

# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

## Relatório Técnico

**RT-MAP- 9703**

**K - DECIDIBILIDADE E ESTABILIDADE  
DE PONTOS DE EQUILÍBRIO**

**SÔNIA REGINA LEITE GARCIA**

*Outubro/97*



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**SÃO PAULO — BRASIL**

# K-DECIDIBILIDADE E ESTABILIDADE DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

Sônia Regina Leite Garcia

Departamento de Matemática Aplicada

IME - USP

endereço eletrônico: sonia@ime.usp.br

## 0. Resumo

Neste trabalho estudamos a estabilidade segundo Liapunov de pontos de equilíbrio de sistemas mecânicos não conservativos de  $n$  graus de liberdade. Consideramos um sistema de energia cinética  $T(q, \dot{q})$  sujeito a uma força posicional  $F(q) = -\frac{\partial \pi}{\partial q}(q) + Q(q)$ . Admitimos que  $\pi$  tem um ponto crítico na origem. Mostramos que quando  $\pi$  tem um máximo “suficientemente forte” e  $Q$  se anula na origem com “ordem suficientemente alta” então a origem é um equilíbrio instável do sistema. Dessa forma vemos que nestas condições a força não conservativa  $Q$  não muda o comportamento da origem, relativamente à estabilidade de Liapunov, do sistema conservativo de Lagrangeana  $L = T - \pi$ .

Por outro lado, a situação em que  $\pi$  tem um mínimo na origem é completamente diversa, mesmo na situação em que  $\pi$  é uma forma quadrática definida positiva e  $Q$  se anula com ordem “muito alta” a origem pode ser um ponto de equilíbrio instável do sistema considerado.

## 1. Introdução

Consideraremos aqui sistemas mecânicos determinados por uma energia cinética

$$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

da forma  $T(q, \dot{q}) = \langle B(q)\dot{q} | \dot{q} \rangle$ , onde  $B(q)$  é matriz  $n \times n$  simétrica, definida positiva, de classe  $C^2$  na variável  $q$ , uma energia potencial

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe  $C^2$ , responsável por um sistema de forças conservativo  $-\frac{\partial \pi}{\partial q}$ , e um sistema de forças posicionais (possivelmente não conservativo)

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de classe  $C^1$ .

Suporemos sem perda de generalidade que  $\pi(O) = 0$ .

Suporemos ainda que  $\frac{\partial \pi}{\partial q}(O) = O$  e  $Q(O) = O$ . Assim, o ponto  $q = \dot{q} = O$  será um ponto de equilíbrio do sistema Lagrangeano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \pi}{\partial q} + Q. \quad (1)$$

Nosso objetivo é estudar a estabilidade segundo Liapunov desse ponto de equilíbrio.

**Observação:** Como é usual em mecânica quando estamos trabalhando em  $\mathbf{R}^m$ , o gradiente de  $f$  como função de  $x$  será denotado por  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

## 2. Funções k-decidíveis

Seja  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  uma vizinhança aberta da origem.

**Definição 2.1:** Seja  $k \in \mathbf{N}$ . Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tem jato punctual de ordem  $k$  em  $O$  se existe um polinômio  $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de grau menor ou igual a  $k$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{\|x\|^k} = 0.$$

Quando existe, tal polinômio é único, e será denotado por  $j^k f$  e chamado jato punctual  $k$  de  $f$  em  $O$ , ou simplesmente jato  $k$  de  $f$ .

Uma função  $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$  tem jato punctual de ordem  $k$  em  $O$  se cada componente de  $g$  tiver jato punctual de ordem  $k$  em  $O$ . Neste caso, se  $g = (g_1, \dots, g_m)$  denotaremos por  $j^k g$  a função de componentes polinomiais  $(j^k g_1, \dots, j^k g_m)$ .

**Definição 2.2:** Seja  $k \in \mathbf{N}^*$ . Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  é dita k-decidível se

- (i)  $f$  tem jato punctual de ordem  $k$  em  $O$ ,
- (ii) Para toda  $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $j^k g = j^k f$ , tem-se que  $f$  e  $g$  têm mesmo comportamento local quanto a extremo em  $x = O$ .

Pode-se mostrar que se  $f$  for k-decidível então ou  $f$  tem máximo local estrito em  $O$ , ou  $f$  tem mínimo local estrito em  $O$ , ou  $f$  não tem nem máximo nem mínimo local em  $O$ .

**Nota:** O conceito de k-decidibilidade foi introduzido por A. Barone-Netto em 1980, em sua tese de livre-docência (ver [1]).

Algumas propriedades envolvendo k-decidibilidade encontram-se em [3]. Entre elas, destacamos o resultado seguinte, que será útil em nosso trabalho.

**Lema 2.1:** Seja  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  uma vizinhança da origem. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial q}$  tem jato punctual de ordem  $k-1$  na origem.

Então  $f$  tem jato punctual de ordem  $k$  na origem e  $j^{k-1} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (j^k f)$ .

## 3. Energias potenciais k-decidíveis

O uso de k-decidibilidade da energia potencial para obter resultados sobre estabilidade de sistemas mecânicos tem se restringido, até o momento, a sistemas conservativos (ver [3]).

Os resultados devidos a Liapunov que afirmam, no caso de sistemas conservativos, que

*Se a matriz hessiana de  $\pi$  na origem é  
definida positiva então a origem é estável*

e que

*Se a matriz hessiana de  $\pi$  na origem tem um autovalor negativo então a origem é instável*

podem ser rerepresentados respectivamente nas formas

*Se  $\pi$  tem mínimo 2-decidível na origem então a origem é estável*

e

*Se  $\pi$  é 2-decidível e não tem mínimo então a origem é instável.*

Mais geralmente, valem os resultados abaixo, o primeiro devido a Liapunov (ver [4]) e o segundo de Moauro & Negrine (ver [5]):

**Proposição 3.1:** Se  $\pi$  é de classe  $C^k$ , tem mínimo  $k$ -decidível na origem e  $j^k\pi$  é homogêneo então a origem é estável.

**Proposição 3.2:** Se  $\pi$  é de classe  $C^k$ , é  $k$ -decidível, não tem mínimo na origem e  $j^k\pi$  é homogêneo então a origem é instável.

Resultados mais sofisticados sobre  $k$ -decidibilidade e estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas mecânicos conservativos, especialmente no caso de dois graus de liberdade, podem ser encontrados em [3].

#### 4. Algumas questões

É razoável perguntar, por exemplo, se valem resultados “análogos” às proposições da seção anterior para sistemas mecânicos não conservativos.

Em primeiro lugar, é preciso estabelecer um significado mais preciso para “resultados análogos”.

Consideremos o sistema (1) no caso particular em que  $\pi$  é de classe  $C^k$  e existe  $\pi_0$  de classe  $C^k$  tal que  $Q = -\frac{\partial \pi_0}{\partial q}$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $\pi_0(0) = 0$ . Neste caso,  $Q$  tem jato puntual de ordem  $k-1$ ,  $\pi_0$  tem jato puntual de ordem  $k$  e segue do lema 2.1 que  $\frac{\partial}{\partial q}(j^k\pi_0) = -j^{k-1}Q$ . Assim, se supusermos ainda que  $j^{k-1}Q = 0$  concluímos que  $j^k\pi_0 = 0$  e que  $j^k(\pi + \pi_0) = j^k\pi$ . Podemos então aplicar as proposições 3.1 e 3.2 ao sistema conservativo de energia potencial  $\pi + \pi_0$  obtendo imediatamente que neste caso

*Se  $\pi$  tiver mínimo  $k$ -decidível,  $j^k\pi$  for homogêneo e  $Q = -\frac{\partial \pi_0}{\partial q}$  tiver jato puntual de ordem  $k-1$  nulo, então a origem é estável.*

e

*Se  $\pi$  for  $k$ -decidível, não tiver mínimo,  $j^k\pi$  for homogêneo e  $Q = -\frac{\partial \pi_0}{\partial q}$  tiver jato puntual de ordem  $k-1$  nulo, então a origem é instável.*

Isto nos leva a elaborar as seguintes questões:

**Questão 4.1:** Se  $\pi$  tiver mínimo  $k$ -decidível,  $j^k \pi$  for homogêneo e  $Q$  tiver jato puntual de ordem  $k - 1$  nulo, a origem será estável?

**Questão 4.2:** Se  $\pi$  for  $k$ -decidível, não tiver mínimo,  $j^k \pi$  for homogêneo e  $Q$  tiver jato puntual de ordem  $k - 1$  nulo, a origem é instável?

## 5. Resposta à questão 4.1

A primeira coisa que nos chama a atenção é que a questão 4.1 nem sempre tem resposta afirmativa, mesmo no caso em que  $k = 2$ . A seguir apresentaremos um exemplo que mostra isso.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $f(0) > 0$ .

Sejam  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\pi(x, y) = \frac{1}{2}f(0)(x^2 + y^2) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \begin{pmatrix} -x[f(x) - f(0)] \\ -y[f(x) - f(0)] \end{pmatrix}.$$

Claramente  $\pi$  tem mínimo 2-decidível, e  $j^1 Q = 0$ .

Se considerarmos a energia cinética  $T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ , as equações de Lagrange do sistema ficam

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x f(x), \\ \ddot{y} &= -y f(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Em [2], Barone-Netto & Zampieri, estudando sistemas de equações da forma (2), mostraram que se  $f$  for par e não for constante em nenhuma vizinhança da origem, então a origem será instável.

Observamos ainda que existem tais exemplos mesmo com  $\pi$  e  $Q$  de classe  $C^\infty$  e  $j^m Q = 0$  para todo natural  $m$ .

## 6. Um resultado sobre a questão 4.2

No que diz respeito à questão 4.2, conseguimos uma resposta afirmativa no caso em que  $\pi$  tem máximo e as outras hipóteses estão satisfeitas. Na verdade, nosso resultado é um pouco mais geral, mas só responde a questão quando  $\pi$  tem extremo na origem.

Vale a pena ressaltar que não exigiremos nesta seção que  $\pi$  tenha classe  $C^k$ , ou que  $Q$  tenha classe  $C^{k-1}$ .

**Lema 6.1:** Se existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\left\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} - Q|_q, q \right\rangle < 0, \quad \text{para cada } q \in B_\epsilon - \{0\},$$

então a origem  $q = \dot{q} = 0$  de (1) é instável.

**Prova:** Seja

$$V: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(q, \dot{q}) \mapsto V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle q | B(q) \dot{q} \rangle$$

Esta função assume valores estritamente positivos em pontos arbitrariamente próximos da origem.

Por outro lado, em relação às soluções de (1),

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \langle \dot{q} | B(q) \dot{q} \rangle + \frac{1}{2} \langle q | \frac{d}{dt} (B(q) \dot{q}) \rangle \\ &= T + \frac{1}{2} \langle q | \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \rangle \\ &= T + \frac{1}{2} \langle q | \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial \pi}{\partial q} + Q \rangle \\ &= T + \frac{1}{2} \langle q | \frac{\partial T}{\partial q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q | \frac{\partial \pi}{\partial q} - Q \rangle. \end{aligned}$$

Como cada componente de  $\frac{\partial T}{\partial q}$  é uma forma quadrática em  $\dot{q}$  com coeficientes de classe  $C^2$  em  $q$  segue que existe  $C(q)$  matriz  $n \times n$ , de classe  $C^1$  em  $q$ , satisfazendo

$$C(O) = O \quad \text{e} \quad \langle q | \frac{\partial T}{\partial q} \rangle = \langle \dot{q} | C(q) \dot{q} \rangle.$$

Além disso, como  $B(O)$  é simétrica definida positiva e depende continuamente de  $q$ , e  $C(O) = O$ , segue que existe  $\delta > 0$  tal que

$$T + \frac{1}{2} \langle q | \frac{\partial T}{\partial q} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{q} | [B(q) + C(q)] \dot{q} \rangle > 0, \quad \forall (q, \dot{q}) \in B_\delta \times \mathbf{R}^n, \quad \dot{q} \neq O.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que  $\delta < \epsilon$ .

Assim,

$$\dot{V} > 0, \quad \forall (q, \dot{q}) \in B_\delta \times \mathbf{R}^n, \quad (q, \dot{q}) \neq (O, O).$$

Logo  $V$  é função de Liapunov para instabilidade da origem de (1). ■

**Proposição 6.1:** Suponha que para algum  $k \geq 2$ ,  $\frac{\partial \pi}{\partial q}$  tem jato puntual de ordem  $k-1$  e que  $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} | q \rangle$  é  $k$ -decidível e tem máximo local estrito em  $q = O$ . Suponha ainda que  $Q$  tem jato puntual de ordem  $k-1$  nulo.

Então a origem  $q = \dot{q} = O$  de (1) é instável.

**Prova:**

Como  $Q$  tem jato punctual de ordem  $k - 1$  nulo, segue imediatamente que  $\langle Q|q \rangle$  tem jato punctual de ordem  $k$  e que  $j^k \langle Q|q \rangle = 0$ . Assim, como  $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q}|q \rangle$  é  $k$ -decidível e tem máximo local estrito em  $q = O$ , segue que o mesmo ocorre com

$$\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} - Q|q \rangle = \langle \frac{\partial \pi}{\partial q}|q \rangle - \langle Q|q \rangle.$$

A tese segue então do lema anterior. ■

**Teorema 6.1:** Suponha que para algum  $k \geq 2$ ,  $\frac{\partial \pi}{\partial q}$  tem jato punctual de ordem  $k - 1$ ,  $\pi$  é  $k$ -decidível e a representação de  $j^k \pi$  na forma

$$j^k \pi = \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k$$

com  $\pi_i$  homogêneo de grau  $i$  é tal que  $\pi_i(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $2 \leq i \leq k$ . Suponha ainda que  $Q$  tem jato punctual de ordem  $k - 1$  nulo.

Então a origem  $q = \dot{q} = O$  de (1) é instável.

**Prova:**

Das hipóteses segue que  $\pi$  tem máximo local estrito  $k$ -decidível na origem. Segue também que  $\frac{\partial R}{\partial q}$  tem jato punctual de ordem  $k - 1$  na origem, e portanto usando o lema 2.1 obtemos

$$j^{k-1} \frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (j^k R) = O.$$

Logo,  $\langle \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle$  tem jato punctual de ordem  $k$  e

$$j^k \langle \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \pi}{\partial q}|q \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial q} (\pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k) + \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle \\ &= 2\pi_2 + 3\pi_3 + \cdots + k\pi_k + \langle \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle \\ &= \pi + \langle \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle + \pi_2 + 2\pi_3 + \cdots + (k-1)\pi_k. \end{aligned}$$

Como  $\pi$  é  $k$ -decidível e tem máximo local estrito na origem,  $j^k \langle \frac{\partial R}{\partial q}|q \rangle = 0$  e  $\pi_i(q) \leq 0$  para todo  $q \in \mathbf{R}^n$ , segue que

$$j^k \langle \frac{\partial \pi}{\partial q}|q \rangle = j^k \pi + \pi_2 + 2\pi_3 + \cdots + (k-1)\pi_k$$

e portanto  $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} | q \rangle$  é  $k$ -decidível e tem máximo local estrito em  $q = O$ .

O resultado segue da proposição anterior. ■

## 7. Comentários finais.

A proposição 6.1 estende parcialmente, para sistemas não conservativos, o seguinte resultado (ver [4]):

*Se  $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} | q \rangle$  tem máximo local estrito na origem  
(e  $Q = O$ ) então a origem é instável.*

O teorema 6.1 é um resultado do mesmo tipo daquele já presente na literatura (ver [4]) que afirma que

*Se  $\pi$  é analítica,  $\pi = \sum_{i=2}^{\infty} \pi_i$ ,  
onde cada  $\pi_i$  é um polinômio homogêneo de grau  $i$ ,  
e existe  $k \geq 2$  tal que  $\pi_i(q) \geq 0$  se  $2 \leq i \leq k-1$ , e  $\pi_i(q) \leq 0$  se  $k+1 \leq i$  (e  $Q = O$ )  
então a origem é instável.*

## 8. Bibliografia.

- [1] Barone-Netto, A., Jet-Detectable Extrema, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 92, (1984).
- [2] Barone-Netto, A & Zampieri, G., Attractive central forces may yield Liapunov instability, *Dynamical Systems and Partial Differential Equations*, Proceedings of VII ELAM, (1986), 105-112.
- [3] Garcia, M.V.P., Estabilidade de Liapunoff e  $k$ -Decidibilidade *Relatório Técnico do Depto de Matemática Aplicada*, IME-USP, nº 9202 (1992).
- [4] Habets, P., Laloy, M., & Rouche, N. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*, Applied Mathematical Sciences 22, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1977).
- [5] Moauro, V. & Negrine, P. On the inversion of Lagrange-Dirichlet Theorem, *Differential and Integral Equations* (1991).

**RELATÓRIOS TÉCNICOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**

**1997**

**RT-MAP-9701 - Sebastian Sachse & Ralf Weixler**  
**The Quantized Universal Enveloping Algebras  $U_q(\mathfrak{iso}(N))$ ,  $U_q(\mathfrak{e}(3,1))$  and  $U_q(\mathfrak{e}(N))$  and the Representation Theory for  $U_q(\mathfrak{e}(3))$**   
Janeiro de 1997 - São Paulo - IME-USP - 14 pg.

**RT-MAP-9702 - Paulo D. Cordaro & Jean Marie Trépreau**  
**On the Solvability of Linear Partial Differential Equations in Spaces of Hyperfunctions**  
Julho de 1997 - São Paulo - IME-USP - 35 pg.