



# Aplicação de simulação baseada em wavelets em depósito sintético de cobre – um estudo de caso

*Wavelets-based simulation applied to a copper synthetic deposit – a case study*

EDUARDO HENRIQUE DE MORAES TAKAFUJI<sup>1</sup>, MARCELO MONTEIRO DA ROCHA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade de São Paulo – USP, São Paulo – [eduardo.takafuji@usp.br](mailto:eduardo.takafuji@usp.br), [mmrocha@usp.br](mailto:mmrocha@usp.br)

## Resumo

Simulações de estatísticas de multiponto, como as baseadas em *Wavelets*, foram criadas com o intuito de gerar realizações de padrões geológicos representados por variáveis categóricas (classes de minérios, litologias e outros). Suas aplicações também podem ser estendidas a variáveis contínuas, como a distribuição espacial do teor de cobre de uma mina. A questão é se esses métodos representaram adequadamente a distribuição espacial e como esses resultados se compararam com os métodos tradicionais. As simulações de estatísticas de multiponto são importantes uma vez que os métodos tradicionais de simulação geoestatística podem apresentar resultados inadequados em dados com mistura de populações ou de estruturas geológicas complexas (rios meandrantes, dobras e falhas, para citar alguns). Quando é necessário modelar essas estruturas, o uso do variograma é limitado e métodos geoestatísticos de multiponto são apresentados como solução, pois reproduzem a estatística de alta ordem da região, como a assimetria e curtose - medidas de terceira ordem e quarta ordem estatísticas, respectivamente - entre outras. O estudo de caso do método Wavesim, um método de simulação baseado em *wavelets*, foi realizado em um depósito sintético de cobre criado para ser utilizado como base de dados de referência e com três amostragens (conjunto de sondagens) diferentes para analisar a qualidade e sensibilidade do método. Assim, em um ambiente controlado, pode-se analisar adequadamente a qualidade do método em estudo e validá-lo. O Wavesim simula os padrões encontrados em uma imagem de treinamento, a qual deve ser análoga à região sendo simulada. A imagem de treinamento utilizada no estudo foi gerada a partir da krigagem ordinária da distribuição dos teores no depósito completo. Os resultados para as diferentes amostragens mostram melhora na reprodução das estatísticas globais com o adensamento das malhas. O método mostrou-se viável, sendo a imagem de treinamento o principal fator balizador dos resultados.

**Palavras-chave:** Geoestatística, Simulação de Estatísticas de Multipontos, Simulação Baseada em *Wavelets*, Efeito Informação, Depósito de Cobre

## Abstract

*Multiple-point simulation, such as the Wavelet-based, were developed to generate geological patterns represented by categorical variables (classes of ores, lithologies and others). Their applications can also be extended to continuous variables such as the spatial distribution of the copper content of a mine. The question is whether these methods will adequately represent spatial distribution and how these results compare with traditional methods. Multiple-point simulation is important because traditional geostatistical simulation methods may present inadequate results in mixed population data or complex geological structures (meandering rivers, folds and faults, to name a few). When it is necessary to model these structures, the use of the variogram is limited and multiple-point geostatistical methods are presented as a solution, since this method reproduces the region's high-order statistics, such as asymmetry and kurtosis, respectively the third-order and the fourth-order statistics, among others. The case study of the Wavesim method was carried out in a synthetic copper reservoir created to be used as a reference database and with three different samples (different amounts of sample units) to analyze the quality and sensitivity of the method. Thus, in a controlled environment, one can properly analyze the quality of the method under study and validate it. Wavesim simulates the patterns found in a training image, which should be analogous to the region being simulated, this image was generated from the ordinary kriging of the distribution of the contents in the complete domain. The results for the different samplings show an improvement in the reproduction of the global statistics with the density of the sampling grid. The method was feasible, with the training image being the main factor of the results.*

**Keywords:** Geostatistics, Multiple-point Simulation, Wavelet-based Simulation, Information Effect, Copper Deposit

## 1. Introdução

A compreensão de eventos geológicos e da distribuição espacial de teores de minério são importantes em um empreendimento mineiro. Profissionais competentes coletam amostras de testemunhos de furos de sonda e informações de diversos métodos geofísicos com o objetivo de conhecer adequadamente a geologia de uma região. Estes bancos de dados são analisados por especialistas (geólogos, geofísicos, técnicos de mineração, engenheiros de minas, químicos e outros) e com os resultados destes estudos, sua posição espacial e concentração química, pode-se estimar a distribuição espacial dos teores.

As incertezas geológicas têm grande impacto no modelo geológico e, consequentemente, na classificação de recursos/reservas minerais. A habilidade de quantificar e mapear estas incertezas é essencial para a avaliação e classificação de recursos e reservas minerais, considerando-se as implicações econômicas nas tomadas de decisão.

Existem diversas técnicas consolidadas na indústria mineral para modelar os depósitos minerais e estimar valores de atributos de interesse em locais não amostrados. Entre estas técnicas clássicas da geoestatística destacam-se a krigagem ordinária - para o cálculo de estimativas - e a simulação sequencial gaussiana - para simular várias realizações – ambas dependentes do variograma. Ao contrário dessas duas técnicas, novas técnicas que não dependem de variogramas vêm sendo desenvolvidas para aprimorar as previsões. Portanto, a dependência espacial não é medida pela estatística de dois pontos do semivariograma, mas sim pela reprodução de padrões complexos pela estatística de alta ordem, como pode ser observado nas propostas feitas por Strebelle (2002), Zhang *et al.* (2006), Dimitrakopoulos *et al.* (2010) e outros. Esses novos métodos estão incluídos na família de métodos de estatísticas de multiponto.

As simulações estocásticas tradicionais da geoestatística, como a simulação sequencial gaussiana, simulação por decomposição matricial triangular (*lower-upper* ou LU) ou por bandas rotativas, expressas com funções não lineares de variáveis regionalizadas, são utilizadas para a obtenção de várias representações equiprováveis da realidade e, também, para quantificar as incertezas associadas às mesmas. Takafuji (2015) comenta que estes métodos foram exaustivamente aplicados nos últimos anos e, consequentemente, são consagrados neste meio. Por outro lado, algumas técnicas definidas recentemente, tal como a simulação de multipontos (MPS) ainda carecem de testes e divulgação para ser acolhido pela indústria mineira. Neste sentido, este trabalho utilizará a Simulação Baseada em *Wavelets* (Wavesim), proposta por Gloaguen & Dimitrakopoulos (2009), na simulação de um depósito sintético de cobre a partir de três campanhas de amostragem. Para tanto, foram realizadas possíveis variações dos parâmetros de entrada e, posteriormente, fez-se a avaliação da qualidade e eficácia dos resultados. Além disto, com três amostragens diferentes, é possível comparar os resultados do Wavesim e avaliar o efeito de aumento de informação.

O primeiro método de simulação estocástica por estatística multiponto (*Extended Normal Equation Simulation* - ENESIM) foi desenvolvido por Guardiano & Srivastava (1993) e em seguida outros métodos foram propostos por pesquisadores como por exemplo Strebelle (2002) com o *Single Normal Equation Simulation* (SNESIM), Arpat (2005) e Arpart & Caers (2005) com o *Simulation with Patterns* (SIMPAT), Zhang *et al.* (2006) com o *Filter-based Simulation* (FILTERSIM), Gloaguen & Dimitrakopoulos (2009) com o *Wavelet-based Simulation* (WAVESIM), Honarkhah & Caers (2010) com o *Distance-Based Pattern Modeling* (DISTPAT), Mariethoz *et al.* (2010) com o *Direct Sampling* (DS), Dimitrakopoulos *et al.* (2010) com o *High-Order Simulation* (HOSIM) entre outros.

Os métodos de multiponto utilizam padrões de imagens retiradas de imagens de treinamento (TI) para seus cálculos e, segundo Caers & Zhang (2002) e Journel & Zhang (2006), estas imagens de treinamento são bancos de dados de padrões geológicos a partir dos quais as estatísticas de alta-ordem podem ser obtidas. Além disso, deve haver uma repetição de padrões na TI que permita extrair as estatísticas de diversos pontos. Deve-se considerar que a TI representa completamente a área estudada, ou seja, ela deve conter todas as suas características geológicas (Lyster *et al.* 2004). Sendo assim, a TI substitui o semivariograma como medida de heterogeneidade geológica e é mais intuitiva, uma vez que é possível observar – antes de qualquer simulação ou estimativa geoestatística – quais serão os padrões que serão reproduzidos (Caers & Zhang 2002). O objetivo destes métodos é capturar todos os possíveis padrões geológicos e não a reprodução absoluta da própria imagem de treinamento (Ortiz, 2003).

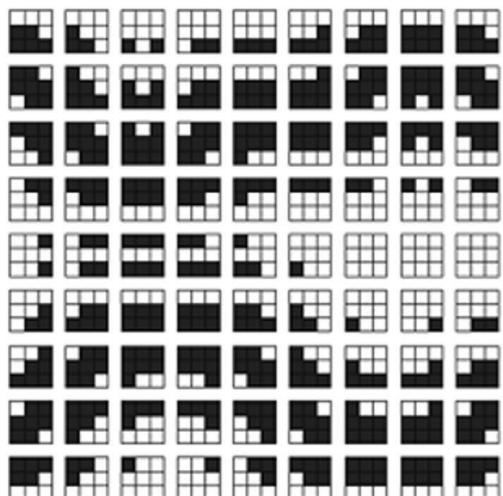
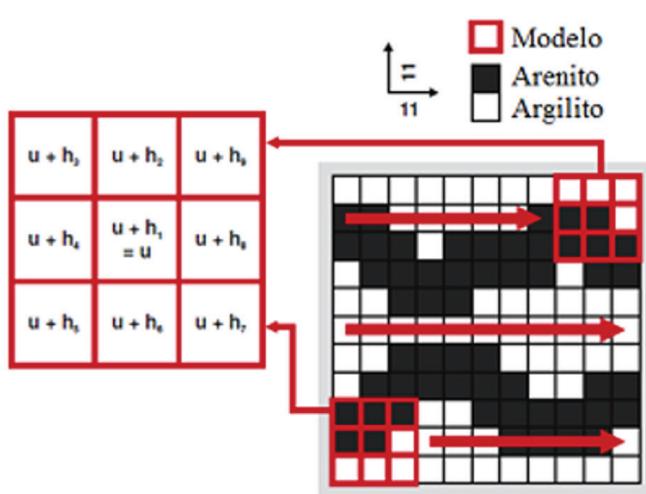
## 2. Metodologia

A primeira etapa da Wavesim é o escaneamento da imagem de treinamento (TI) feito por uma janela (T) de tamanho previamente definido, como pode ser observado na Figura 1. Chatterjee *et al.* (2012), explica que os padrões são extraídos pelo escaneamento da TI por T são guardados em um banco de dados de padrões. A janela T na Figura 1 mostra que a busca deve ser realizada ao redor do ponto central u. Então, T é deslocado ao nó central vizinho e todo procedimento é repetido. Mais informações sobre o processo de escaneamento das TI para simulações de multiponto podem ser encontradas em Arpat (2005), Arpat & Caers (2007), Zhang *et al.* (2006), Takafuji *et al.* (2018) e outros.

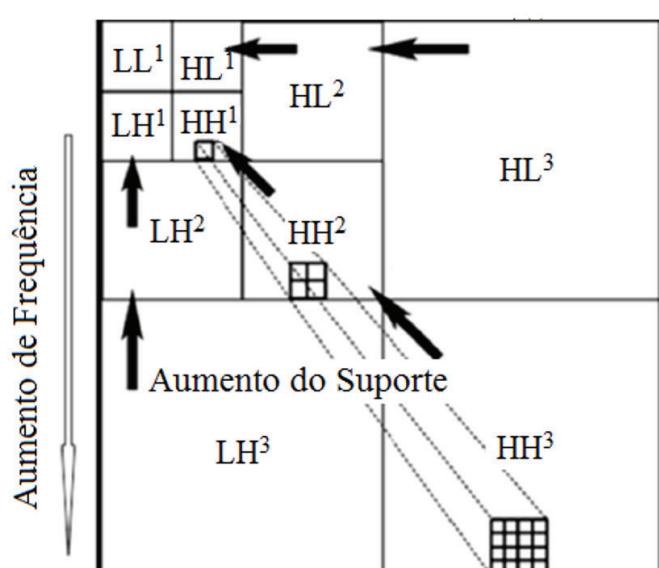
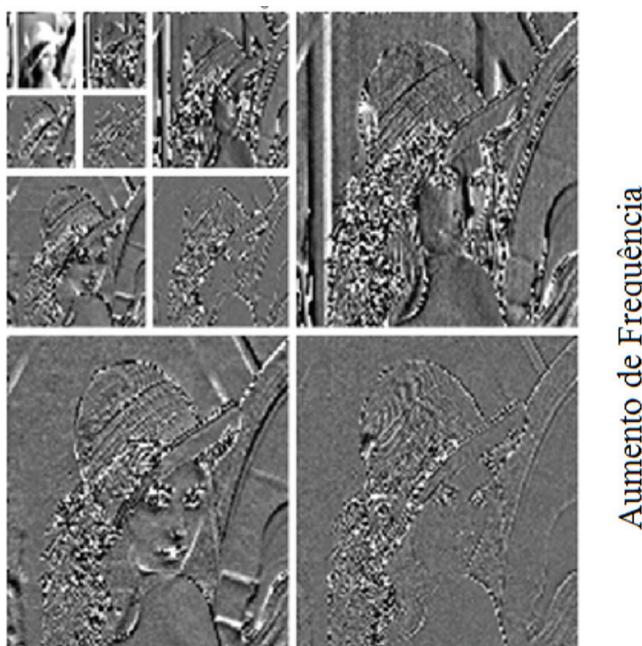
Após a TI ser escaneada, aplica-se a decomposição de *wavelets* nestes padrões para diminuir a resolução dos dados e deixar o processo de simulação computacionalmente menos custoso. Graps (1995) explica que *wavelets* são funções matemáticas que decompõem os dados em componentes de frequências diferentes, então, estuda-se cada componente com resolução associada a diferentes escalas (bandas de frequências). Se observado o sinal com uma “grande janela”, ou dados de baixa frequência, vê-se os dados brutos. No caso da janela ser “pequena”, ou de

alta frequência, os detalhes (pequenas características) são destacados. Além disso, as *wavelets* são adequadas para identificar dados com descontinuidades abruptas. O procedimento de análise wavelet adota uma função protótipo (original) de wavelet - chamada de função mãe do wavelet - e quanto melhor as wavelets se ajustarem aos dados, menos dados serão necessários para representá-los, sendo assim uma ótima ferramenta para a compressão de dados. Chan (1995) mostra que a resolução de um sinal é um termo qualitativo relacionado a sua frequência e quanto menor sua frequência amostral, menor é a sua resolução.

Chatterjee *et al.* (2012) propuseram que a redução da resolução dos padrões no banco de dados de padrões seja realizada pela decomposição de *wavelets* até determinada escala. Além disso, o resultado (sub-banda aproximada) pode ser utilizado para comparações entre esses padrões no banco de dados, uma vez que eles mantêm as variabilidades. A Figura 2 mostra um exemplo prático de como são os resultados da decomposição de *wavelets*, em que a imagem é decomposta em três escalas. Observa-se que com o aumento da frequência, a imagem fica mais detalhada e, neste exemplo, 16 pixels originais são



**Figura 1** - Definição da janela T, exemplo de janela 2D 3x3 numa malha 11 x 11 e os padrões obtidos pelo escaneamento da malha onde branco representa o argilito e preto o arenito (modificado de Arpat & Caers 2007; Takafuji *et al.* 2018).



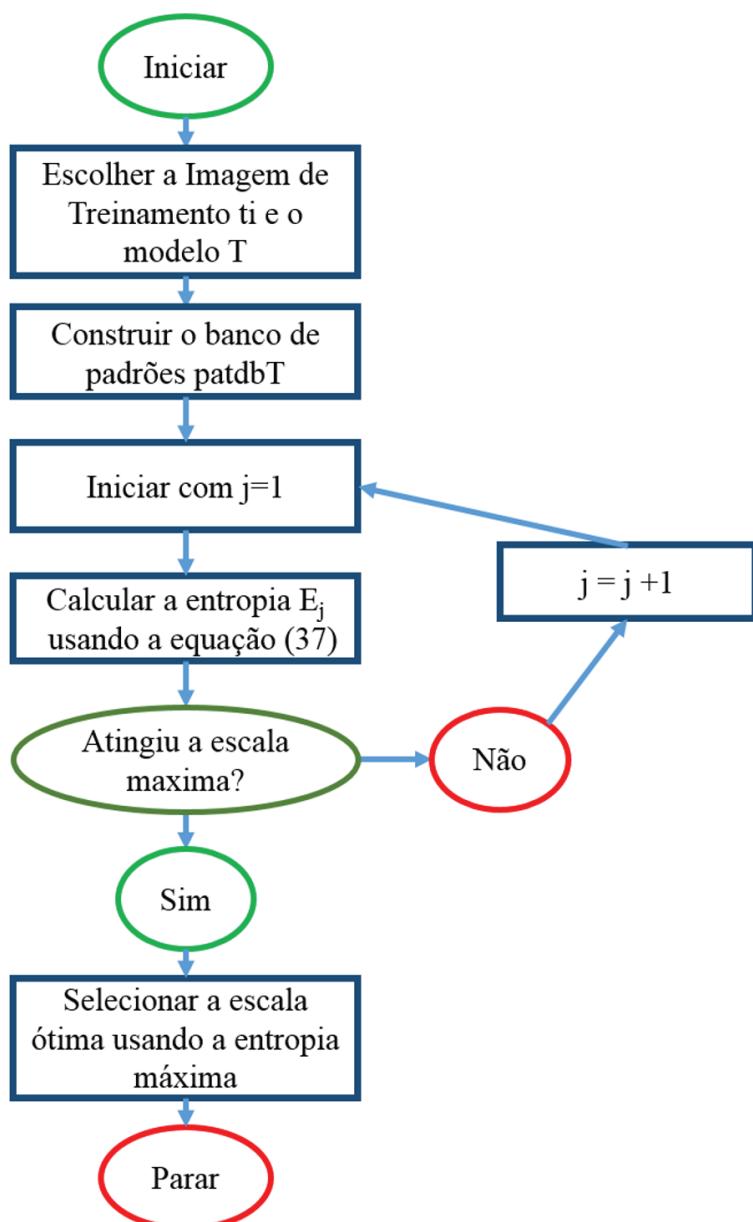
**Figura 2** - A hierarquia espacial da decomposição por *wavelets* (os valores sobreescritos representam cada coeficiente de *wavelets* e os subescritos a escala). (traduzido de Chatterjee *et al.* 2016).

representados por apenas um após as decomposições. Morettin (1999) ilustra que  $w^1$ ,  $w^2$ ,  $w^3$  representam os detalhes horizontais, diagonais e verticais e  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são a imagem decomposta (sub-banda aproximada), respectivamente pela primeira, segunda e terceira escalas.

A escolha da escala ( $j$ ) máxima de decomposição é feita com o cálculo da entropia média de todos os padrões, a média é repetida para todas as escalas até encontrar o seu valor máximo (Chatterjee *et al.* 2012). A representação desta escolha em formato de fluxograma é mostrado na Figura 3, provas e mais detalhes sobre a escolha da escala máxima podem ser encontrados em Chatterjee *et al.* (2012).

Chatterjee *et al.* (2012) discorrem que os padrões decompostos são classificados pelo algoritmo de agrupa-

mento *K-Means* e suas classes são representadas por um protótipo, que é o padrão médio. O número de agrupamentos deve ser definido pelo usuário do Wavesim. Cada classe é composta pelo conjunto de todos os padrões daquele grupo, então é possível gerar sua função densidade acumulada condicional (fdac) baseada na frequência das categorias individuais no nó central da janela. A simulação prossegue com a definição de um caminho aleatório para visitar apenas uma vez cada nó não amostrado. Durante o processo de simulação, a similaridade das amostras (dados condicionantes) com o protótipos de classes, é expressa por uma distância medida utilizando a norma euclidiana ( $L_2$ ), que é o ajuste  $l_p$  (*least power*), designação genérica dos ajustes nos quais é minimizada a soma dos valores absolutos dos erros elevados ao quadrado



**Figura 3** - Fluxograma da escolha para uma escala ótima (traduzido de Chatterjee *et al.* 2012).

(Duarte 2003). Então, deve-se selecionar o protótipo de classe com a distância mínima dos dados condicionantes e se nenhum dado condicionante estiver disponível utilizar uma classe aleatória. Quando variáveis contínuas são simuladas, um padrão aleatório é sorteado a partir da fdac do protótipo da classe selecionada. O padrão simulado pode ser colado inteiramente no centro do local simulado, ou apenas os blocos centrais e estes dados simulados entram no banco de dados como pontos condicionantes. Por fim, a simulação segue para o próximo nó escolhido a partir de um caminho aleatório e os processos de comparação (norma euclidiana) e seleção de padrões (sorteio na fdac) são repetidos até que todos os nós sejam simulados.

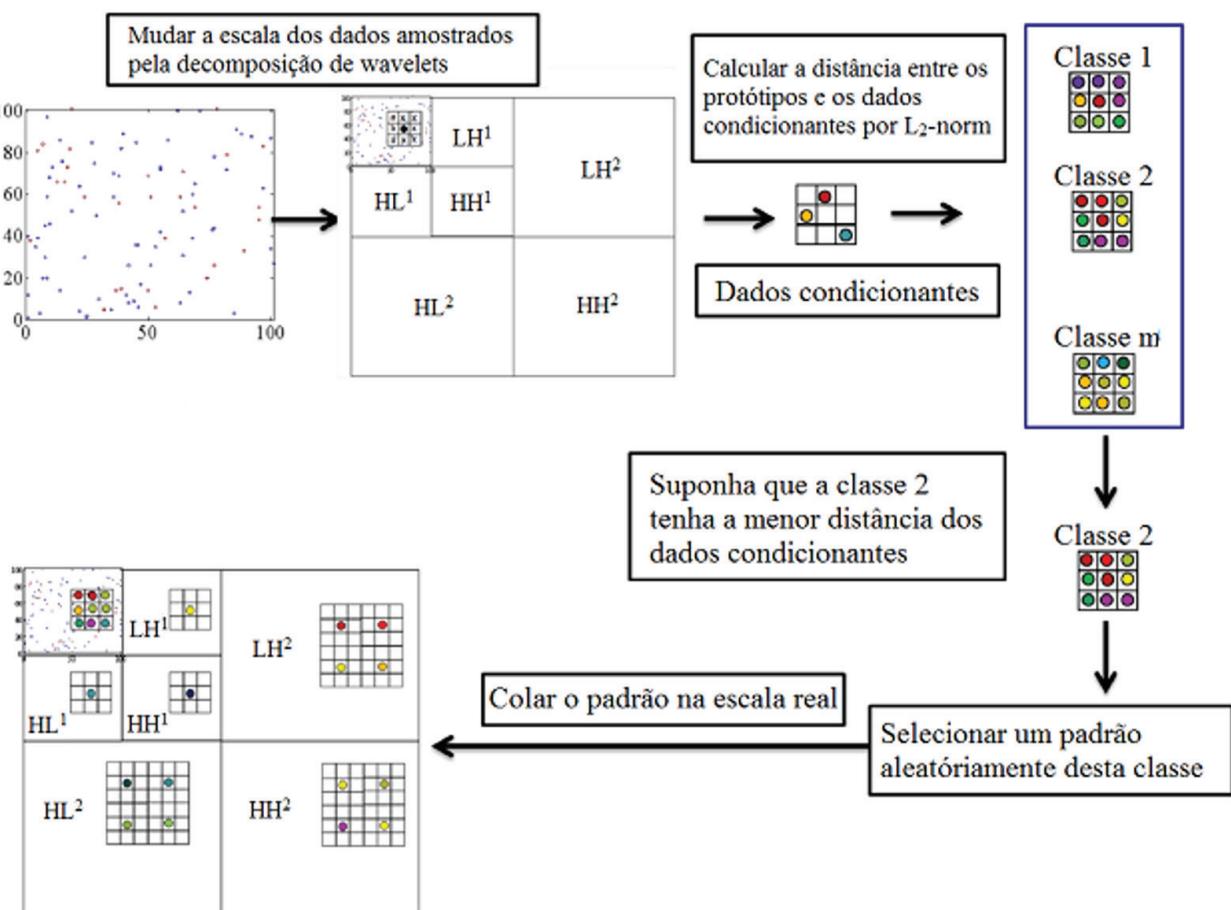
Chatterjee *et al.* (2012) mostram que a maior vantagem do Wavesim é que a classificação de padrões de dados de várias resoluções pode ser feita com baixo esforço computacional, que reduz a resolução dos padrões capturando sua variabilidade.

As etapas relacionadas ao Wavesim são apresentadas de maneira simples e direta na Figura 4. Considerando que os padrões obtidos pela decomposição da TI já foram agrupados e armazenados, a simulação inicia-se com a escolha aleatória de um setor. As amostras dentro deste espaço são comparadas com os padrões do banco de pa-

drões pela norma euclidiana ( $L_2$ ) e dentro da classe de padrões mais semelhante, o padrão que será colado no local sendo simulado é sorteado aleatoriamente. Este padrão deve estar na escala original para não perder resolução pela decomposição de *wavelets*. Por último, a simulação segue para a próxima região até toda a área ser simulada. Mais informações, provas matemáticas e aplicações do Wavesim também podem ser obtidas em Gloaguen & Dimitrakopoulos (2009), Chatterjee & Dimitrakopoulos (2012), Chatterjee *et al.* (2012), Mustapha *et al.* (2013) e Chatterjee *et al.* (2016).

## 2.1 Dados

Takafuji (2015) e Takafuji *et al.* (2017) explicam que um depósito real não é satisfatório para estudar adequadamente a confiabilidade dos métodos geoestatísticos, uma vez que os contornos geológicos em subsuperfície não são conhecidos com precisão, pois nem todas as camadas são necessariamente aflorantes e a malha de sondagem pode não interceptar. Sendo assim, a geometria e os teores exatos dos corpos de minério são apenas inferências, ou seja, para garantir todo o conhecimento do depósito mineral, ele deve ser estudado e explorado por inteiro. Assim, uma maneira eficiente de validar os resultados obtidos por novos métodos de estimativas e

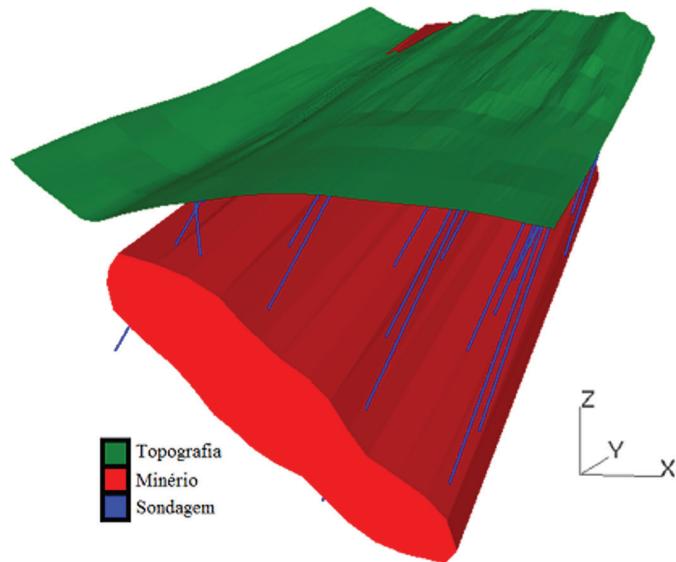


**Figura 4** - Descrição do procedimento da Wavesim (traduzido de Chatterjee *et al.* 2016).

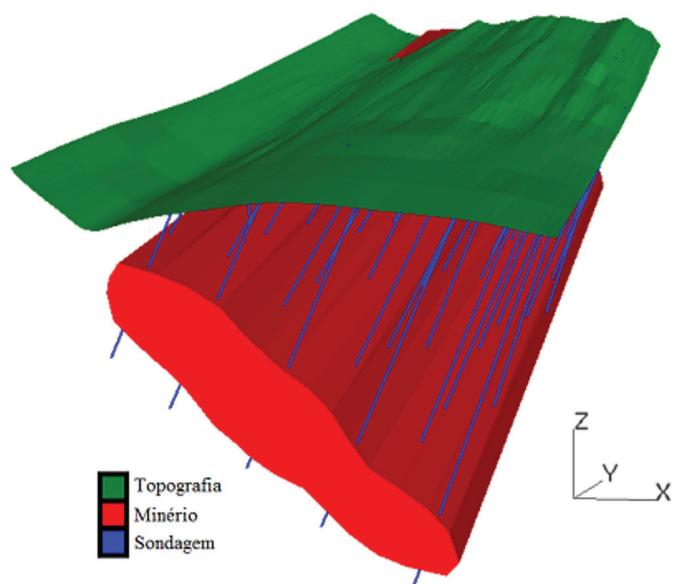
simulações geoestatísticas, é trabalhar com um depósito sintético. A base de dados utilizada foi desenvolvida pelos autores supracitados com o intuito de conhecer o depósito todo para validações dos métodos estudados. Este banco de dados sintético mimetiza a geologia local de um depósito polimetálico formado por fluidos hidrotermais quartzosos que penetraram por uma falha de direção norte-sul e inclinação aproximada de 45° para leste. A rocha encaixante é formada pela intercalação de camadas de meta-arenito e camadas de filitos dobradas, o que acarreta alta variabilidade de padrões geológicos, além da alta variabilidade intrínseca aos depósitos de metais como cobre.

## 2.2 Amostragem

Para este trabalho, foram feitas três amostragens no depósito sintético através de furos de sonda em malhas semi-regulares com distâncias de aproximadamente 60, 40 e 20 metros. As amostras, ao longo dos furos possuem tamanhos irregulares com comprimento médio de 60 cm e foram regularizadas para bancadas de 5 m. A partir destas informações, a zona mineralizada foi delineada considerando o teor de cobre como fator de definição. A representação da zona mineralizada em vermelho, topografia em verde e furos de sondagem distanciados em aproximadamente 60, 40 e 20 metros (azul) é mostrada na Figura 5, na Figura 6 e na Figura 7, respectivamente.



**Figura 5** - Modelo tridimensional da zona mineralizada (vermelho), as sondagens distanciadas em ~60 m (azul) e em verde é mostrado a topografia (modificado de Takafuji *et al.* 2017).



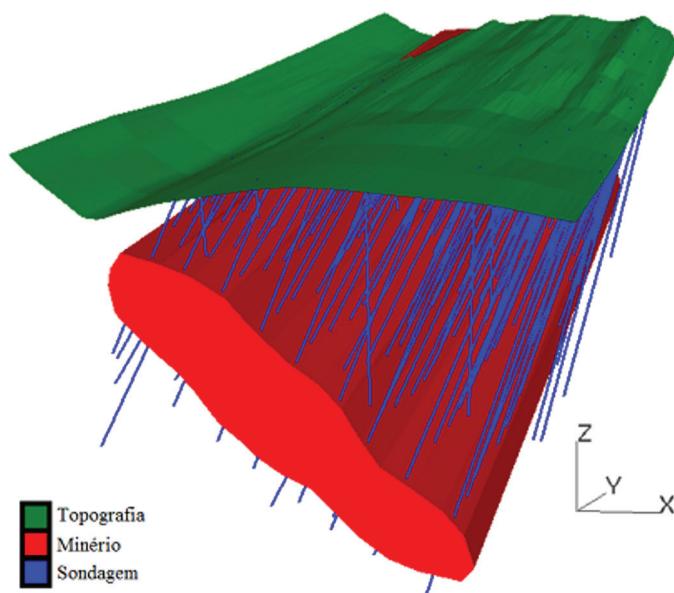
**Figura 6** - Modelo tridimensional da zona mineralizada (vermelho), as sondagens distanciadas em ~40 m (azul) e em verde é mostrado a topografia (modificado de Takafuji *et al.* 2017).

### 3. Resultados e Discussão

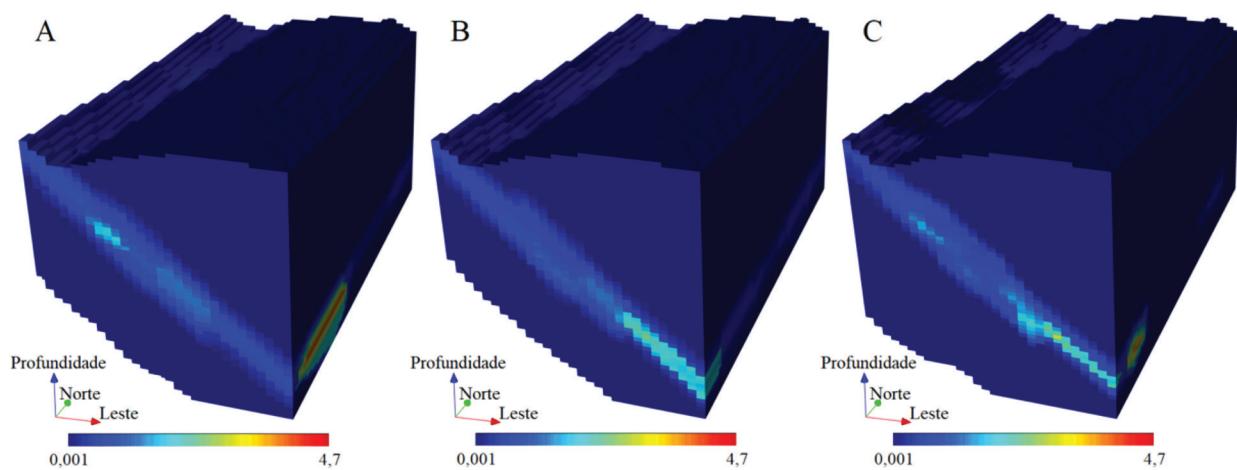
O conceito da simulação de multiponto exige uma imagem de treinamento que será utilizada para captura de padrões. Para simulações de variáveis categóricas existem bancos de dados com diversas feições geológicas, os quais foram divulgados por Mariethoz & Caers (2015). Além disto, estes autores mostram alguns métodos para criar imagens de treinamento categóricas, como métodos baseado em objetos, baseado em processos, modelos de imitação de processos entre outros. Porém, o caso estudado simula uma variável contínua, ou seja, além do formato do corpo de minério, existe a distribuição espacial de valores contínuos

de cobre. Portanto, por apresentar a melhor estimativa local, escolheu-se trabalhar com o modelo obtido por krigagem ordinária dos pontos amostrados como TI. Se não houver um depósito análogo conhecido para ser utilizado como TI, outra possibilidade é empregar técnicas de interpolação espacial não geoestatística (spline, inverso do quadrado da distância) ou métodos puramente matemáticos, como de conclusão matricial que tenta reconstruir imagens com pixels ausentes, Yahya (2011) explica como este método pode criar uma imagem de treinamento.

Os resultados da krigagem ordinária para a amostragem de 60m, 40m e 20m são apresentados na Figura 8.



**Figura 7** - Modelo tridimensional da zona mineralizada (vermelho), as sondagens distanciadas em ~20 m (azul) e em verde é mostrado a topografia (modificado de Takafuji *et al.* 2017).



**Figura 8** - Krigagem ordinária do depósito completo utilizando os furos distanciados em aproximadamente: 60 m (A), 40 m (B) e 20 m (C).

O processamento neste estudo foi realizado com um programa criado na linguagem C++ pelo laboratório COSMO (McGill University) e gentilmente cedido pelo Prof. Dr. Roussos Dimitrakopoulos. Assim, a wavelet-mãe, as escalas máximas atingidas e o fator de compressão de cada padrão foram definidos automaticamente durante o processamento do programa Wavesim. Os parâmetros que o usuário deve fornecer são: malha a ser simulada; tamanho da malha; imagem de treinamento; tamanho da imagem de treinamento; vizinhança de busca (com valores ímpares, pois considera-se uma busca ao redor do ponto central); remendo (blocos centrais que serão colados na simulação); número de agrupamentos (quantos padrões existem na área); número de realizações; e a região dentro da malha a ser simulada (opcional). Todos os valores utilizados foram escritos em medidas unitárias. Então, como os blocos que serão estimados tem  $10 \times 10 \times 5$  metros, eles foram reduzidos proporcionalmente a uma unidade em cada direção. O tamanho da malha e da TI é a quantidade de blocos em cada direção. A vizinhança de busca foi definida para capturar pelo menos 2 sondagens em cada direção e, assim, ter informação espacializada para a simulação. O remendo é a parte central da janela que é considerada mais confiável. Para a escolha do número de padrões, deve-se ter uma estimativa de quantos padrões são possíveis na região, quanto mais padrões, mais detalhada pode ser a simulação e, consequentemente, mais demorada. Além disso, tradicionalmente 100 realizações são necessárias para uma simulação geoestatística. Os parâmetros selecionados para este estudo podem ser observados na Tabela 1.

O resultado de uma simulação, escolhida ao acaso para cada amostragem  $\sim 60$  m (A),  $\sim 40$  m (B) e  $\sim 20$  m (C), pode ser observado na Figura 9.

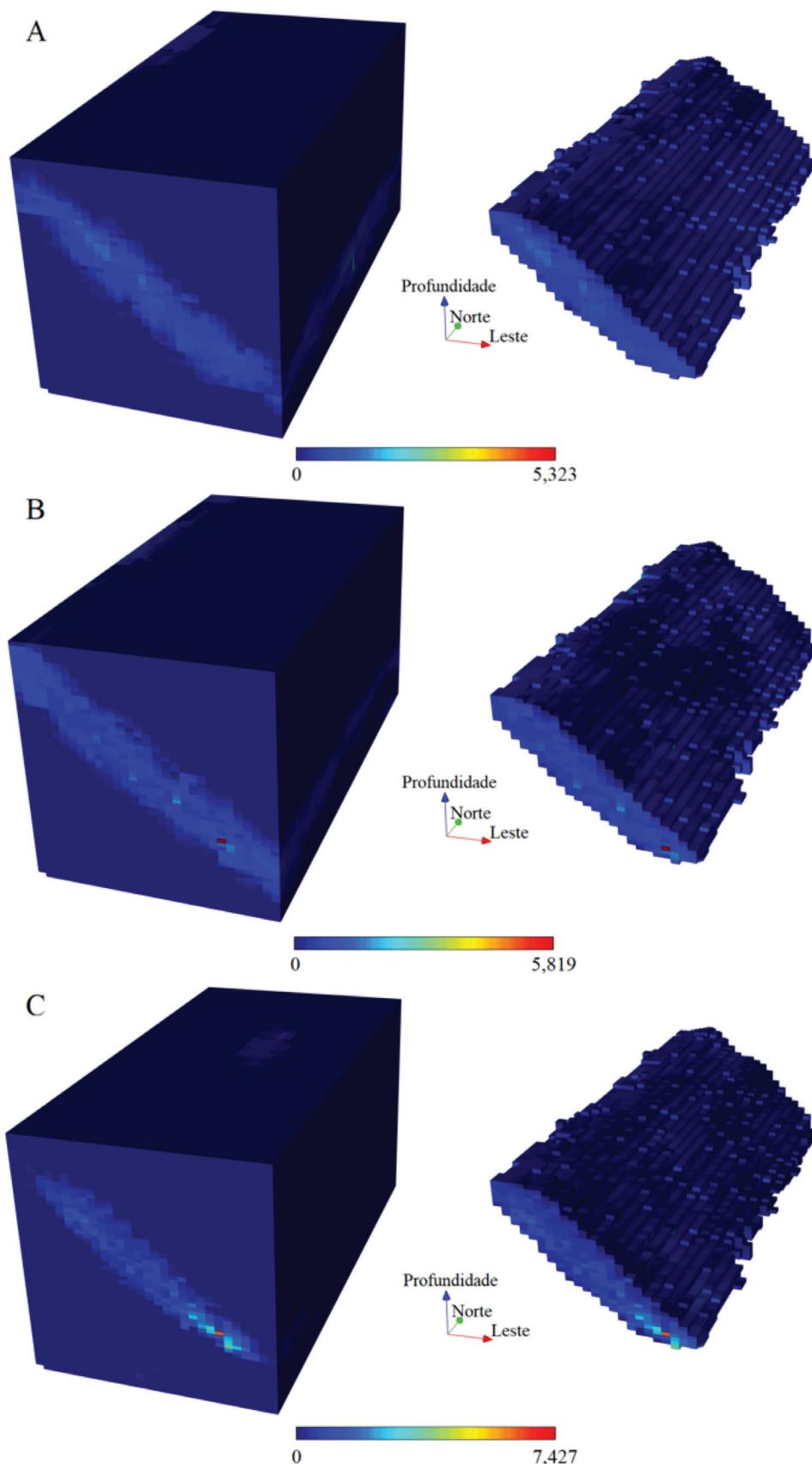
Com o objetivo de representar graficamente as estatísticas das 100 realizações das três amostragens, apresentam-se na Figura 10 histogramas feitos para os quatro primeiros momentos estatísticos (média, variância, assimetria e curtose). Além disso, o Wavesim é comparado

com a krigagem ordinária (TI), o principal método clássico de estimativa geoestatística. Suas estatísticas são representadas pelas linhas e comparadas também com os valores reais do depósito sintético cujas estatísticas estão em preto. Nota-se que a média e variância dos valores krigados se aproximam do real conforme a densidade amostral aumenta e isto não necessariamente ocorre com a assimetria e a curtose, pois os métodos clássicos de geoestatística utilizam apenas os dois primeiros momentos estatísticos. Os métodos de multiponto tentam reproduzir estatísticas de alta ordem e isso é refletido no resultado observado (histogramas), nos quatro momentos estatísticos os resultados se aproximam do real com o aumento da densidade amostral.

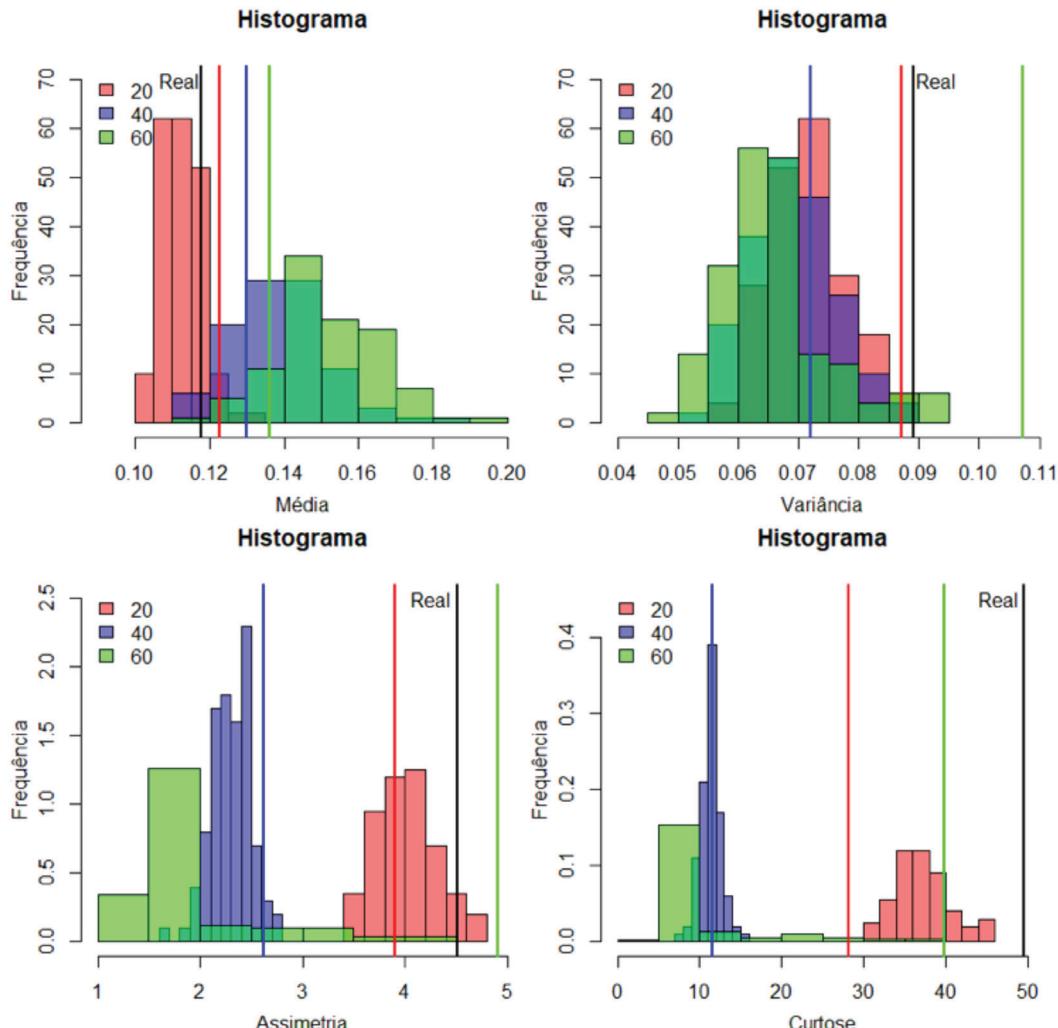
Na Figura 11 compara-se o efeito da densidade de informação causado pelas diferentes quantidades de amostras. Ele apresenta o comportamento de todas as realizações do valor acumulado das tonelagens dos blocos, conforme a quantidade de blocos aumenta. Para a amostragem de 60m, cada realização é representada pela cor preta, enquanto as de 40m e de 20m são representadas pelas cores verde e azul, respectivamente. Observa-se claramente que quanto maior o número de amostras utilizadas, ou seja, mais densa a amostragem, mais os resultados convergem aos valores reais. Na Figura 11A as somas obtidas para todas as amostragens são apresentadas em um único gráfico, é possível observar a subestimativa sistemática da tonelagem que foi causada por dois motivos principais (i) as amostragens, apesar de serem representativas, não capturaram os valores mais altos do depósito e (ii) a TI foi gerada pelo método de krigagem ordinária, que suaviza os valores estimados. Portanto, os resultados estão representando o que é observado na TI e nas amostras. Além disso, é possível ver que grande parte da gama de possibilidades se sobrepõe indicando que apesar da diferença entre as amostragens, muitas realizações apresentam resultados semelhantes. Nas Figuras 11B, 11C e 11D são apresentados estes resultados, respectivamente para as amostragens de 60m, 40m e 20m.

| Parâmetros                      | Amostragem               |                          |                       |
|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|
|                                 | 60 m                     | 40 m                     | 20 m                  |
| Tamanho da malha (X x Y x Z)    |                          | $30 \times 60 \times 60$ |                       |
| Tamanho da TI (X x Y x Z)       |                          | $30 \times 60 \times 60$ |                       |
| Vizinhança de busca (X x Y x Z) | $15 \times 15 \times 15$ | $11 \times 11 \times 11$ | $7 \times 7 \times 7$ |
| Remendo (X x Y x Z)             | $7 \times 7 \times 7$    | $5 \times 5 \times 5$    | $3 \times 3 \times 3$ |
| Número de agrupamentos          |                          | 350                      |                       |
| Número de realizações           |                          | 100                      |                       |
| Região                          | Não utilizado            |                          |                       |

**Tabela 1** - Parâmetros da Wavesim.



**Figura 9** - Resultado da Simulação Baseada em *Wavelets* feita com os furos distanciados em ~60 m (A), em ~40 m (B) e em ~20 m (C). A figura da esquerda mostra todos os blocos da simulação e da direita apenas os blocos dentro do corpo de minério.



**Figura 10** - Histogramas representam os valores das quatro primeiras ordens estatísticas das 100 realizações. As linhas representam as estatísticas da TI. Em verde a amostram de 60 m, em azul a amostragem de 40 m, em vermelho de 60 m e em preto os valores reais.

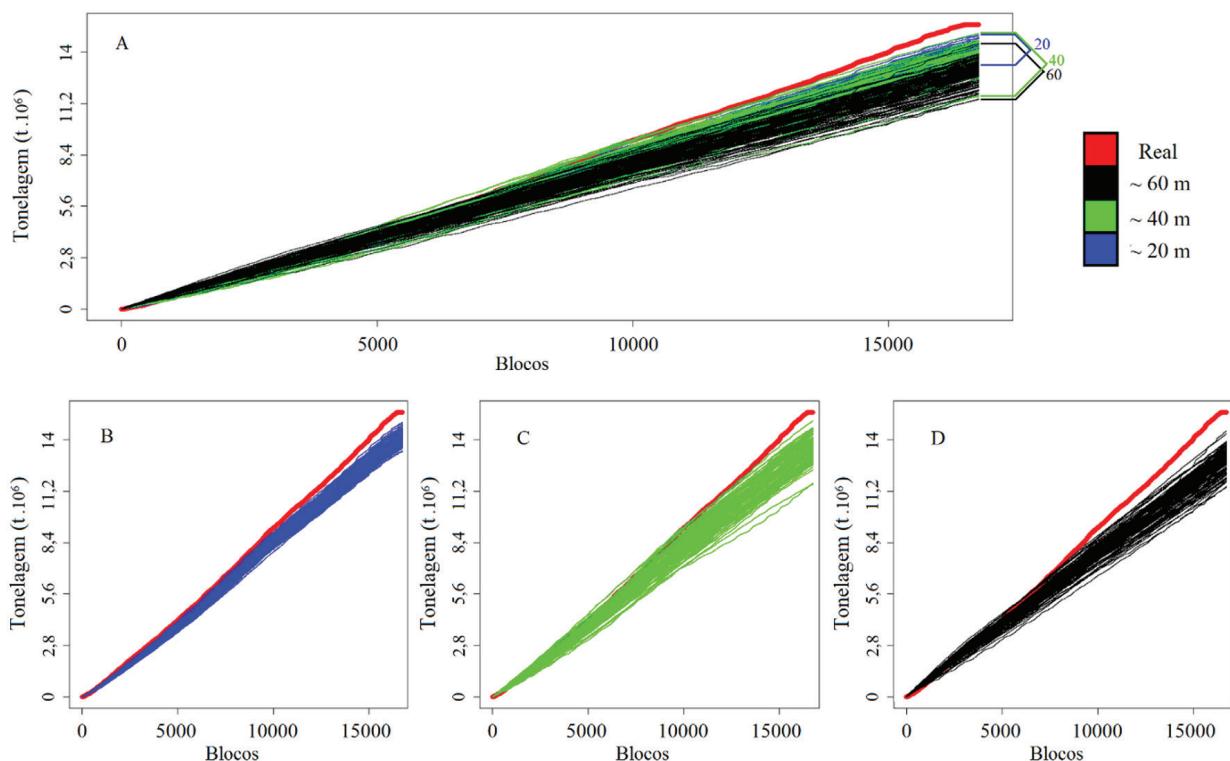
#### 4. Considerações finais

A simulação baseada em *wavelets* é um método promissor da geoestatística de multipontos uma vez que ela é capaz de reproduzir as estatísticas de várias ordens de variáveis contínuas em depósitos minerais (Figura 10). Como em qualquer método de simulação, o resultado é uma gama de possíveis modelos com a mesma probabilidade de ocorrência. Portanto, esta gama de possibilidades pode ser analisada como uma medida de incerteza. Neste caso, foi observado que os resultados apresentaram uma dispersão de tonelagem final menor e ficaram mais próximos ao real conforme o adensamento da amostragem é maior (a Figura 11 D mostra que a dispersão é menor e mais próxima ao esperado quando comparada com as dispersões de 11 B e 11 C).

Entretanto, este método apresenta algumas dificuldades: a primeira remete-se a escolha adequada dos parâmetros da simulação, afinal, deve-se conhecer os concei-

tos e parâmetros necessário para aplicar a técnica, os quais são novos para um geoestatístico tradicional. Além disso, a preparação do banco de dados e da imagem de treinamento é relativamente demorada comparada ao tempo gasto em métodos geoestatísticos tradicionais. Outro ponto negativo é a escolha da quantidade de agrupamentos necessária para a realização da simulação. A teoria diz que deve-se obter, no mínimo, o mesmo valor de possíveis padrões, contudo, a prática mostra que este número é, na maioria dos casos, muito grande. Consequentemente, escolhe-se um número que seja satisfatoriamente grande para representar todos os principais padrões e, ao mesmo tempo, pequeno o bastante para a simulação não consumir muito tempo de processamento.

Outro grande problema é que ainda há certa complexidade no desenvolvimento de uma TI com variáveis contínuas que represente um depósito demasiadamente complexo, pois desejamos conhecer o depósito e nenhum



**Figura 11** - Valor da tonelagem acumulada das realizações. A) resultados de todas as realizações. B) resultados das realizações de 60m. C) resultados das realizações de 40m. D) resultados das realizações de 20m.

depósito é igual a outro. Portanto, a utilização de um depósito análogo como TI pode ser feita, se o usuário estiver consciente de suas limitações. A utilização de um método de estimativa - como neste caso, a krigagem ordinária - pode ser questionável, pois os resultados ficam suavizados e possivelmente tendenciosos, uma vez que o objetivo do método é a não utilização de um variograma. Neste estudo a aplicação da krigagem ordinária mostrou o quanto a TI influenciou os resultados, tornando-os sistematicamente subestimados. Portanto, a maior dificul-

dade deste método é a criação do banco de padrões com valores contínuos com a variabilidade espacial real de cada depósito.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem ao laboratório COSMO da Universidade McGill no Canadá pelo apoio com os métodos estudados. A CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior) pela bolsa de doutorado concedida.

#### Referências bibliográficas

- ARPAT B. 2005. Sequential Simulation with patterns. Ph.D. thesis. Department of Petroleum Engineering, Stanford University, 166p.
- ARPAT B., CAERS J. 2005. A Multiple Scale, Pattern-Based Approach to Sequential Simulation. In: LEUANGTHONG O., DEUTSCH C.V. (Eds.) Geostatistics Banff 2004. Springer, Dordrecht, 255–264 p.
- ARPAT B., CAERS J. 2007. Conditional Simulation with Patterns. Mathematical Geology, 39(2): 177-203.
- CAERS J., ZHANG T. 2002. Multiple-point geostatistics: a quantitative vehicle for integrating geologic analogs into multiple reservoir model, integration of outcrop and modern analog data in reservoir models. Stanford University, Stanford Center for Reservoir Forecasting, 24p. (Internal Report).
- CHAN Y.T. 1995. Wavelet Basics. Kluwer Academic Publishers, 134p.
- CHATTERJEE S., DIMITRAKOPOULOS R. 2012. Multi-scale Stochastic Simulation with a Wavelet-Based Approach. Computers & Geosciences, 45:177-189.
- CHATTERJEE S., DIMITRAKOPOULOS R., MUSTAPHA H. 2012. Dimensional Reduction of Pattern-Based Simulation Using Wavelet Analysis. Mathematical Geosciences, 44(3):343-374.
- CHATTERJEE S., MUSTAPHA H., DIMITRAKOPOULOS R. 2016. Fast Wavelet-Based Stochastic

- Simulation Using Training Images. Computational Geoscience, 20(3):399-420.
- DIMITRAKOPoulos R., MUSTAPHA H., GLOAGUEN E. 2010. High-Order Statistics of Spatial Random Fields: Exploring Spatial Cumulants for Modelling Complex, Non-Gaussian and Non-Linear Phenomena. Mathematical Geosciences, 42(1):65-99.
- DUARTE O.O. 2003. Dicionário enciclopédico Inglês-Português de Geofísica e Geologia (2<sup>a</sup> Ed.). Sociedade Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, 381p.
- GLOAGUEN E., DIMITRAKOPoulos R. 2009. Two-Dimensional Conditional Simulations Based on the Wavelet Decomposition of Training Images. Mathematical Geosciences, 41(6):679-701.
- GRAPS A. 1995. An introduction to wavelets. IEEE Computational Science and Engineering, 2(2):50-61.
- GUARDIANO F., SRIVASTAVA M. 1993. Multivariate Geostatistics: Beyond Bivariate Moments. In: SOARES A. (Ed.) Geostatistics-Tróia '92. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 133-144p.
- HONARKHAH M., CAERS J. 2010. Stochastic Simulation of Patterns Using Distance-Based Pattern Modeling. Mathematical Geosciences, 42(5):487-517.
- JOURNEL A., ZHANG T. 2006. The Necessity of a Multiple-Point Prior Model. Mathematical Geology, 38(5):591-610.
- LYSTER S., DEUTSCH C.V., ORTIZ J.M. 2004. Short Note: Some Implementation Aspects of Multiple-Point Simulation. Edmonton, CCG Annual Report Papers, 6p. (Internal Report).
- MARIETHOZ G., CAERS J. 2015. Multiple-point Geostatistics: Stochastic Modeling with Training Images. John Wiley & Sons, Chichester, 376p.
- MARIETHOZ G., RENARD P., STRAUBHAAR J. 2010. The Direct Sampling Method to Perform Multiple-Point Geostatistical Simulations. Water Resources Research, 46(11).
- MORETTIN P.A. 1999. Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas de Séries Temporais. EDUSP. 320p.
- MUSTAPHA H., CHATTERJEE S., DIMITRAKOPoulos R., GRAF T. 2013. Geologic Heterogeneity Recognition Using Discrete Wavelet Transformation for Surface Flow Solute Transport Simulations. Advances in Water Resources, 54: 22-37.
- ORTIZ J.M. 2003 Selected Aspects of Multiple-Point Statistics. University of Alberta, CCG Annual Report Papers, 30p. (Internal Report).
- STREBELLE S. 2002. Conditional Simulation of Complex Geological Structures Using Multiple-Point Statistics. Mathematical Geosciences, 34(1):1-21.
- TAKAFUJI E.H.M. 2015. Estudo Comparativo Entre a Simulação Sequencial Gaussiana e a Simulação Baseada em Wavelets Aplicado a Quantificação de Minério de Cu em um Depósito Sintético. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Recursos Minerais e Hidrogeologia, Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, 102p.
- TAKAFUJI E.H.M., ROCHA M.M., RAMOS G.Z., SILVA L.A.U. 2017. Simulação estocástica aplicada a um banco de dados sintético de cobre. Geologia USP: Série Científica 17(2):247-256.
- TAKAFUJI E.H.M., ROCHA M.M., RAMOS G.Z. 2018. Estudo comparativo dos métodos de simulação SNE-SIM e FILTERSIM – aplicado a um modelo sintético de cobre. Boletim Paranaense de Geociências 74 (1): 37-46.
- YAHYA W.J. 2011. Image reconstruction from a limited number of samples: A matrix-completion-based approach. Ph.D. thesis. Department of Electrical and Computer Engineering, McGill University, 98p.
- ZHANG T., SWITZER P., JOURNEL A. 2006. Filter-Based Classification of Training Image Patterns for Spatial Simulation. Mathematical Geosciences, 38(1):63-80.