

UM PROBLEMA DE PERTURBAÇÃO DA FRONTEIRA COM CONDIÇÕES DE SIMETRIA

Antonio Luiz Pereira

IME - USP

1. INTRODUÇÃO

Consideremos o problema de auto-valor:

$$* \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & u \neq 0 \end{cases}$$

Michelletti [2] provou que para a "maioria" (no sentido de categoria de Baire) dos domínios Ω de classe C^3 , todos os auto-valores do problema acima são simples.

Suponhamos, porém, que exigimos certas condições de simetria para as regiões Ω . Mais precisamente, seja Γ um sub-grupo do grupo ortogonal $O(n)$ e imponhamos $\gamma(\Omega) = \Omega$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

No caso $\Gamma = \{I, J\}$, $J \neq I_d$, $J^2 = I_d$, Henry [1] mostrou que o resultado acima ainda vale.

Vamos considerar aqui o caso $\Gamma = \{I, J, J^2\}$, $J^2 \neq I_d$, $J^3 = I_d$. Um argumento simples mostra que o resultado já não vale neste caso; na verdade em toda região Ω satisfazendo esse tipo de simetria existem auto-valores múltiplos do problema (*). O argumento é o seguinte:

Consideremos os espaços:

$$X_1 = \{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \mid u \circ J = u\} \quad Y_1 = \{u \in L_2(\Omega) \mid u \circ J = u\}$$

$$X_2 = \{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \mid u + u \circ J + u \circ J^2 = 0\} \quad Y_2 = \{u \in L_2(\Omega) \mid u + u \circ J + u \circ J^2 = 0\}$$

Temos:

$$H^2 \cap H_0^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2$$

Então $X_2 \neq \{0\}$ e

$-\Delta|_{X_2}: X_2 \rightarrow Y_2$ possui um auto-valor λ .

Mas se $v \in X_2$ é auto-função associada a λ , $v \circ J$ também o é.

Como v e $v \circ J$ são L.I., λ não pode ser auto-valor simples.

2. COMPLEXIFICAÇÃO

O argumento acima mostra que o melhor que se pode esperar genericamente é que todos os auto-valores de (*) tenham multiplicidade ≤ 2 .

É mais conveniente tratar o problema em espaços complexos. Seja então:

$$H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid R_e u \text{ e } \operatorname{Im} u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)\}$$

(considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$).

Temos agora o problema de auto-valor:

$$(**) \begin{cases} (\Delta + \lambda) u = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \neq 0, \quad J\Omega = \Omega. \end{cases}$$

Seja $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo sobre $\Omega_h = h(\Omega)$.

Definimos a aplicação composição:

$$h^*: C^K(\Omega_h) \rightarrow C^K(\Omega) \quad \text{por:}$$

$$h^*: \phi \rightarrow \phi \circ h$$

Se Δ_{Ω_h} é o operador laplaciano em Ω_h ,

$$h^*(\Delta_{\Omega_h} + \lambda I)h^{*-1} \quad \text{é um operador em } \Omega.$$

Dessa maneira podemos transformar o problema (**). em Ω_h em um problema na região (fixada) Ω .

3. DECOMPOSIÇÃO EM SUBESPAÇOS INVARIANTES

Sejam:

$$X_0(\Omega, \mathbb{C}) = \{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \circ J = u\}$$

$$X_1(\Omega, \mathbb{C}) = \{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \circ J = e^{i2\pi/3} u\}$$

$$X_2(\Omega, \mathbb{C}) = \{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \circ J = e^{-i2\pi/3} u\}$$

e

$$H = \{h \in \text{Diff}^m(\Omega) \mid h \circ J = Jh\}$$

$$\text{Temos: } H^2 \cap H^1_0(\Omega, \mathbb{C}) = X_0 \oplus X_1 \oplus X_2$$

A idéia é estudar o problema (**) em cada um dos subespaços e, em seguida, juntar os resultados.

Temos o seguinte:

Teorema 1. Para um conjunto genérico de domínios de classe C^3 satisfazendo $J(\Omega) = \Omega$, todos os auto-valores de (**) são simples quando nos restringimos ao subespaço X_j , $j=0,1,2$

Dem.

$$\text{Seja } F_j: X_j \times \mathbb{C} \times H \longrightarrow Z_j = \{u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \circ J = e^{i2\pi/3} j u\}$$

$$(u, \lambda, h) \longrightarrow (h^*(\Delta + \lambda)h^{-1})u$$

$F_j(h, \dots)$ é operador de Fredholm de índice 1.

Se mostrarmos que 0 é valor regular de F_j seguir-se-á do teorema da transversalidade que 0 é valor regular de $F_j(h, \dots)$ para um conjunto residual de $h_s \in H$ e portanto os auto-valores do problema (**) serão todos simples em $h(\Omega)$, quando nos restringirmos a X_j .

A prova de que 0 é valor regular de F_j é completamente análoga à de Henry em [1] (exemplo 6.1).

4. SEPARAÇÃO DOS AUTO-VALORES MÚLTIPLOS

O teorema 1 mostra que os auto-valores de (**) são simples quando nos restringimos a cada subespaço X_i . Podem, entre-

tanto, existir auto-valores múltiplos associados a auto-funções em diferentes X_{i_s} .

Suponhamos que existe uma região Ω_0 de classe C^3 com $J(\Omega_0) = \Omega_0$ tal que para cada Ω numa vizinhança de Ω_0 existe um auto-valor com multiplicidade 3. Gostaríamos de mostrar que isso leva a uma contradição.

Para uma curva de difeomorfismos da forma:

$$x \rightarrow x + t \dot{h}(x) + o(t) = h(t, x) \quad \text{temos:}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)_{t=0} = - \int_{\Omega_0} \dot{h} \cdot N \left| \frac{\partial u_0}{\partial N} \right|^2 \quad \text{em } X_0$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)_{t=0} = - \int_{\Omega_0} \dot{h} \cdot N \left| \frac{\partial v_0}{\partial N} \right|^2 \quad \text{em } X_1.$$

onde $\lambda(h(t, \Omega))$ é auto-valor de multiplicidade 3 em Ω_t , e u_0, v_0 são auto-funções associadas em X_0 e X_1 respectivamente com

$$\int_{\Omega} |u_0|^2 = \int_{\Omega} |v_0|^2 = 1.$$

Como h pode ser qualquer função par (isto é: satisfazendo $h \circ J = Jh$) devemos ter:

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial N} \right|^2 = \left| \frac{\partial v_0}{\partial N} \right|^2$$

O mesmo vale para cada Ω , C^3 perto de Ω_0 e portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists u \in X_0(\Omega, C) , \exists v \in X_1(\Omega, C) \\ \Delta u + \lambda u = 0 , \Delta v + \lambda v = 0 \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 , v|_{\partial\Omega} = 0 , u \neq 0 , v \neq 0 \\ \int_{\Omega} |u|^2 = 1 , \int_{\Omega} |v|^2 = 1 , B_{\Omega}(u, v) = |\nabla u|^2 - |\nabla v|^2|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

para cada Ω, C^3 próxima de Ω_0 .

Seja $\Omega = h(\Omega_0)$, h difeo C^3 , $\phi = u \circ h = h^*u$, $\psi = v \circ h = h^*v$

Então $\phi, \psi \in X_0(\Omega, C), X_1(\Omega, C)$ respectivamente $\phi \neq 0, \psi \neq 0$

e:

$$\begin{aligned} F(\phi, \psi, \lambda, h) &= (h_*(\Delta + \lambda)h_*^{-1} \phi, h_*(\Delta + \lambda)h_*^{-1} \psi, h^*B_{h(\Omega)}h_*^{-1}(\phi, \psi)) \\ &= (0, 0, 0) \in Z_0(\Omega, C) \times Z_1(\Omega, C) \times Y(\partial\Omega, C) \end{aligned}$$

onde $Y(\partial\Omega, C) = \{u \in L^1(\partial\Omega, C) \mid u \circ J = u\}$

para cada $h \in H = \{h \in \text{Diff}^3(\Omega) \mid h \circ J = Jh\}$

Usando uma forma forte do teorema da transversalidade, devida a Henry [1], para mostrar que isto é impossível basta mostrar que:

$$\dim \{ \text{Im } DF(\phi, \psi, \lambda, h) / \text{Im } \frac{\partial F}{\partial(\phi, \psi, \lambda)} \} = \infty$$

Usando as técnicas descritas no trabalho citado de Henry, o problema acima pode ser reduzido ao problema de mostrar que o operador:

$$\theta \longrightarrow R_e \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial N} \left[\frac{\partial}{\partial N} B_{\Delta}, \frac{\partial \phi}{\partial N} \right] \theta - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial N} \left[\frac{\partial}{\partial N} B_{\Delta}, \frac{\partial \psi}{\partial N} \right] \theta \right\}$$

$H^2(\partial\Omega) \rightarrow L_1(\partial\Omega)$ não tem posto finito.

onde:

$v = B_\Delta g$ é definido por

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$\left[\frac{\partial}{\partial N} B_\Delta, \frac{\partial \phi}{\partial N} \right] \theta = \frac{\partial}{\partial N} B_\Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial N} \theta \right) - \frac{\partial \phi}{\partial N} \cdot B_\Delta \theta$ é o comutador dos

operadores $\frac{\partial}{\partial N} B_\Delta \theta$ e $\theta \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial N} \cdot \theta$

Agora, pode-se mostrar que a parte principal do operador acima é

$$\sum_{i,j=1}^n \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_N}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \phi_N}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\phi}_N}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \bar{\psi}_N}{\partial x_j}(x) \right) \right] \operatorname{V.P.} \int \frac{\partial^2 E(x-y)}{\partial N_x \partial N_y} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \theta(y) dy$$

onde V.P. é o valor principal da Integral acima.

Para que se tenha posto finito é necessário que:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\phi}_N}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\psi}_N}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\psi}_N}{\partial x_j} \right) = 0$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_K}$ indica a derivada na K-ésima direção coordenada no bordo de Ω .

o que junto com a hipótese: $|\phi_N|^2 = |\bar{\psi}_N|^2$ leva (após alguns cálculos) a:

$$\phi = K\psi \quad \text{ou} \quad \phi = K\bar{\psi}, \quad \text{onde } K \text{ é constante.}$$

uma contradição em qualquer caso:

Temos então o seguinte:

Teorema 2. Para um conjunto genérico de regiões Ω de classe C^3 satisfazendo $J(\Omega) = \Omega$ os auto-valores de (**) são no máximo duplos e, além disso, não existem auto-valores associados ao mesmo tempo a auto-funções em $X_0(\Omega, C)$ e $X_1(\Omega, C)$.

5. RETORNO AOS ESPAÇOS REAIS

Seja Ω uma região nas condições do Teorema 2, e λ auto-valor de (**) em Ω .

Temos 2 situações possíveis:

- 1.^a) λ é auto-valor simples associado a uma auto-função ϕ em $X_0(\Omega, C)$
- 2.^a) λ é auto-valor duplo associado a auto-funções ψ e $\bar{\psi}$ em $X_1(\Omega, C)$ e $X_2(\Omega, C)$ respectivamente.

É fácil mostrar que no caso 1.^o, λ é auto-valor simples do problema (*) (com $J\Omega = \Omega$) e no caso 2 λ é auto-valor duplo do problema (*).

Temos então:

Teorema 3. Para um conjunto genérico de regiões de classe C^3 satisfazendo $J(\Omega) = \Omega$, todos os auto-valores de (*) são, no máximo duplos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D.B. Henry; Perturbation of the boundary for boundary value problems of Partial Differential Equations - Minicurso , notas do 22º Seminário Brasileiro de Análise.

- [2] A.M. Michelletti; Perturbazione dello Spettro dell'Operatore di Laplace in relazione ad una variazione del Campo Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Ser. II , v. 26 (1972), p. 151-169.