + I\!P(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t < t(N)) - \\
&- \sum_{\eta \in H_N} I\!P(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) + \\
&+ \sum_{\eta \in H_N} I\!P(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) \\
&\leq o(N) + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \Big| I\!P(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) - \\
&- I\!P(\sigma^\eta(t) \in F, \text{para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) \Big| + \\
&+ \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) \\
&\leq o(N) + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})) + \\
&+ \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{u = N^{1+\delta}}^{t(N)} I\!P(\sigma^\eta(u) \in F) \\
&\leq o(N) + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})) + \\
&+ \frac{(N^\gamma + 1) t(N)}{2^N}
\end{aligned}$$

Passando ao limite em N , utilizando o corolário I e a hipótese, temos que a probabilidade acima vai a zero para algum $0 < \delta < 1$.

Portanto,

$$\lim_{N \to \infty} I\!P\Big(R_N > t(N)\Big) = 1.$$

∎

Lema III: Considere $\beta_N = \min(n \in I\!N : I\!P(R_N \geq n) \leq e^{-1})$ e $0 < \gamma < 1$. Então ,

$$\lim_{N\to\infty} I\!P(R_N \geq \beta_N) = e^{-1}.$$

Demonstração:

Pela definição de β_N temos que:

$$I\!P(R_N \geq \beta_N) \leq e^{-1} < I\!P(R_N \geq \beta_N - 1)$$

Como,

$$0 \leq I\!P(R_N \geq \beta_N - 1) - I\!P(R_N \geq \beta_N) \leq I\!P(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N) \ ;$$

concluiremos a demonstração utilizando a propriedade de Markov.

$$\begin{aligned}
I\!P(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N) &= I\!P(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N \mid \sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) \times \\
&\times I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) \\
&= I\!P(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F)\ I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) \\
&= I\!P(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F)\ \Big[I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \\
&- \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F) + \\
&+ \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F)\Big] \\
&= I\!P(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F)\Big[I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \\
&- \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F\Big] + \\
&+ \frac{2^N - |F|}{2^N} I\!P(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \\
&\leq I\!P(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta)\Big[I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \\
&- I\!P(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F)\Big] + \frac{2^N - |F|}{2^N}\frac{N^\gamma}{N} \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P(\sigma^+(\beta_N - 1) \neq \sigma^\eta(\beta_N - 1)) + \frac{2^N - |F|}{2^N}\frac{N^\gamma}{N}\ .
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando N diverge temos que o primeiro termo vai a zero pelo corolário I e o segundo vai a zero pelo corolário III e pela hipótese.

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) = e^{-1}.$$

■

Lema IV: Existe um número real α satisfazendo $e^{-1} \leq \alpha < 1$ tal que para N suficientemente grande e qualquer inteiro n temos:

$$\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n) \leq \alpha^n.$$

Demonstração: A verificação do resultado será feita por indução.

Para $n = 1$ o resultado é direto pois por definição

$\beta_N = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) \leq e^{-1}\}$.

Assumiremos agora que a desigualdade vale para o inteiro n. Provaremos para $n+1$ usando a propriedade de Markov.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N(n+1)) = \sum_{\eta\notin F} & \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n, \sigma(\beta_N n) = \eta)\times \\ & \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta) \\ & \leq \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n) \sup_{\eta\notin F} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta) \\ & \leq \alpha^n \sup_{\eta\notin F} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta)\end{aligned}$$

Agora pelas proposições I e II temos que para N suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{P}(R_N^\eta \geq \beta_N) - \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N)\big| = & \\ & \big|\mathbb{P}(R_N^\eta \geq \beta_N, \sigma^\eta(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta}) - \\ & - \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N, \sigma^+(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta})\big| \\ & \leq up_\eta \mathbb{P}(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta}))\end{aligned}$$

Pelo corolario I temos que a probabilidade acima converge a zero quando N diverge.

Assim, para N suficientemente grande temos:

$$\mathbb{P}(R_N > \beta_N(n+1)) \leq \alpha^n e^{-1} \leq \alpha^{n+1}.$$

■

Teorema III: Para $0 < \gamma < 1$ temos que:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{R_N}{\beta_N} > t\Big) = e^{-t}.$$

Demonstração: Para verificarmos que R_N normalizado por β_N tem lei exponencial de parâmetro 1 quando N diverge basta provarmos que :

$$\lim_{N\to\infty} \Big|\mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N(t+s)\Big) - \mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N t\Big)\ \mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N s\Big)\Big| = 0,$$

para qualquer s, t fixados.

obs.: **1)** O item acima garante que se a lei de $\frac{R_N}{\beta_N}$ converge quando $N \to \infty$, o limite precisa ser uma lei exponencial (talvez degenerada). Por outro lado, o lema III juntamente com este item implicam que se t é um número racional positivo, então o limite

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N t)$$

existe e é igual a e^{-t}. Como a lei exponencial é contínua, isto é suficiente para provar a convergência para todo t real, o que conclui a prova.

2) Esta técnica foi utilizada em [2] para a demonstração de outro resultado podendo servir como referência.

Primeiramente vamos mostrar o resultado para uma configuração inicial escolhida uniformemente em H_N .

Observe os seguintes fatos:

Fato 1:

$$\Big| \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(R_N^\eta > \beta_N(t+s)\Big)$$
$$- \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(u) \notin F,$$
$$\forall u \in \{1,\ldots,\beta_N t\} \cup \{\beta_N t + N^{1+\delta},\ldots,\beta_N(t+s)\}\Big)\Big|$$
$$\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(u) \in F,$$
$$\text{para algum } u \in \{\beta_N t+1,\ldots,\beta_N t + N^{1+\delta}\}\Big)$$
$$\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=\beta_N t}^{\beta_N t+N^{1+\delta}} \sum_{\zeta\in F} \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(u) = \zeta\Big)$$
$$\leq \frac{N^{1+\delta}(N^\gamma+1)}{2^N}$$

Assim a probabilidade acima vai a zero quando N diverge.

Fato 2:

$$\Big| \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(R_N^\eta > \beta_N s\Big)$$
$$- \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta},\ldots,\beta_N s\}\Big)\Big|$$
$$\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta(u) \in F, \text{para algum } u \in \{1,\ldots,N^{1+\delta}\}\Big)$$
$$\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=1}^{N^{1+\delta}} \sum_{\zeta\in F} \mathbb{P}\Big(\sigma^\eta = \zeta\Big)$$
$$\leq \frac{N^{1+\delta}(N^\gamma+1)}{2^N}$$

Novamente, quando N diverge a probabilidade acima vai a zero.

Fato 3: Considere a seguinte expressão:

$$\Big| \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(R_N^\eta > \beta_N(t+s)\Big)$$
$$- \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big) \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\Big(R_N^\eta > \beta_N s\Big)\Big|$$

Agora utilizando a propriedade de Markov, os fatos 1 e 2 a expressão acima é limitada por:

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{\eta\in H_N}\sum_{\kappa\notin F} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t, \sigma^\eta(\beta_N t) = \kappa\Big) \\
&\times \Big[I\!P\Big(\sigma^\kappa(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\}\Big) \\
&- I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\}\Big)\Big]\Big| \\
&\leq \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sum_{\kappa\notin F} \sup_{\kappa\in H_N} I\!P\Big(\sigma^\kappa(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, passando ao limite quando N diverge e utilizando o teorema I temos que a expressão acima vai a zero.

Resta-nos mostrar agora que:

$$
\lim_{N\to\infty} \Big| I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big)\Big| = 0.
$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
&\Big| I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big)\Big| \\
&\leq I\!P\Big(R_N < N^{1+\delta}\Big).
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
&\Big| I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big)\Big| \\
&\leq I\!P\Big(R_N^\eta < N^{1+\delta}\Big).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\Big| I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big)\Big| \\
&\leq \Big| I\!P\Big(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big) \\
&- I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big) + o(N)\Big| \\
&\leq \sup_{\eta\in H_N} I\!P\Big(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})\Big) + o(N).
\end{aligned}
$$

Agora passando ao limite quando N diverge e utilizando o teorema I temos o resultado.

■

Proposição IV : ("Lema da Reflexão")

Para u, s fixados temos:

$$\mathbb{P}\Big(V[0,s] \cap V[s+1, s+u] = \emptyset\Big) = \mathbb{P}\Big(V[0,u-1] \cap V[u, u+s] = \emptyset\Big).$$

Demonstração :

Seja $\mathcal{C}$ a classe de conjuntos tal que:

$$\mathcal{C} = \Big\{(i_1, \ldots, i_{2c}); c = 1, 2, \ldots : \sum_{k=1}^{2c} 1_{\{i=i_k\}} \text{ é par para todo } i \in \{1, \ldots, N\}\Big\}.$$

Note que se $\sigma(k) = \eta^{i_1 \ldots i_k} = \eta$ então $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{C}$.

Primeiramente notamos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(V[0,s] \cap V[s+1, s+u] = \emptyset\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\Big(\eta \notin V[s+1, s+u], \ldots, \sigma(s) \notin V[s+1, s+u]\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\Big((i_1, \ldots, i_{m_1}) \notin \mathcal{C}, \text{ para } s+1 \leq m_1 \leq s+u, \ldots, \\
&\qquad \ldots \quad (i_s, \ldots, i_{m_s}) \notin \mathcal{C}, \text{ para } s+1 \leq m_s \leq s+u\Big)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(V[0,u-1] \cap V[u, u+s] = \emptyset\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\Big(\sigma(u) \notin V[0, u-1], \ldots, \sigma(u+s) \notin V[0, u-1]\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\Big((i_{m_1}, \ldots, i_u) \notin \mathcal{C}, \text{ para } 1 \leq m_1 \leq u-1, \ldots, \\
&\qquad \ldots (i_{m_s}, \ldots, i_{u+s}) \notin \mathcal{C} \text{ para } 1 \leq m_s \leq u-1\Big)
\end{aligned}$$

Portanto temos a igualdade das probabilidades.

■

Corolário V : Para qualquer $a > 1$ temos que:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\Big(V[0, N^a] \cap V[N^a + 1, N^a + N^7 + 1] \neq \emptyset\Big) = 0.$$

Demonstração :

Utilizando a proposição IV temos que:

$$\mathbb{P}\Big(V[0,N^a]\cap V[N^a+1,N^a+N^\gamma+1]=\emptyset\Big)$$
$$=\mathbb{P}\Big(V[0,N^\gamma]\cap V[N^\gamma+1,N^a+N^\gamma+1]=\emptyset\Big)$$
$$=\mathbb{P}\Big(R_N>N^a+N^\gamma+1\Big).$$

Passando ao limite e utilizando a proposição III temos:

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big(V[0,N^a]\cap V[N^a+1,N^a+N^\gamma+1]\neq\emptyset\Big)=0.$$

■

III.4 Demonstração do teorema IV

Seja $\Theta=\inf\Big(t>0;\xi^\eta(t)\in M\Big)$; ou seja, o tempo que o processo $\xi^\eta(t)$ leva para alcançar o conjunto M.

Proposição V : Para $0<\gamma<1$, temos:

$$\lim_{N\to\infty}\overline{E}(\ \mathbb{P}(\Theta>N^\gamma t\ )\ )\ =\ e^{-t}.$$

Demonstração : Notamos primeiro que para $\overline{\omega}\in\overline{\Omega}$ fixado :

$$\mathbb{P}\Big(\Theta>N^\gamma t\Big)=\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\frac{1}{N}\sum_{i_1=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1}\notin M\}}\cdots\frac{1}{N}\sum_{i_{N^\gamma t}=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}}.$$

Denotaremos por

$$F_1(N)=\{(i_1,\ldots,i_{N^\gamma t})\in\{1,\ldots,N\}^{N^\gamma t},\forall\, l=1,\ldots,N^\gamma t,\eta^{i_1\cdots i_l}\notin\{\eta,\eta^{i_1},\ldots,\eta^{i_1\cdots i_{l-1}}\}\};$$

e por $F_2(N)=\{1,\ldots,N\}^{N^\gamma t}\backslash F_1(N)$.

Seja $i'=(i_1,\ldots,i_{N^\gamma t})$ então,

$$\begin{aligned}\overline{E}\Big(\mathbb{P}(\Theta>N^\gamma t)\Big)&=\frac{1}{N^{N^\gamma t}}\sum_{i'\in F_1(N)}\overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\cdots\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}})\\&+\frac{1}{N^{N^\gamma t}}\sum_{i'\in F_2(N)}\overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\cdots\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}})\\&=\frac{|F_1(N)|}{N^{N^\gamma t}}(1-\frac{1}{N^\gamma})^{N^\gamma t+1}\\&+\frac{1}{N^{N^\gamma t}}\sum_{i'\in F_2(N)}\overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\cdots\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}})\end{aligned}$$

Pelo corolário III,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|F_1(N)|}{N^{N^\gamma t}} = 1, \quad \text{e}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|F_2(N)|}{N^{N^\gamma t}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \overline{E}\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{N^\gamma t}\Big)^{N^\gamma t+1} = e^{-t}.$$

■

Teorema IV : Para $0 < \gamma < 1$, e $\epsilon > 0$, temos :

$$\lim_{N\to\infty} \overline{I\!P}\Big(\,|I\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon\Big) = 0\ .$$

Demonstração :

Utilizando a desigualdade clássica de Tchebyshev temos :

$$\begin{aligned}\overline{I\!P}\Big(|I\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon\Big) &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\,\overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}\Big)^2\Big] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\Big[\,\overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big] \\ &\quad - 2e^{-t}\overline{E}\Big(\,I\!P(\Theta > N^\gamma t)\,\Big) + \overline{E}(e^{-t})^2\Big] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\Big[\,\overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\,\Big)^2\Big] \\ &\quad - 2e^{-t}\overline{E}\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\,\Big) + e^{-2t}\Big]\end{aligned}$$

Resta-nos calcular $\overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big]$.

Para $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ fixado,

$$\begin{aligned}I\!P\big[(\Theta > N^\gamma t)^2\big] = &\Big\{1_{\{\eta\notin M\}}\frac{1}{N}\sum_{i_1=1}^{N} 1_{\{\eta^{i_1}\notin M\}}\cdots\frac{1}{N}\sum_{i_{N^\gamma t}=1}^{N} 1_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}}\Big\}\times \\ &\times\Big\{1_{\{\eta\notin M\}}\frac{1}{N}\sum_{i_1^*=1}^{N} 1_{\{\eta^{i_1^*}\notin M\}}\cdots\frac{1}{N}\sum_{i_{N^\gamma t}^*=1}^{N} 1_{\{\eta^{i_1^*\cdots i_{N^\gamma t}^*}\notin M\}}\Big\}\end{aligned}$$

Agora considere $G^* = \{\eta^{i_1^*}, \ldots, \eta^{i_1^*\cdots i_{N^\gamma t}^*}\}$. Pelo corolário III,

$$\lim_{N\to\infty} |G^*| - N^\gamma t = 0.$$

Por outro lado, fixado $(i_1^*, \ldots, i_{N^\gamma t}^*)$ temos pelo teorema III que:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\{\eta, \ldots, \eta^{i_1 \ldots i_{N^\gamma t}}\} \cap \{\eta^{i_1^*}, \ldots, \eta^{i_1^* \ldots i_{N^\gamma t}^*}\} \neq \emptyset\Big) = 0.$$

Assim,

$$\overline{E}[I\!P(\Theta > N^\gamma t)^2] = (1 - \frac{1}{N^\gamma})(1 - \frac{1}{N^\gamma})^{2|G^*|} + o(N).$$

Passando ao limite em N temos que :

$$\lim_{N\to\infty} \overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big] = e^{-2t}.$$

Portanto, com o resultado da proposição V :

$$\lim_{N\to\infty} \overline{I\!P} \; [\; |I\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon \;] \; = \; 0.$$

■

IV. BIBLIOGRAFIA

[1] M.Cassandro; A.Galves, P.Picco. " *Dynamical Phase Transition in Disordered Systems: the study of a random walk model* " , Annales de L Institut Henri Poincaré. **55-2**,689 (1991).

[2] M.Cassandro,A.Galves,E.Olivieri,M.E.Vares. " *Metastable behavior of stochastic dynamics: a pathwise approach* ", J. Stat. Phys. **35**,603 (1984).

[3] R.Bellman,T.H.E.Harris. Pac. J. Math. **1**.179 (1951).

[4] F.Spitzer *Principles of Random Walk*,(1964, Princeton, Van Nostrand).

[5] W. Feller *An Introdution to Probability Theory and its Applications*, (vol.I,1950, N.Y. John Wiley).

ULTIMOS RELATORIOS TECNICOS PUBLICADOS

1992

9201 - BOLFARINE, H., NASCIMENTO, J.A. & RODRIGUES, J. Comparing Several Regression Models with Measurement Errors. A Bayesian Approach, 16p.

9202 - BOLFARINE, H. & SANDOVAL, M.C. Empirical Bayesian Prediction in the Location Error in Variables Superpopulation Model, 26p.

9203 - BUSSAB, W.O. & BARROSO, L.P. Painel Multivariado - Análise Através do Modelo de Componentes de Variância, 07p.

9204 - LEITE, J.G. & PEREIRA, C.A.B. Urn Scheme to Obtain Properties of Stirling Numbers of Second Kind, 09p.

9205 - BELITSKY, V. A Stochastic Model of Deposition Processes with Nucleation, 21p.

9206 - BOLFARINE, H. & NASCIMENTO, J.A. Bartlett Correction Factors for the Structural Regression Model with Known Reliability Ratio, 11p.

9207 - FERRARI, P.A. Growth Processes on a Strip, 23p.

9208 - FERRARI, P.A., GALVÈS, J.A. & LANDIM, C. Exponential Waiting Time for a Big Gap in a One Dimensional Zero Range Process, 8p.

9209 - LOSCHI, R.H. Coerência e Probabilidade, 17p.

9210 - CRIBARI-NETO, F. & FERRARI, S.L.P. An Improved Lagrange Multiplier Statistic for the Test of Heteroskedasticity, 22p.

9211 - LEITE, J.G. & BOLFARINE, H. Bayesian Estimation of the Number of Equally Likely Classes in a Population, 10p.

9212 - BOLFARINE, H. & SANDOVAL, M.C. On Predicting the Finite Population Distribution Function, 9p.

9213 - FERRARI, P.A. & FONTES, L.R.G. Fluctuations in the Asymmetric Simple Exclusion Process, 5p.

9214 - FERRARI, P.A. & FONTES, L.R.G., Current fluctuations for the Asymmetric Simple Exclusion Process, 14p.

9215 - IRONY, T.Z. & PEREIRA, C.A.B. Motivation for the Correct Use of Discrete Distributions in Quality Assurance, 12p.

9216 - IRONY, T.Z. & PEREIRA, C.A.B. Bayesian Hypotesis Test: Using Surface Integrals to Distribute Prior Information Among the Hypotheses, 25p.

9217 - FERRARI, P.A. & MAURO, E.S.R. Ergodicity and Invariance Principle for the One Dimensional S.O.S. Stochastic Model, 10p.

9218 - PEREIRA, C.A.B. & TIWARI, R.C. A Nonparametric Bayesian Analysis of Competing Risks Models, 20p.

The complete list of Relatórios do Departamento de Estatística, IME-USP, will be sent upon request.

- Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 20.570
01498-970 - São Paulo, Brasil