



# CONTROLADOR PID APLICADO AO CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO

**Melkzedekue de Moraes Alcântara Calabrese Moreira, Dinâmica e Mecatrônica, melkzedekue@usp.br**  
**Denis Mosconi, Dinâmica e Mecatrônica, denis.mosconi@usp.br**

**Samuel Ricardo da Silveira, Processamento de Sinais e Istrumentação, ssilveira7447@gmail.com**

**Felipe Schiavon Inocêncio de Sousa, Sistemas Elétricos de Potência, felipesisousa@gmail.com**

**Tiago Mathes Nordi, Processamento de Sinais e Istrumentação, tmnordi@usp.br**

**Igor Nazareno Soares, Sistemas Elétricos de Potência, igor.soares@usp.br**

**Adriano Almeida Gonçalves Siqueira, Dinâmica e Mecatrônica, siqueira@sc.usp.br**

**Resumo.** O princípio de funcionamento do pêndulo invertido encontra-se em diversas aplicações reais, tais como: o problema clássico de controle da posição de um foguete, da altitude de um míssil durante os estágios iniciais de seu lançamento, como também o controle do veículo comercial tipo Segway®. O pêndulo invertido, por apresentar particularidades tais como dinâmica não linear, acoplamentos elétricos e mecânicos e atrito entre componentes, torna-se um ótimo problema para aplicar conceitos das áreas de modelagem e controle. Este trabalho têm como objetivo projetar um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) para controlar o pêndulo na sua posição vertical, considerada um zona de equilíbrio instável. Será utilizado também o software Matlab® para obtenção das funções transferências do sistema, e Simulink® para integrar o sistema (pêndulo e controlador) para submeter o sistema a扰动, com o intuito de demonstrar a eficácia do controlador para manter o pêndulo na posição vertical.

**Palavras-chave:** Pêndulo Invertido. Controle PID. Modelagem e Controle.

## 1. INTRODUÇÃO

A instabilidade do pêndulo invertido é um caso bastante conhecido na mecânica clássica, e já foi alvo de estudo de inúmeros trabalhos acadêmicos em nível de graduação e pós-graduação. Os conceitos de modelagem e controle do pêndulo invertido também são discutidos nas principais referências bibliográficas de sistemas de controle clássico e moderno. As aplicações de sistemas baseado em pêndulo invertido são encontradas em diversas situações como o problema de controlar a altitude de um míssil durante os estágios iniciais do lançamento (Dorf, 2013), controle da posição de um foguete na fase de lançamento (Ogata, 2010) e controle do veículo comercial do tipo Segway® conforme ilustrado na Figura (1), que é mantido na posição vertical por um sistema de controle realimentado (Franklin, 2013).



Figura 1. Veículo de transporte Segway®.

Disponível em <<https://www.segway.com/segway-x2-se/>> Acesso em 18 de agosto de 2021.

## 2. O PÊNDULO INVERTIDO

O pêndulo invertido, por se tratar de um sistema de natureza instável é amplamente explorado nas áreas de automação, robótica e mecatrônica, torna-se possível propor diversos tipos de controladores, com o intuito de equilibrar a haste do pêndulo na posição vertical. O sistema proposto neste trabalho, consiste de uma haste (pêndulo) articulada, que encontra-se acoplada pela articulação a um carro que é submetido a uma força horizontal. Essa força, promove a movimentação desse carro com objetivo de estabilizar a haste na posição vertical, de maneira a transformar um problema instável em estável em torno de um valor de referência.

## Portal de Eventos Científicos da Escola de Engenharia de São Carlos

Anais eletrônicos do 5º Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Disponível em: <http://eventos.eesc.usp.br/sipgem2021>

 **SBI** Serviço de Biblioteca  
 Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes



### 3. MODELO MATEMÁTICO

Na Fig. (2), tem-se o esquemático do pêndulo invertido usado neste trabalho e também o diagrama de corpo livre (DCL) do sistema.

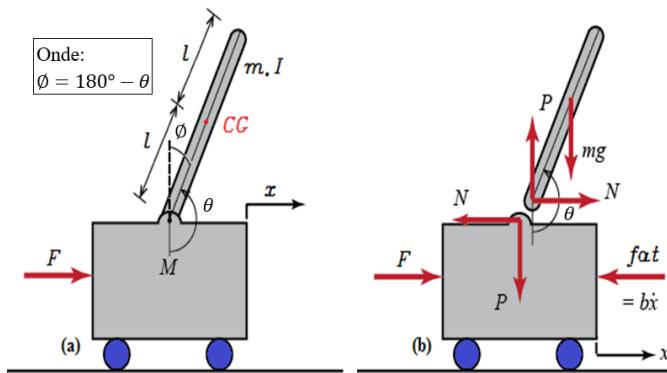


Figura 2. (a) Pêndulo invertido sobre um carro, (b) DCL do pêndulo invertido. Fonte: Adaptado de (Ctms, 2021).

Na Fig. (2). (a)  $x$  é a posição do carro na horizontal,  $\theta$  o ângulo do pêndulo com a vertical,  $F$  a força aplicada ao carro e  $CG$  é o centro de gravidade. E na Fig. (2) (b)  $P$  é a reação vertical,  $N$  é a reação horizontal e  $fat$  é a força de atrito, que nesse caso será aproximado por um amortecimento viscoso. Na Tab. (1) tem-se os dados das constantes utilizadas nesse problema:

Tabela 1: Dados usados no pêndulo invertido. Fonte: Próprio autor.

Nome da variável	Símbolo	Unidade [SI]
Massa do carro	$M$	$0,2 [k_g]$
Massa do pêndulo	$m$	$0,050 [k_g]$
Amortecimento	$b$	$0,1 [N \cdot s/m]$
Momento de inércia do pêndulo	$I$	$0,0014 [k_g \cdot m^2]$
Distância do eixo de rotação ao $CG$	$l$	$0,25 [m]$

Admitindo que o  $CG$  da haste do pêndulo no seu centro geométrico, e que a haste é homogênea, basta realizar o somatório das forças que atuam na direção horizontal do carro e tem-se a seguinte equação diferencial Eq. (1):

$$F = M\ddot{x} + b\dot{x} + N \quad (1)$$

Aplicando o somatório de forças do DCL do pêndulo invertido na direção horizontal, tem-se a expressão para a força de reação  $N$  pela seguinte equação diferencial Eq. (2):

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2)$$

Substituindo a Eq. (2) em (1) tem-se Eq. (3):

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (3)$$

Aplicando o somatório de forças do DCL do pêndulo invertido na direção vertical, tem-se a seguinte equação diferencial Eq. (4):

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (4)$$

Multiplicando a Eq. (4) por  $l$  tem-se:

$$Pl \sin \theta + Nl \cos \theta - mgl \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta \quad (5)$$



Como pretende-se manter o pêndulo na posição vertical para cima ( $\theta = \pi$ ), pode-se admitir que  $\theta_{(t)}$  e  $\dot{\theta}_{(t)}$  sejam grandezas suficientemente pequenas. Dessa forma, admite-se que  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$  e  $\dot{\theta}^2 \cdot \theta = 0$ . Essa suposição é razoavelmente válida uma vez que se pretende controlar o pêndulo entre  $\pm 15^\circ$  mantendo-se na região de comportamento linear. Dessa maneira  $\emptyset$ , conforme Fig. (2), representa o desvio do pêndulo da posição de equilíbrio, ou seja,  $\theta = \pi + \emptyset$ . E admitindo que as grandezas são suficientes pequenas tem-se:

$$\cos \theta = \cos(\pi + \emptyset) \approx -1; \quad \sin \theta = \sin(\pi + \emptyset) \approx -\emptyset; \quad \dot{\theta}^2 = \dot{\emptyset}^2 \approx 0 \quad (6); (7); (8)$$

Substituindo as aproximações consideradas, realizando manipulações algébricas, e substituindo  $F$  por  $u$  nas equações diferenciais não-lineares, tem-se o sistema de equações diferenciais do pêndulo linearizadas Eqs. (9) e (10):

$$(M+m)\ddot{x} + b\ddot{x} - ml\ddot{\emptyset} = u \quad (9)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\emptyset} - mgl\emptyset = ml\ddot{x} \quad (10)$$

#### 4. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Para se obter a função de transferência, aplica-se a transformada de Laplace nas equações (9) e (10), e admite-se condições iniciais nulas. E realizando-se manipulações algébricas subsequentes nessas equações tem-se a função transferência do  $P_{pêndulo(s)}$  da seguinte forma Eqs. (11) e (12):

$$P_{pêndulo(s)} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q} s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q} s^1 - \frac{bmgl}{q}} \quad [rad/N] \quad (11)$$

Em que:

$$q = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2] \quad (12)$$

Após obter-se o modelo matemático do pêndulo invertido, via equações de equilíbrio, desenvolveu-se um algoritmo em MATLAB®, e substitui os valores dos parâmetros da Tabela 1 e obteve-se a função transferência de pêndulo Eq. (13):

$$P_{pêndulo(s)} = \frac{1,091 \cdot 10^{-9} s}{2,193 \cdot 10^{-10} s^3 + 2,618 \cdot 10^{-12} s^2 - 5,458 \cdot 10^{-9} s^1 - 6,421 \cdot 10^{-11}} \quad (13)$$

#### 5. CARACTERÍSTICAS DOS GANHOS $K_p$ , $K_i$ e $K_d$ DOS CONTROLADORES PID

Os ganhos do controlador PID, são dados pelos parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  chamados respectivamente de ganho proporcional, ganho integral e ganho derivativo. Dentre as características de cada um desses parâmetros tem-se:

- $K_p$ : Redução do tempo de resposta a uma dada entrada em um sistema, quando comparado a um sistema de controle simples do tipo *on/off*. Esse ganho tem por característica a redução do erro em estado estacionário, porém nunca eliminará esse erro totalmente;
- $K_i$ : Eliminação total do erro em estado estacionário. Entretanto tem efeito tornar a resposta do sistema mais lenta a uma dada entrada, e também aumentar o *overshoot* em uma resposta em regime transitório (degrau);
- $K_d$ : Aumenta a agilidade para convergir o sinal para o valor de referência (diminuindo um pouco o tempo de resposta). Também aumenta a estabilidade do sistema, promovendo uma redução no *overshoot* na resposta em regime transitório. Entretanto, pode ser problemático em sistemas com sensores com alto nível de ruído, devido a sensibilidade da derivada nesses casos;

Em sistemas com controladores PID, PI (Proporcional-Integral) e PD (Proporcional-Derivativo), torna-se necessário a adição de filtros. Pois segundo Skogestad (2007), a parcela derivativa tem o efeito de gerar uma ação de controle proporcional à taxa de variação do erro, ou seja, estima a tendência de aumento ou diminuição do erro futuro. Esse efeito, de antecipação, acarreta no aumento da velocidade de correção do processo, quando se detecta variações no sinal do erro.

Com isso, o  $K_p$  torna-se bastante sensível a erros de alta frequência, como ruídos no sistema e também mudanças no valor de referência da variável manipulada. Sobre os ruídos inerentes ao sistema, Castrucci (2011) afirma que tal evento é algo inevitável em todo e qualquer sistema real. E o termo associado a derivada do controlador PID produz um ganho que tende ao infinito em altas frequências. Esses ganhos elevados podem levar a saturação dos elementos finais de controle como atuadores e amplificadores. Em virtude disso, é comum a inserção de filtros que neutralizem o efeito de instabilidade

**Portal de Eventos Científicos da Escola de Engenharia de São Carlos**



causado pelo termo associado a derivada do controlador PID. Na Tab. (2), tem-se representado um resumo com a influência de cada um dos ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  nos parâmetros de desempenho de um controlador PID.

Tabela 2: Influência dos ganhos do controlador PID nos parâmetros de desempenho de um sistema de controle. Fonte: Adaptado de (CTMS, 2021).

Ganhos	Tempo de subida $t_s$	Sobressinal $M_p$	Tempo de acomodação $t_a$	Erro estacionário
$K_p$	Diminui	Aumenta	Pouca alteração	Diminui
$K_i$	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
$K_d$	Pouca alteração	Diminui	Diminui	Não se altera

## 6. OBTENÇÃO DO CONTROLADOR PID

De posse da função de transferência do pêndulo invertido, montou-se o diagrama de blocos no *Simulink®* e obteve-se os parâmetros do controlador PID via *PID tuning*. Para avaliar a resposta do sistema, bem como a eficácia do controlador, adicionou-se uma perturbação no sistema, alternando pulsos discretos de amplitude positiva e negativa, análogo ao proposto por Vasconcelos (2012). Devido adotar-se a referência em 180° o pêndulo na posição vertical, projetou-se um *Pré-filtro*, de maneira a simular a colocação do pêndulo invertido manualmente na posição de referência. A partir disso, a lei de controle entra em operação para testar o controlador. Na Eq. (14) e na Fig. (3) tem-se, respectivamente, a função transferência do Pré-filtro, e o diagrama de blocos do sistema no *Simulink®*.

$$\text{Pré - Filtro}(s) = \frac{(5899 \cdot 0.635)}{(s^2 + 5899 + 0.635 \cdot s + 5899 \cdot 0.635)} = \frac{3746}{s^2 + 0.635 \cdot s + 9645} \quad (14)$$

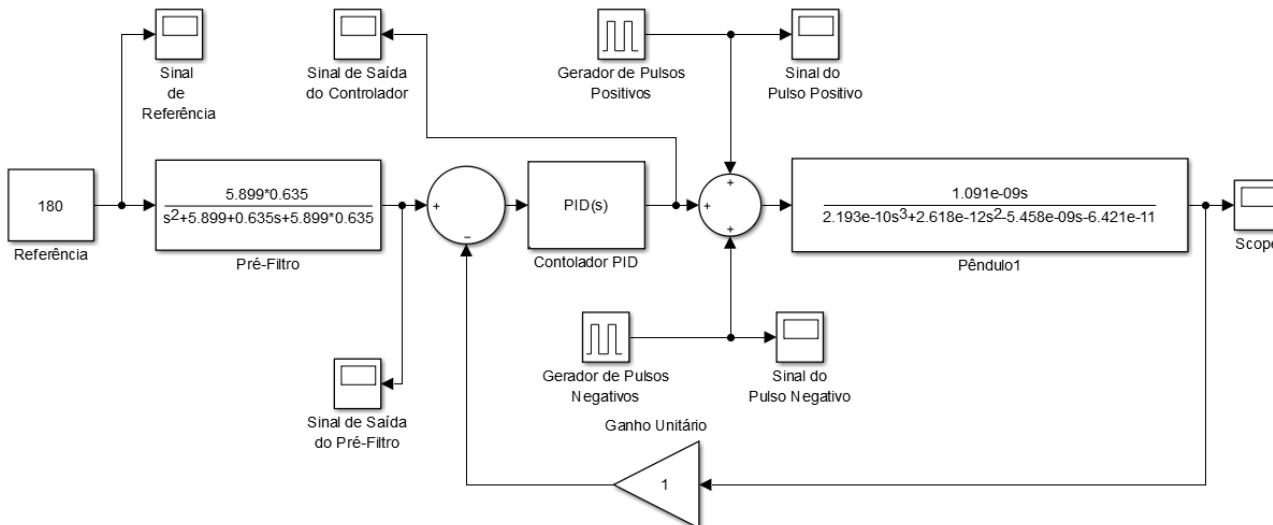


Figura 3. Diagrama de blocos do sistema. Fonte: Próprio autor.

Nas Figs. (4) e (5), tem-se, respectivamente, a resposta da lei de controle quando submetida a perturbações dos pulsos unitários negativo e positivo com defasagem de 10 segundos, e o gráfico do comportamento do sistema em detalhe.

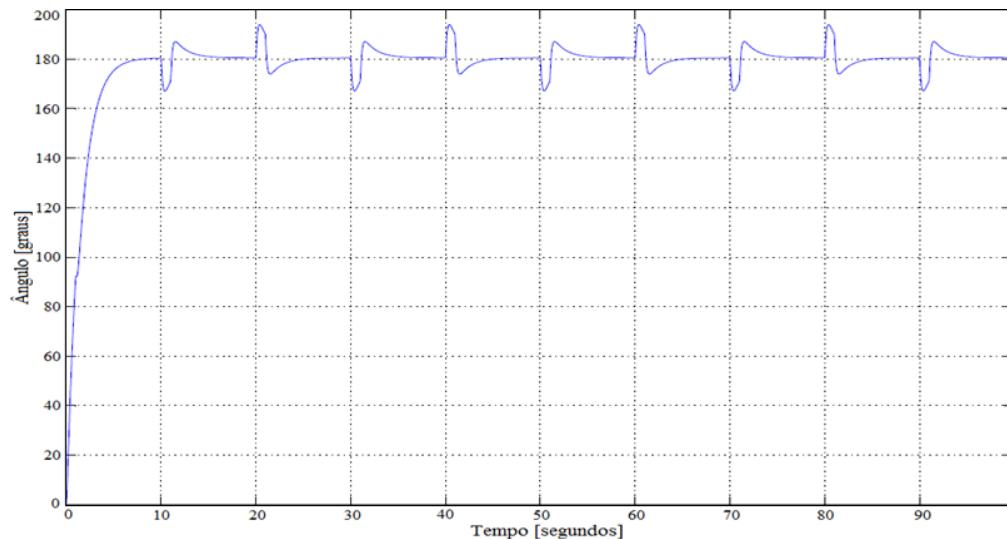


Figura 4. Resposta do sistema com controlador PID e Pré-Filtro. Fonte: Próprio autor.

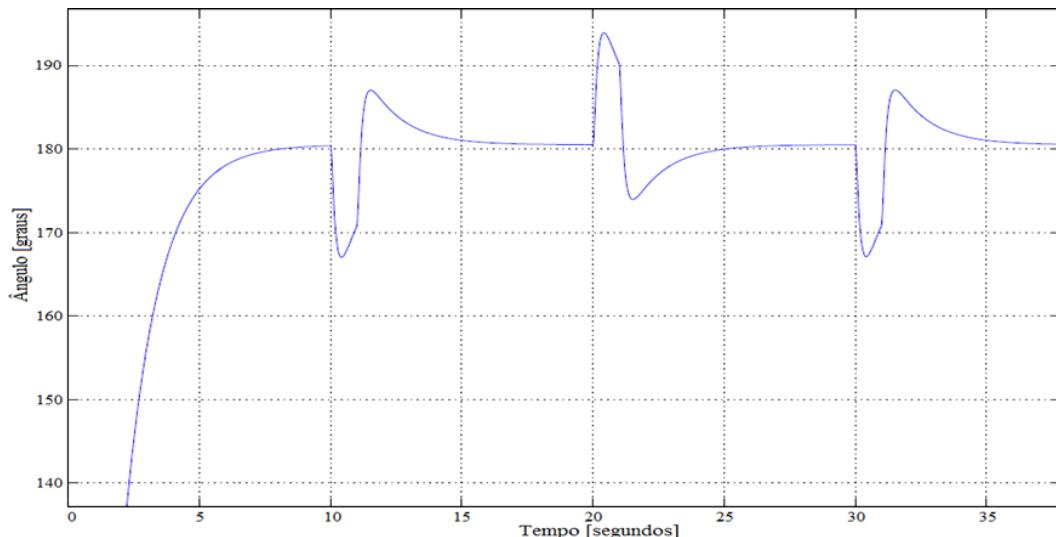


Figura 5. Resposta do sistema com controlador PID e Pré-Filtro em detalhe. Fonte: Próprio autor.

## 7. CONCLUSÕES

O pêndulo invertido é considerado um problema clássico, estudado nos principais livros textos de sistemas de controle. Por se tratar de um sistema de natureza instável, torna-se possível a aplicação de teoria de sistemas de controle para se tornar o pêndulo estável em algumas regiões. Dentre as técnicas de controle o controlador do tipo PID além de ser muito estudado, é amplamente aplicado nos mais diversos seguimentos da indústria como automobilística, aviação, máquinas ferramentas, alimentícias, controle de processos, controle de posição, velocidade, aceleração, entre outras.

Dessa forma, para este trabalho, o controlador PID mostrou-se capaz de controlar a posição do pêndulo invertido, que possui natureza instável, conferindo a esse um comportamento estável dentro da região de referência de 180°, com uma leve oscilação de  $\pm 3^\circ$  dentro dessa região, e não ultrapassando a zona de linearidade de  $\pm 15^\circ$ . No entanto, os parâmetros do controlador podem ser otimizados, pois quando submetido aos distúrbios, demorava-se quase 5 segundos para retornar ao valor de referência.

Entretanto, esse trabalho ilustra somente uma simplificação de um sistema real. Pois, uma solução mais realista para simular o comportamento real de um pêndulo invertido, obtendo-se um modelo mais refinado, deveria considerar, por exemplo, parâmetros adicionais, tais como: inserção das plantas de atuadores, como os motores de movimentação do



carro e haste; sensores como sensor de posição do carro e haste; consideração do atrito das partes mecânicas, entre outros. Além disso, para projetar um controlador para um pêndulo invertido, outras técnicas, como método do lugar geométrico das raízes, poderiam ser aplicadas, além de projetar, por exemplo, um controlador por ajuste do ganho, avanço e atraso de fase. Poderia utilizar-se ainda da aplicação de técnicas mais elaboradas de controladores, como controladores *Fuzzy* e *Neuro-fuzzy*.

## 8. REFERÊNCIAS

- Castrucci, P; Bittar, A., Sales, R. **Controle automático**. Rio de Janeiro, LTC, 2011. 143-146 p, 229-241p.
- Ctms. **INVERTED PENDULUM: SYSTEM MODELING**. Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling#7>>. Acesso em: 18 ago. 2021.
- Dorf, C.R.; Bishop, H.R. **Sistemas de Controle Modernos**. 12ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- Franklin, G.F.; Powell, J.D.; Emami-Naeini, A. **Sistemas de controle para engenharia**, Porto Alegre: Bookman, 2013. 553 p.
- Ogata, K. **Engenharia de controle moderno**. 5ª edição, São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2010.
- Segway, **SEGWAY X2 SE**. Disponível em: <<http://www.segway.com/segway-x2-se/>>. Acesso em: 13 abr. 2020.
- Skogestad, S; Postlethwaite, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. New York, WILEY 2007. 51-59 p.
- Vasconcelos, V., Almeida, G., Cuandros, M. **Control of an inverted pendulum system using intelligent controllers**, Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2012.

## 9. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos a CAPES pela concessão das bolsas de doutorado aos alunos Melkzedekue de M. A. C. Moreira (Processo: 88887.498688/2020-00) e Igor N. Soares (Processo: 88887.505819/2020-00). E também ao Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da EESC-USP, pelo oferecimento da disciplina SEM-5740 – Matemática para Engenheiros (2020-01), ministrada pelo Prof. Dr. Paulo Celso Greco Júnior, que contribuíram com a motivação para escrever o presente artigo.

## 10. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.