UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN 0103-2569

Relatório Técnico do Freeflow-2D

Juliana de Oliveira
Antonio Castelo Filho

Nº 117

RELATÓRIOS TÉCNICOS

São Carlos – SP
Jul./2000

Departamento de Computação e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos
Caixa Postal 668
13560-970 São Carlos SP

Relatório Técnico do Freeflow-2D

JULIANA DE OLIVEIRA

ANTONIO CASTELO FILHO

USP - São Carlos
2000

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este relatório foi escrito com o objetivo de ajudar o usuário do Freeflow-2D a compreender todos os passos e detalhes dos cáculos utilizados no Freeflow-2D. Sugere-se que o usuário tenha lido anteriormente a dissertação de mestrado entitulada "Desenvolvimento de um Sistema de Simulação de Escoamentos de Fluidos com Superfícies Livres Bidimensionais" [1] para ter uma noção geral do Freeflow-2D para posteriormente entrar nos detalhes destes relatório.

O primeiro capítulo fala do Simflow-2D, que é o simulador de escoamentos. O capítulo 1 está dividido em quatorze itens:

- Considerações Iniciais: detalha cada passo do GENSMAC [2] a ser seguido pelo Simflow-2D;

- Cálculo das Velocidades u e v pelas Condições de Contorno na Superfície Livre: tem-se os cálculos dos quinze casos possíveis;

- Cálculo das Velocidades Tangenciais u e v das Células S com as Células V: tem-se os cálculos dos quatro casos;

- Cálculo das Velocidades u e v pelas Condições de Contorno no Contorno Rígido: são oito casos detalhados;

- Cálculo das Velocidades Tangenciais u e v nos Injetores: está exemplificado os quatro casos possíveis;

- Cálculo da Pressão p nas Condições de Contorno na Superfície Livre: tem-se os cálculos dos quinze casos possíveis para o caso bidimensional;

- Cálculo das Velocidades Intermediárias: tem-se as velocidades intermediárias $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ discretizadas;

- Resolução da Equação de Poisson: tem um exemplo de como resolver a equação de Poisson através do método dos gradientes conjugados;

- Cálculo das Velocidades Finais u e v: tem-se o método de como se calcular as velocidades finais;

- Eliminação das Partículas Virtuais: está exemplificado como se faz a eliminação das partículas virtuais;

- Cálculo das Velocidades u e v das Partículas Virtuais: tem os quatro casos exemplificados;

- Inserção das Partículas Virtuais: está exemplificado como se faz a inserção das partículas virtuais;

- Redefinição das Células Após o Movimento das Partículas Virtuais: tem-se como se faz a redefinição das células;

- Considerações Finais: tem-se as conclusões deste capítulo.

O segundo capítulo fala do Modflow-2D, que é o modelador de moldes e escoamentos. O capítulo 2 está dividido em quatro itens:

- Considerações Iniciais: faz um breve relato sobre o Modflow-2D;

- Intersecções nas Células: exemplifica como é feito os cálculos das intersecções nas células;

- Estrutura dos Objetos Geométricos: exemplifica como é feito a estrutura dos objetos geométricos;

- Considerações Finais: tem-se as conclusões do capítulo 2.

Capítulo 1

Simulador

1.1 Considerações Iniciais

O simulador consiste de um conjunto de programas baseado no método GENSMAC, cuja finalidade é resolver problemas de escoamentos transientes de fluidos newtonianos incompressíveis com superfícies livres. O Simflow-2D representa o fluido por partículas apenas na fronteira utilizando a estrutura *halfedge-2d* e é a parte central do Freeflow-2D [1].

A simulação começa com o Simflow-2D fazendo a leitura dos arquivos de entrada. Depois tem-se um grande ciclo seguindo os seguintes passos:

- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v das células S com as células V;
- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno no contorno rígido;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v nos injetores;
- cálculo da pressão p nas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades intermediárias $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$;
- resolução da equação de Poisson;
- cálculo das velocidades finais u e v;
- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno na superfície livre;
- cálculo das velocidades tangenciais u e v das células S com as células V;
- cálculo das velocidades u e v pelas condições de contorno no contorno rígido;

- cálculo das velocidades tangenciais u e v nos injetores;
- movimento da superfície livre (cálculo das velocidades u e v das partículas virtuais);
- inserção das partículas virtuais no injetor;
- eliminação das partículas virtuais;
- inserção das partículas virtuais;
- redefinição das células após o movimento das partículas virtuais.

A seguir tem-se os passos descritos acima com mais detalhes.

1.2 Cálculo das Velocidades u e v pelas Condições de Contorno na Superfície Livre

Para o cálculo das velocidades u e v das condições de contorno na superfície livre tem-se que considerar quinze casos. O método utilizado é o seguinte: percorre-se as células S e estuda-se as células vizinhas, assim, pode-se agrupar os quinze casos existentes em quatro cojuntos:

- células S com somente uma face em contato com células V: para estes casos a velocidade na face da célula V é calculada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.1}$$

Existem quatro casos:

- células S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular a velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ como mostra a figura 1.1.

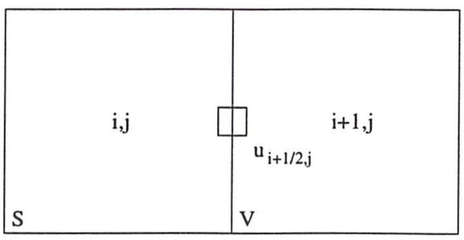


Figura 1.1: Célula S tendo a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Então pela equação da continuidade tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{\delta x}{\delta y}(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}});$$

- células S tendo a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular a velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.2.

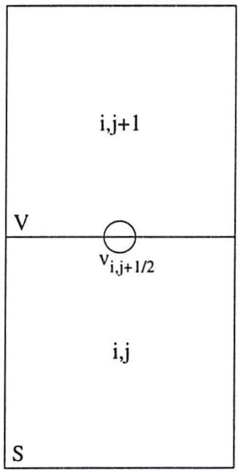


Figura 1.2: Célula S tendo a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Então pela equação da continuidade tem-se:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{\delta y}{\delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j});$$

- células S tendo a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular a velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ como mostra a figura 1.3.

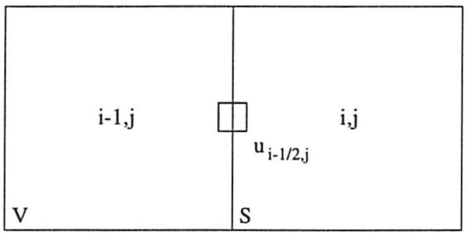


Figura 1.3: Célula S tendo a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Então pela equação da continuidade tem-se:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\delta x}{\delta y}(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}});$$

- células S tendo a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular a velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.4.

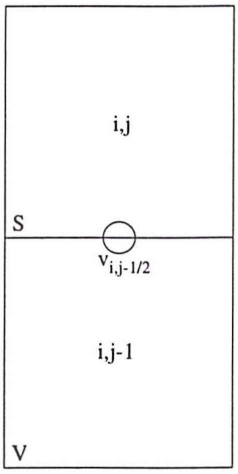


Figura 1.4: Célula S tendo a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Então pela equação da continuidade tem-se:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta y}{\delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j});$$

• células S com duas faces em contato com células V: para estes casos, as velocidades nas faces das células V são calculadas pela equação da continuidade (1.1) e uma das equações de contorno na superfície livre (1.2)

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}n_x n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(n_x^2 - n_y^2) + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_x n_y = 0. \quad (1.2)$$

Existem quatro casos:

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.5.

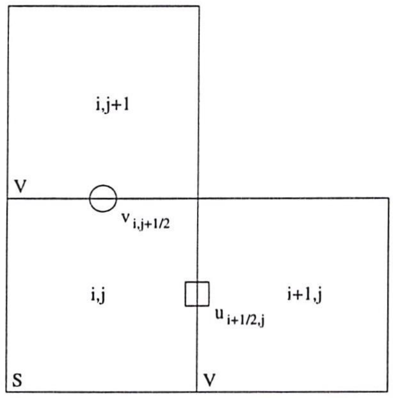


Figura 1.5: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela equação da continuidade, equação de contorno na superfície livre e considerando o vetor normal como $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.6.

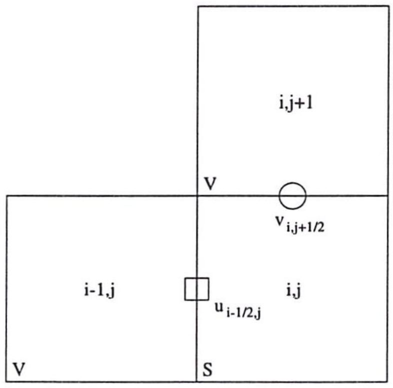


Figura 1.6: Célula S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela equação da continuidade, equação de contorno na superfície livre e considerando o vetor normal como $n = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ tem-se:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.7.

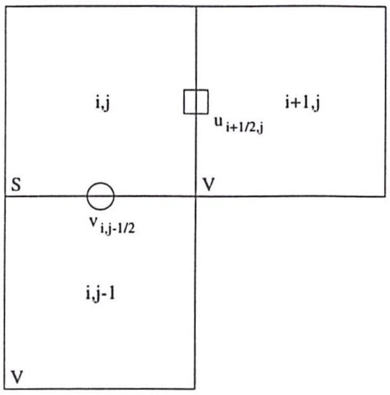


Figura 1.7: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela equação da continuidade, equação de contorno na superfície livre e considerando o vetor normal como $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.8.

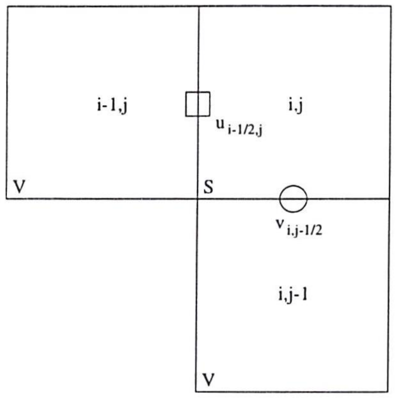


Figura 1.8: Célula S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela equação da continuidade, equação de contorno na superfície livre e considerando o vetor normal como $n = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ tem-se:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}};$$

- células S com dois lados opostos em contato com células V: para estes casos, apenas uma velocidade é ajustada de modo a satisfazer a equação da continuidade (1.1).

Existem dois casos:

\- células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j}$, como mostra a figura 1.9.

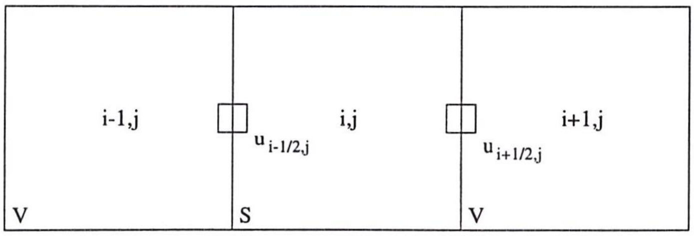


Figura 1.9: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V

Mas pela regra, ajusta-se apenas a velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ de acordo com a equação da continuidade, então tem-se:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{\delta x}{\delta y}(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}});$$

- células S tendo as faces $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.10.

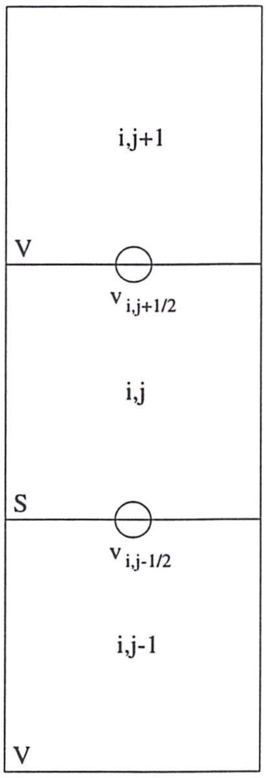


Figura 1.10: Célula S tendo as faces $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Mas pela regra, ajusta-se apenas a velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ de acordo com a equação da continuidade, então tem-se:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{\delta y}{\delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j});$$

- células S com três faces ou quatro faces em contato com células V: para estes casos, as velocidades nas faces das células V são calculadas pela equação da continuidade (1.1) e uma das equações de contorno na superfície livre (1.2).

Existem cinco casos:

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$, como mostra a figura 1.11.

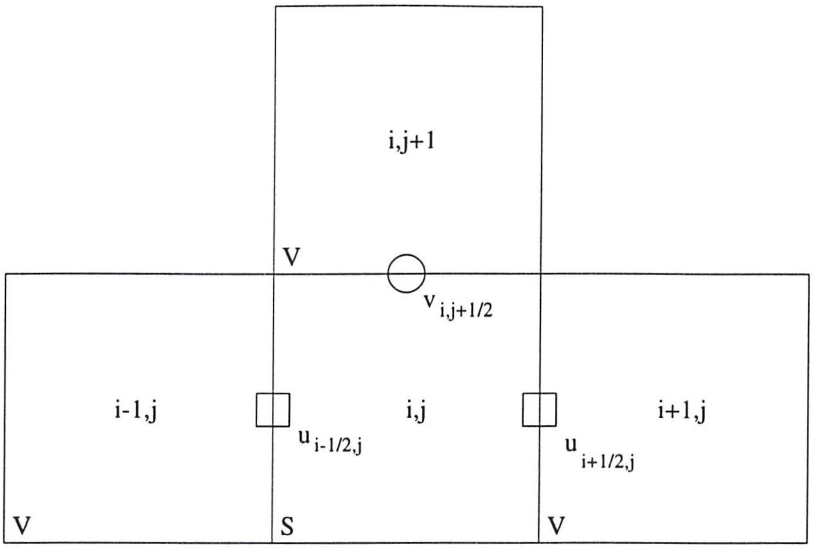


Figura 1.11: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela regra, calcula-se as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ pela equação da continuidade e uma das equações de contorno na superfície livre. O vetor normal entre as células $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e o vetor normal entre as células $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ é $n=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. Então substituindo os vetores normais na equação de contorno (1.2) tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{-\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

que discretizadas ficam

$$u_{i+\frac{1}{2},j}=u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}=v_{i,j-\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.12.

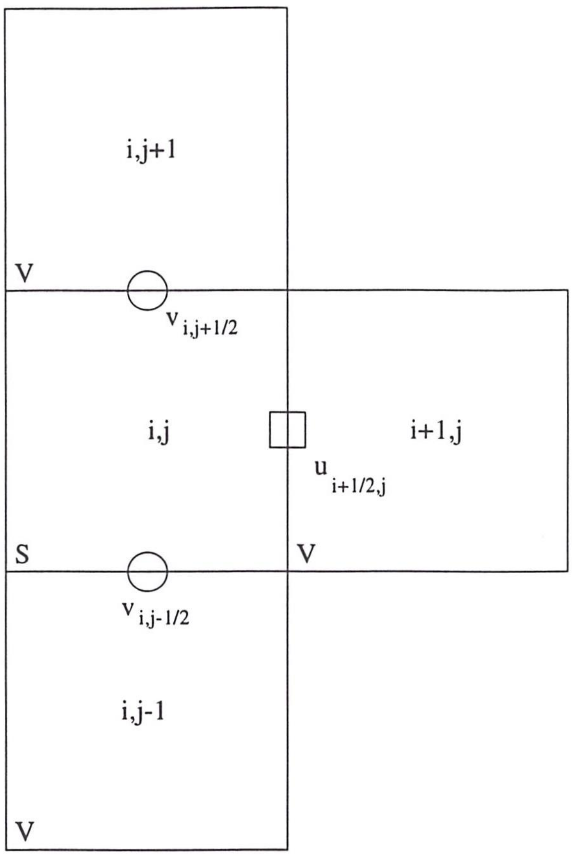


Figura 1.12: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela regra, calcula-se as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ pela equação da continuidade e uma das equações de contorno na superfície livre. O vetor normal entre as células $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e o vetor normal entre as células $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2})$. Então substituindo os vetores normais na equação de contorno (1.2) tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{-\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

que discretizadas ficam

$$u_{i+\frac{1}{2},j}=u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}=v_{i,j-\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.13.

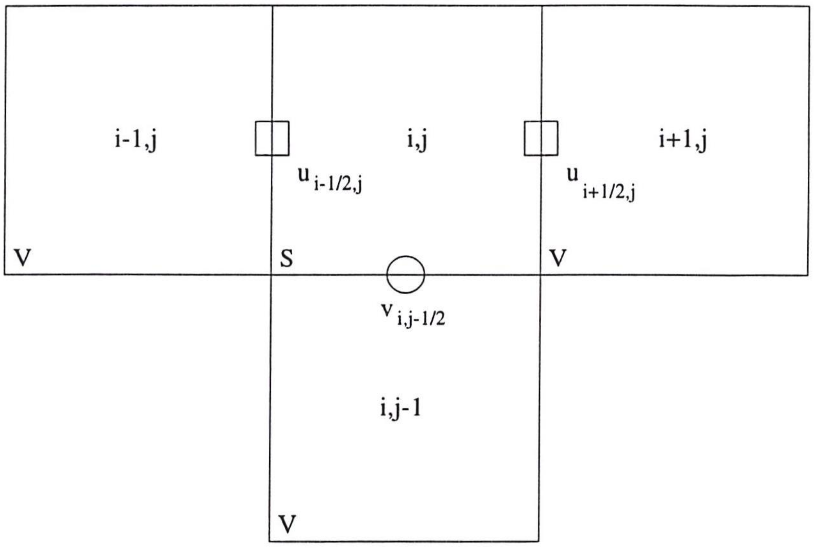


Figura 1.13: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela regra, calcula-se as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ pela equação da continuidade e uma das equações de contorno na superfície livre. O vetor normal entre as células $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ e o vetor normal entre as células $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ é $n=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Então substituindo os vetores normais na equação de contorno (1.2) tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

que discretizadas ficam

$$u_{i+\frac{1}{2},j}=u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}=v_{i,j+\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.14.

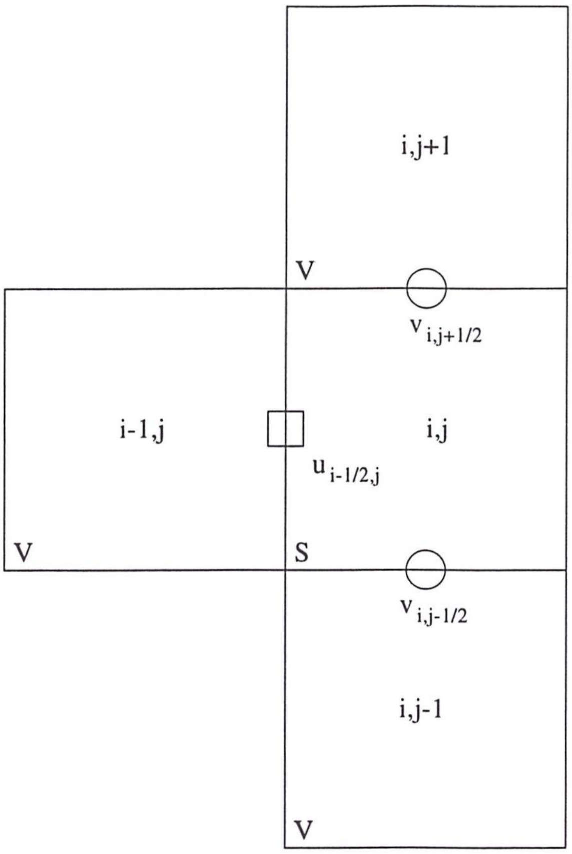


Figura 1.14: Célula S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela regra, calcula-se as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ pela equação da continuidade e uma das equações de contorno na superfície livre. O vetor normal entre as células $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ é $n = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e o vetor normal entre as células $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ é $n = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Então substituindo os vetores normais na equação de contorno (1.2) tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

que discretizadas ficam

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}};$$

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: neste caso, deve-se calcular as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ como mostra a figura 1.15.

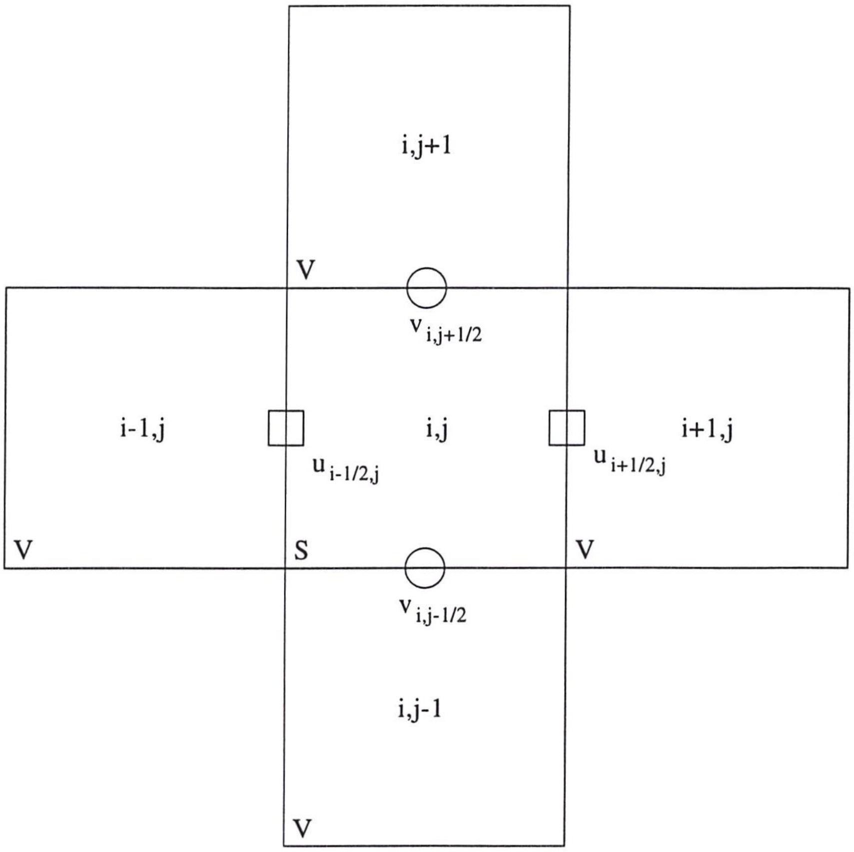


Figura 1.15: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Então pela regra, calcula-se as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ pela equação da continuidade e uma das equações de contorno na superfície livre. O vetor normal entre as células $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ é $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ é $n=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e o vetor normal entre as células $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ é $n=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Então substituindo os vetores normais na equação de contorno (1.2) tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{-\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema onde as linhas três e quatro são combinação linear das duas primeiras, obtem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

que discretizadas ficam

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

Após calcular as velocidades u e v na superfície livre, calcula-se as velocidades tangenciais u e v das células S com as células V.

1.3 Cálculo das Velocidades Tangenciais u e v das Células S com as Células V

Para o calculo das velocidades tangenciais u e v das células S com as células V tem-se quatro casos. Deve-se percorrer a árvore de células S e:

- se a célula $i+1, j$ for S, então tem-se dois casos:

- se as células $i, j+1$ e $i+1, j+1$ são V, então calcula-se a velocidade u de acordo com a equação de contorno na superfície livre (1.2), como mostra a figura 1.16.

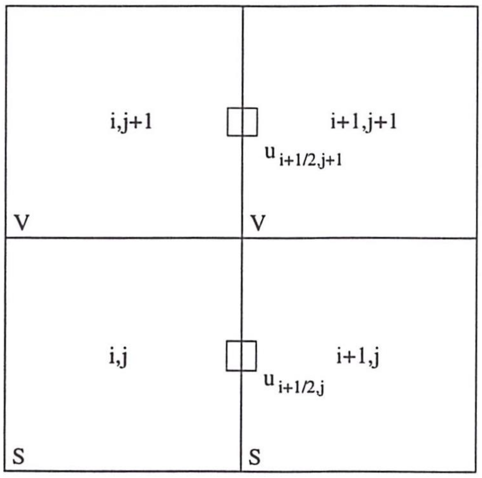


Figura 1.16: Células i, j e $i+1, j$ são S e as células $i, j+1$ e $i+1, j+1$ são V

Para este caso, o vetor tangente é $m = (0, 1)$, então:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\delta y}{\delta x}(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}});$$

- se as células $i, j-1$ e $i+1, j-1$ são V, então calcula-se a velocidade u de acordo com a equação de contorno na superfície livre (1.2), como mostra a figura 1.17.

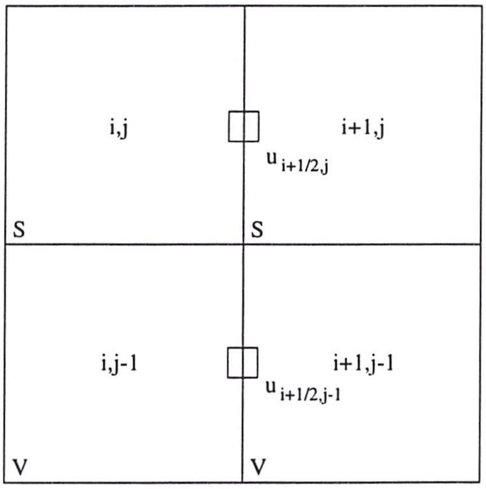


Figura 1.17: Células i, j e $i+1, j$ são S e as células $i, j-1$ e $i+1, j-1$ são V

Para este caso, o vetor tangente é $m = (0, -1)$, então:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-1} = u_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\delta y}{\delta x}(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}});$$

• se a célula $i, j+1$ for S, então tem-se dois casos:

- se as células $i+1, j$ e $i+1, j+1$ são V, então calcula-se a velocidade v de acordo com a equação de contorno na superfície livre (1.2), como mostra a figura 1.18.

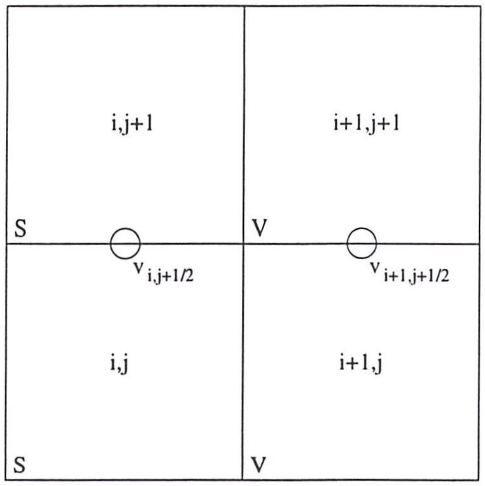


Figura 1.18: Células i, j e $i, j+1$ são S e as células $i+1, j$ e $i+1, j+1$ são V

Para este caso, o vetor tangente é $m = (-1, 0)$, então:

$$v_{i+1,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{\delta y}(u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j});$$

- se as células $i-1, j$ e $i-1, j+1$ são V, então calcula-se a velocidade v de acordo com a equação de contorno na superfície livre (1.2), como mostra a figura 1.19.

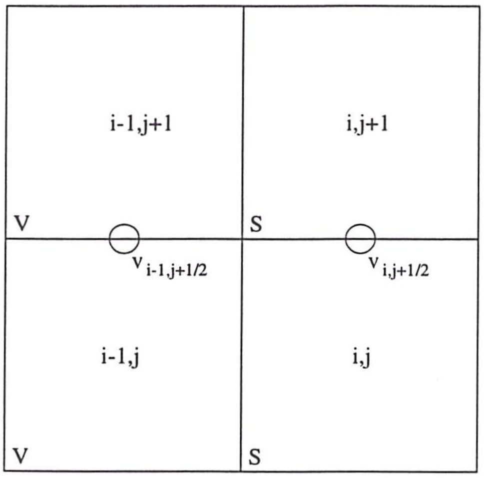


Figura 1.19: Células i, j e $i, j+1$ são S e as células $i-1, j$ e $i-1, j+1$ são V

Para este caso, o vetor tangente é $m = (1, 0)$, então:

$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{\delta y}(u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}).$$

O próximo passo da simulação é aplicar as condições de contorno no contorno rígido.

1.4 Cálculo das Velocidades u e v pelas Condições de Contorno no Contorno Rígido

Deve-se aplicar as condições de contorno no contorno rígido, isto é, calcular as velocidades u e v nas faces das células F através de interpolação linear.

As células F podem ter uma ou duas faces em contato com células S ou C, no caso bidimensional são oito casos. Mais especificamente, há quatro casos possíveis de células F que têm uma face em contato com células S ou C e existem quatro casos de células F que têm duas faces em contato com células S ou C.

Primeiramente, os quatro casos de células F que têm uma face em contato com células S ou C:

- células F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.20.

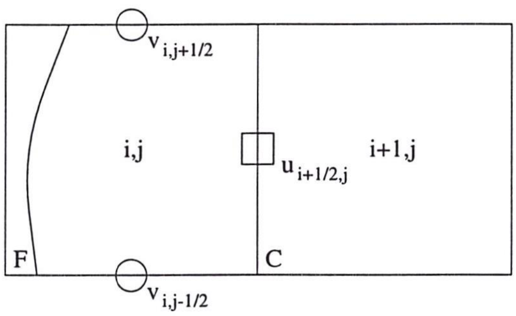


Figura 1.20: Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.20 pode-se observar que as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i+\frac{5}{2},j}$, $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i+\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.21.

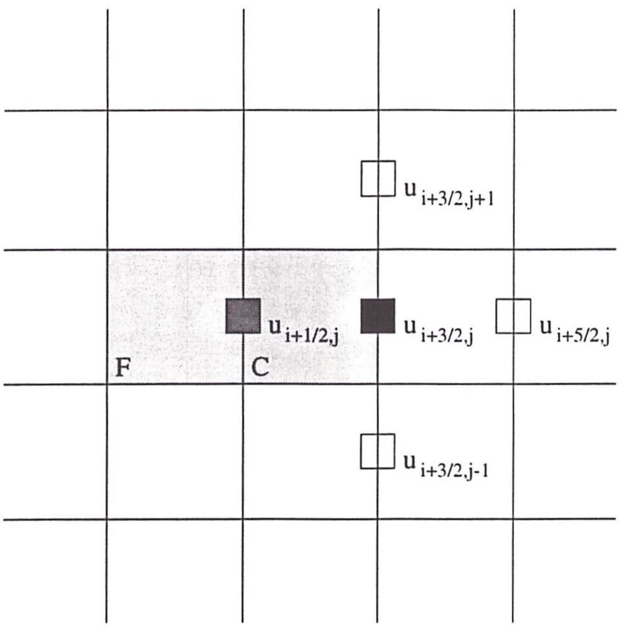


Figura 1.21: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$

Para o cálculo de $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i+2,j+\frac{1}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.22.

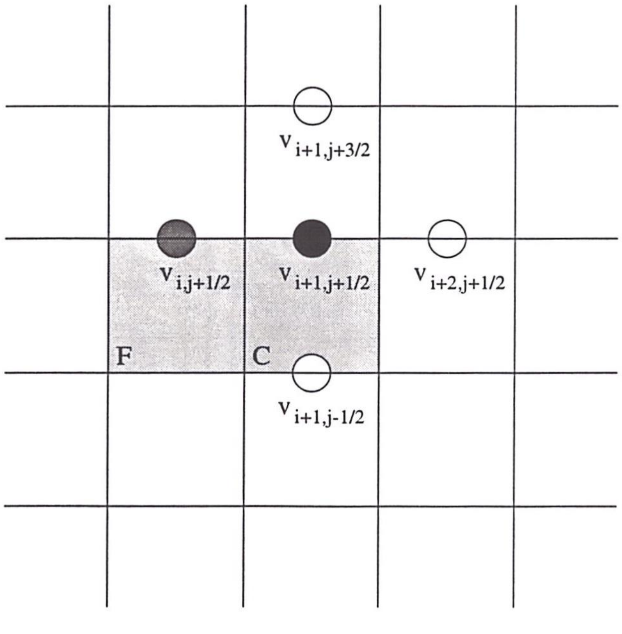


Figura 1.22: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$

Para o cálculo de $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i+2,j-\frac{1}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i+1,j-\frac{3}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.23.

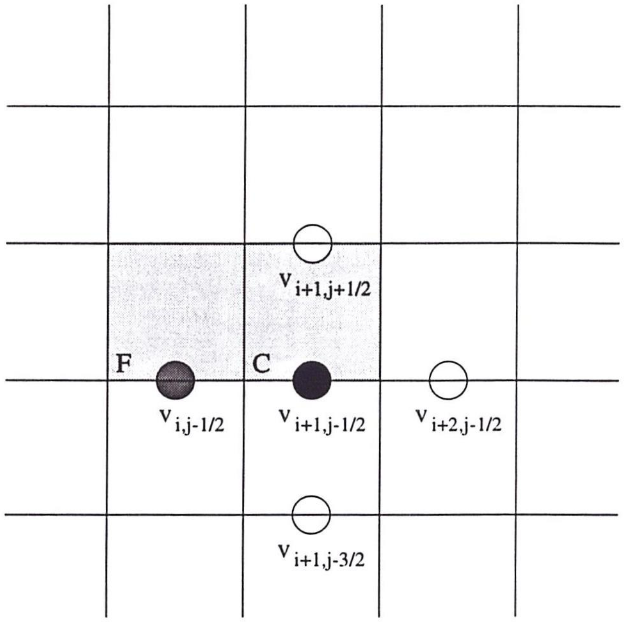


Figura 1.23: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear.

Para o cálculo da velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.24.

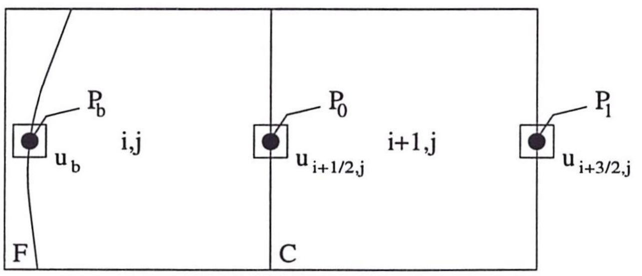


Figura 1.24: Célula F com a face $i+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_b = (x_{ub}, y_j)$, onde x_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{ub}}{x_{i+\frac{3}{2}} - x_{ub}}.u_{i+\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{ub} - x_{i+\frac{3}{2}}}.u_b,$$

onde $\delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{3}{2}}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.25.

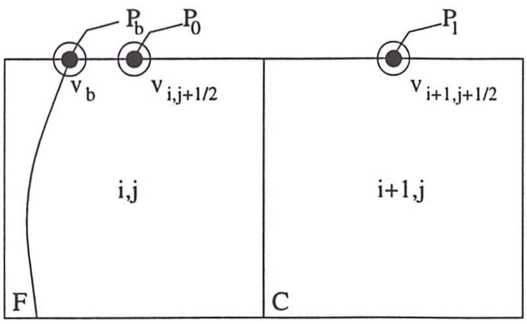


Figura 1.25: Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$

Seja $P_0 = (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i+1}, y_{j+\frac{1}{2}})$ e $P_b = (x_{vb}, y_{j+\frac{1}{2}})$, onde x_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{vb}}{x_{i+1} - x_{vb}}.v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{vb} - x_{i+1}}.v_b,$$

onde $\delta x = x_i - x_{i+1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.26.

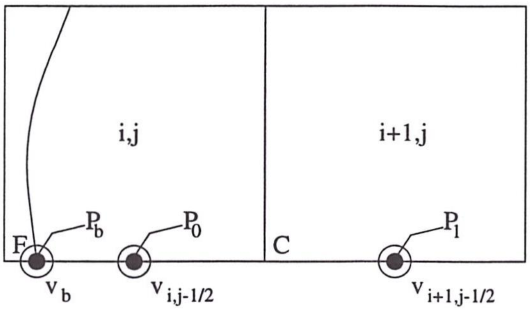


Figura 1.26: Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$

Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i+1}, y_{j-\frac{1}{2}})$ e $P_b = (x_{vb}, y_{j-\frac{1}{2}})$, onde x_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{vb}}{x_{i+1} - x_{vb}}.v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{vb} - x_{i+1}}.v_b,$$

onde $\delta x = x_i - x_{i+1}$;

- células F com a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.27.

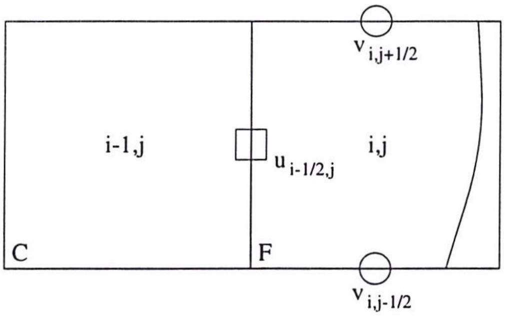


Figura 1.27: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.27 pode-se observar que as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{5}{2},j}$, $u_{i-\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.28.

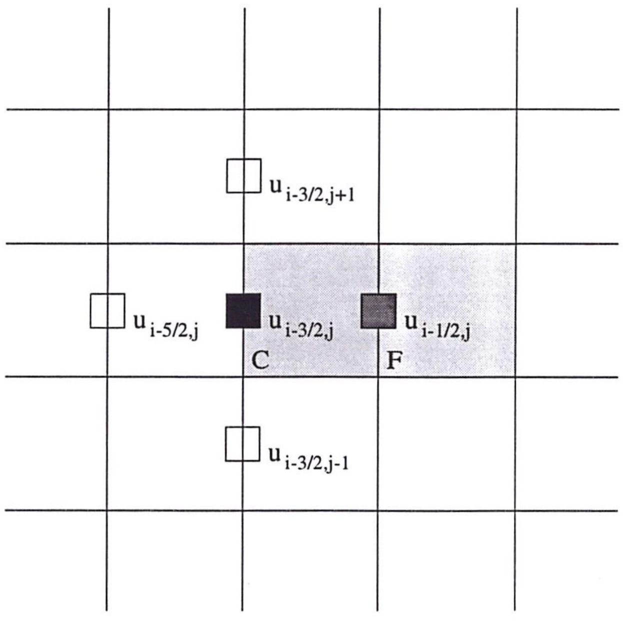


Figura 1.28: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$

Para o cálculo de $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-2,j+\frac{1}{2}}$, $v_{i-1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.29.

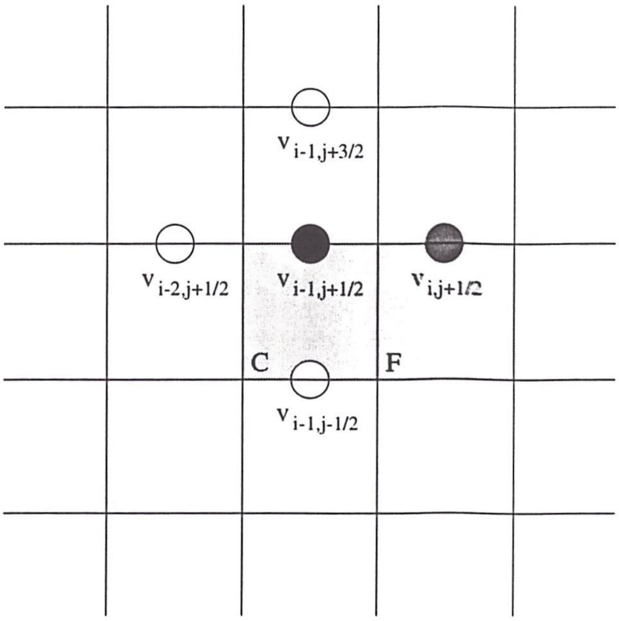


Figura 1.29: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$

Para o cálculo de $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-2,j-\frac{1}{2}}$, $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{3}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.30.

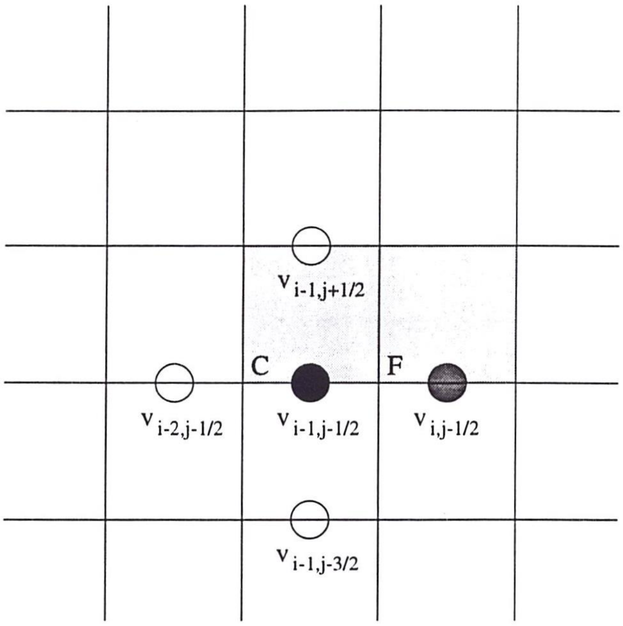


Figura 1.30: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear.

Para o cálculo da velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.31.

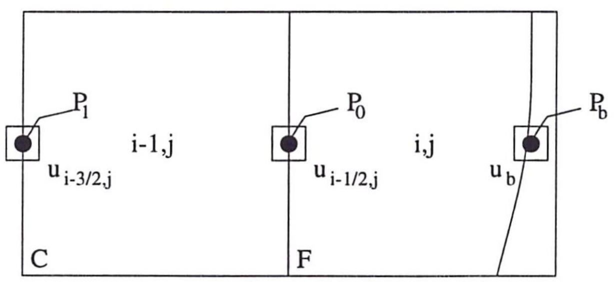


Figura 1.31: Célula F com a face $i-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_b = (x_{ub}, y_j)$, onde x_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x_{ub}}{x_{i-\frac{3}{2}} - x_{ub}}.u_{i-\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{ub} - x_{i-\frac{3}{2}}}.u_b,$$

onde $\delta x = x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{3}{2}}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.32.

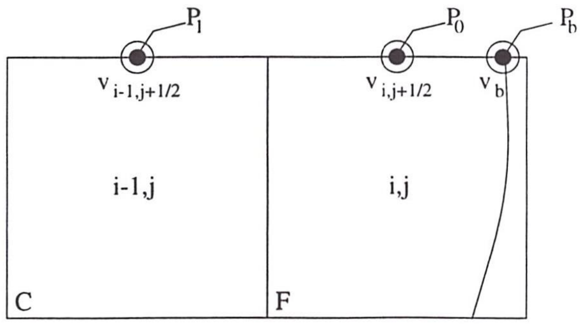


Figura 1.32: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$

Seja $P_0 = (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i-1}, y_{j+\frac{1}{2}})$ e $P_b = (x_{vb}, y_{j+\frac{1}{2}})$, onde x_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{vb}}{x_{i-1} - x_{vb}}.v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{vb} - x_{i-1}}.v_b,$$

onde $\delta x = x_i - x_{i-1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.33.

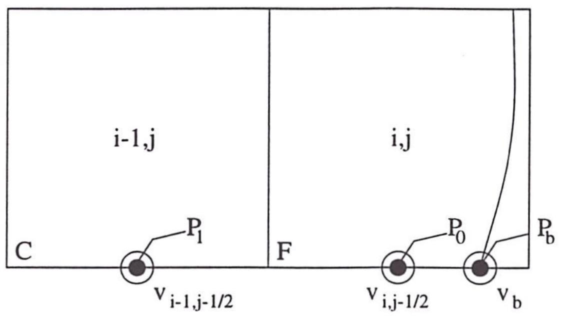


Figura 1.33: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$

Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}})$ e $P_b = (x_{vb}, y_{j-\frac{1}{2}})$, onde x_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{vb}}{x_{i-1} - x_{vb}}.v_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{vb} - x_{i-1}}.v_b,$$

onde $\delta x = x_i - x_{i-1}$;

- células F com a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.34.

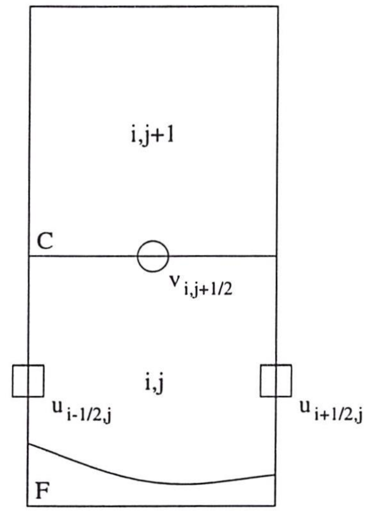


Figura 1.34: Célula F com a face $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.34 pode-se observar que as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$, $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j+2}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.35.

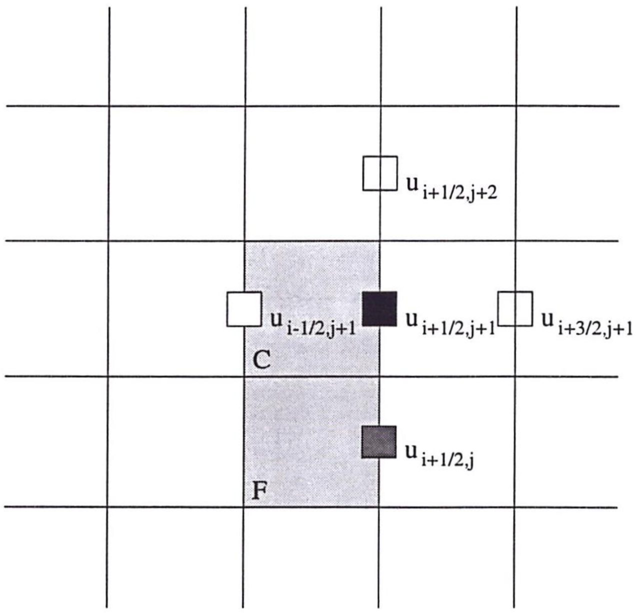


Figura 1.35: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$

Para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{3}{2},j+1}$, $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+2}$ são conhecidas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.36.

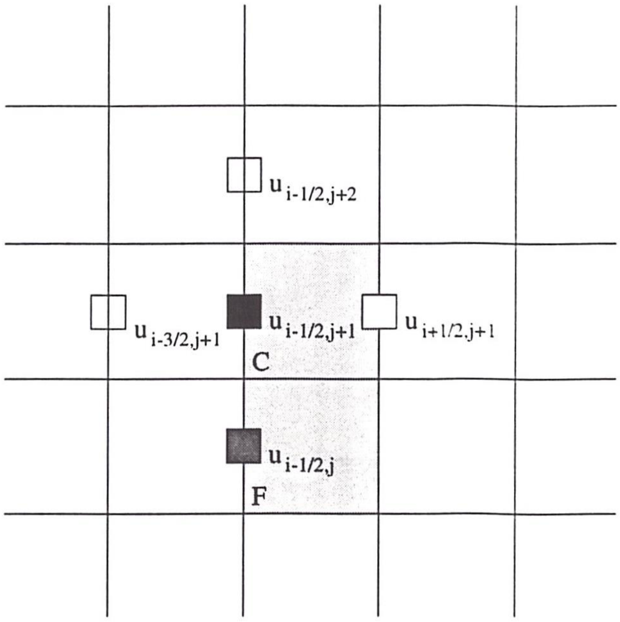


Figura 1.36: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$

Para o cálculo de $v_{i,j+\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j+\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j+\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.37.

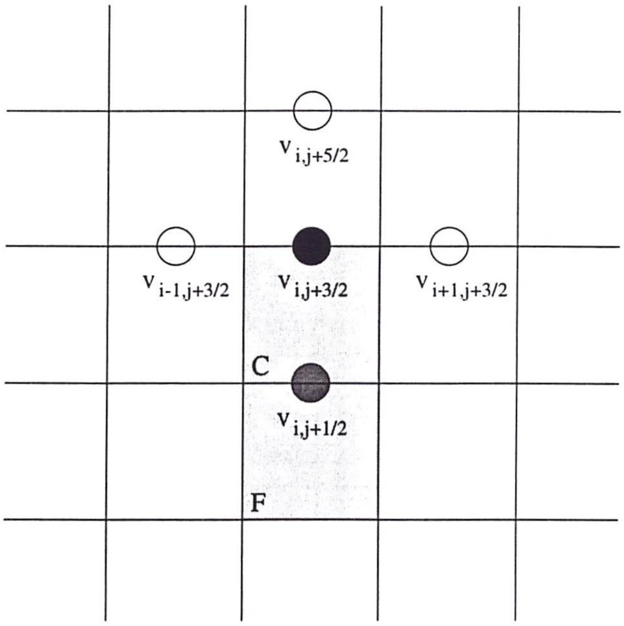


Figura 1.37: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i,j+\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear.

Para o cálculo da velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.38.

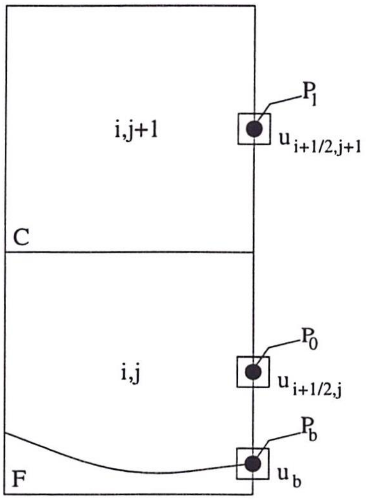


Figura 1.38: Célula F com a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+1})$ e $P_b = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{ub})$, onde y_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{ub}}{y_{j+1} - y_{ub}}.u_{i+\frac{1}{2},j+1} + \frac{\delta y}{y_{ub} - y_{j+1}}.u_b,$$

onde $\delta y = y_j - y_{j+1}$.

Para o cálculo da velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.39.

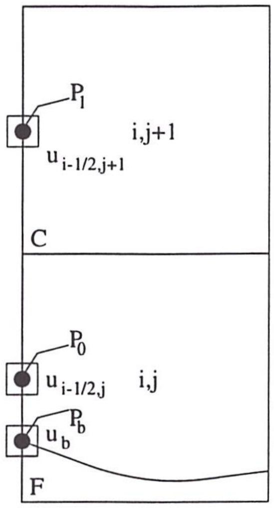


Figura 1.39: Célula F com a face $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+1})$ e $P_b = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{ub})$, onde y_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{ub}}{y_{j+1} - y_{ub}}.u_{i-\frac{1}{2},j+1} + \frac{\delta y}{y_{ub} - y_{j+1}}.u_b,$$

onde $\delta y = y_j - y_{j+1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.40.

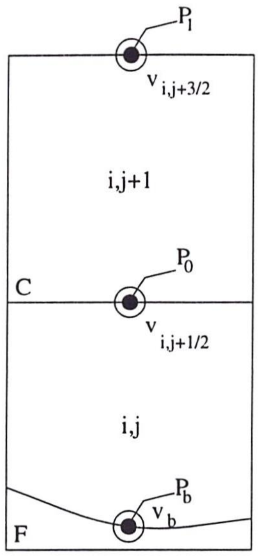


Figura 1.40: Célula F com a face $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$

Seja $P_0 = (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_i, y_{j+\frac{3}{2}})$ e $P_b = (x_i, y_{vb})$, onde y_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{vb}}{y_{j+\frac{3}{2}} - y_{vb}}.v_{i,j+\frac{3}{2}} + \frac{\delta y}{y_{vb} - y_{j+\frac{3}{2}}}.v_b,$$

onde $\delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j+\frac{3}{2}}$;

- células F com a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.41.

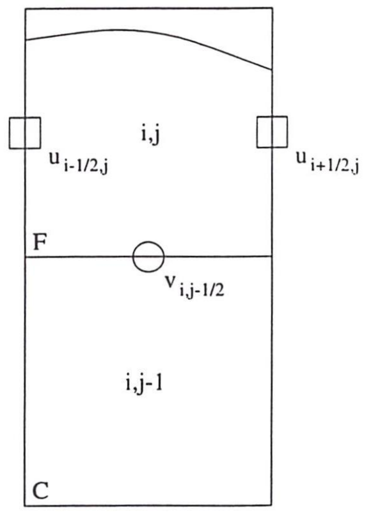


Figura 1.41: Célula F com a face $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.41 pode-se observar que as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$, $u_{i+\frac{3}{2},j-1}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j-2}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.42.

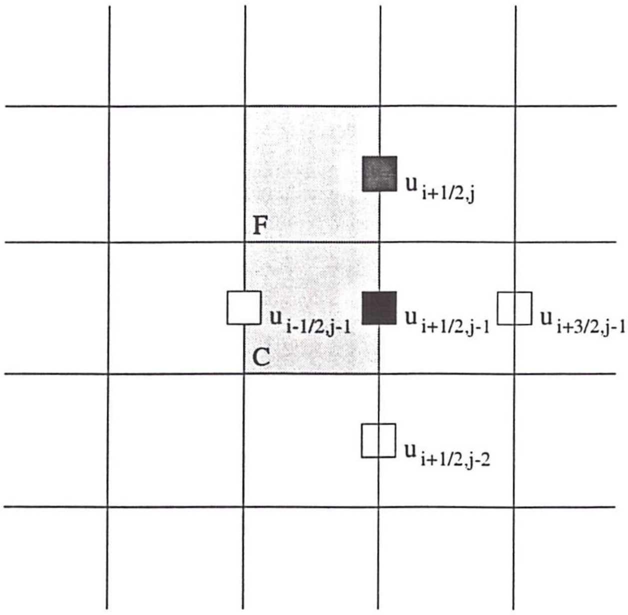


Figura 1.42: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$

Para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{3}{2},j-1}$, $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j-2}$ são conhecidas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.43.

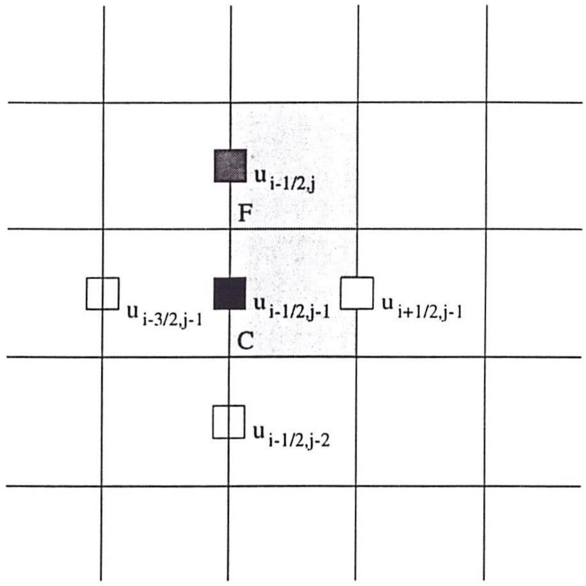


Figura 1.43: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$

Para o cálculo de $v_{i,j-\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j-\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j-\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.44.

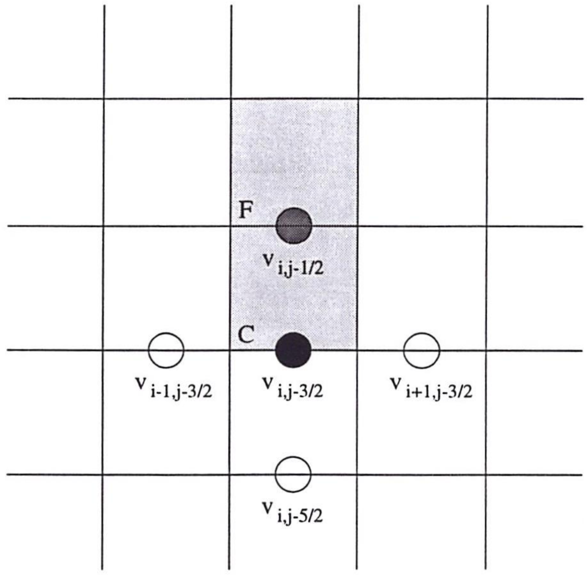


Figura 1.44: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i,j-\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear.

Para o cálculo da velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.45.

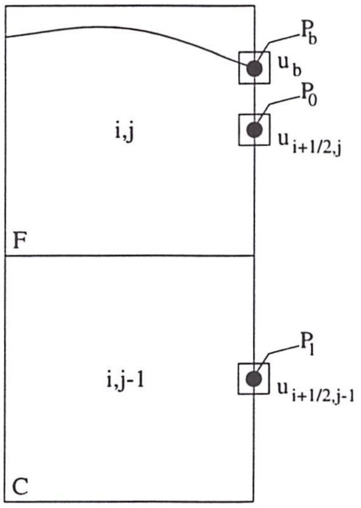


Figura 1.45: Célula F com a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-1})$ e $P_b = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{ub})$, onde y_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{ub}}{y_{j-1} - y_{ub}}.u_{i+\frac{1}{2},j-1} + \frac{\delta y}{y_{ub} - y_{j-1}}.u_b,$$

onde $\delta y = y_j - y_{j-1}$.

Para o cálculo da velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.46.

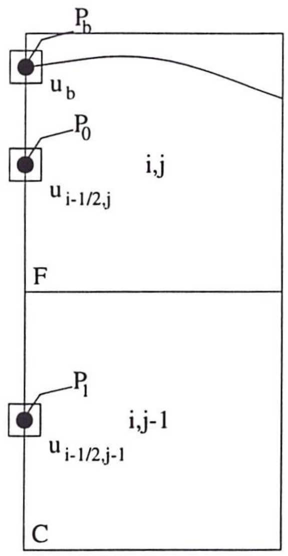


Figura 1.46: Célula F com a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$

Seja $P_0=(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)$, $P_1=(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-1})$ e $P_b=(x_{i-\frac{1}{2}},y_{ub})$, onde y_{ub} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j}=\frac{y_j-y_{ub}}{y_{j-1}-y_{ub}}.u_{i-\frac{1}{2},j-1}+\frac{\delta y}{y_{ub}-y_{j-1}}.u_b,$$

onde $\delta y=y_j-y_{j-1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.47.

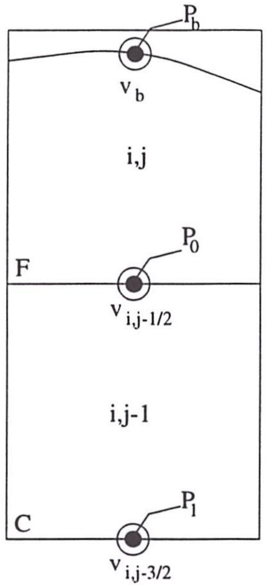


Figura 1.47: Célula F com a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$

Seja $P_0=(x_i,y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1=(x_i,y_{j-\frac{3}{2}})$ e $P_b=(x_i,y_{vb})$, onde y_{vb} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_b e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}=\frac{y_{j-\frac{1}{2}}-y_{vb}}{y_{j-\frac{3}{2}}-y_{vb}}.v_{i,j-\frac{3}{2}}+\frac{\delta y}{y_{vb}-y_{j-\frac{3}{2}}}.v_b,$$

onde $\delta y=y_{j-\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{3}{2}}$.

Agora, os quatro casos de células F que têm duas faces em contato com células S ou C:

- células F com as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.48.

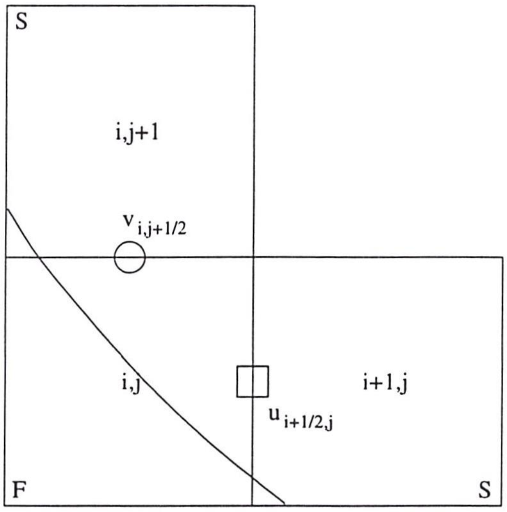


Figura 1.48: Célula F com a face $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.48 pode-se observar que as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i+\frac{5}{2},j}$, $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i+\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida. E para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$, $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j+2}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.49.

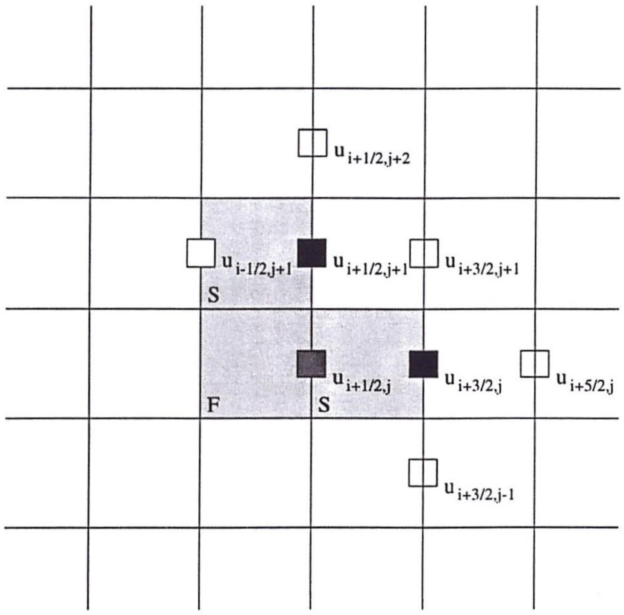


Figura 1.49: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$

Para o cálculo de $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i+2,j+\frac{1}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida. E para o cálculo de $v_{i,j+\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j+\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j+\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.50.

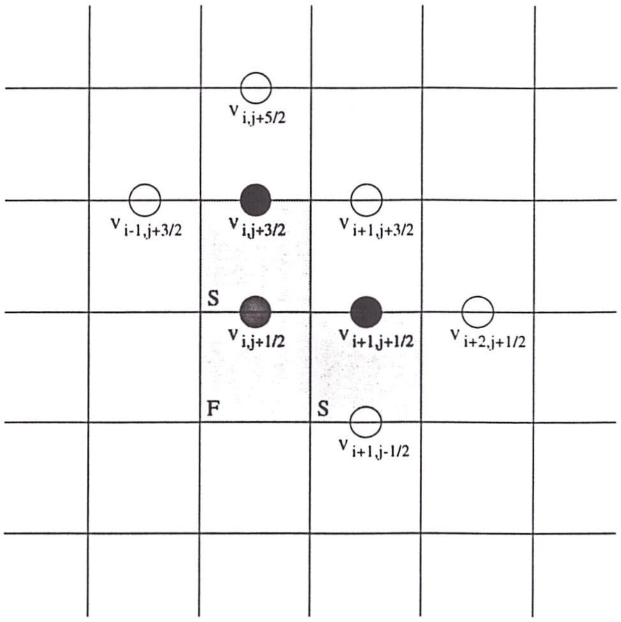


Figura 1.50: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j+\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear. Quando tem-se células F com duas faces em contato com células S ou C pode ocorrer de se ter duas opções para interpolar, uma na direção x e outra na direção y.

Para o cálculo da velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.51.

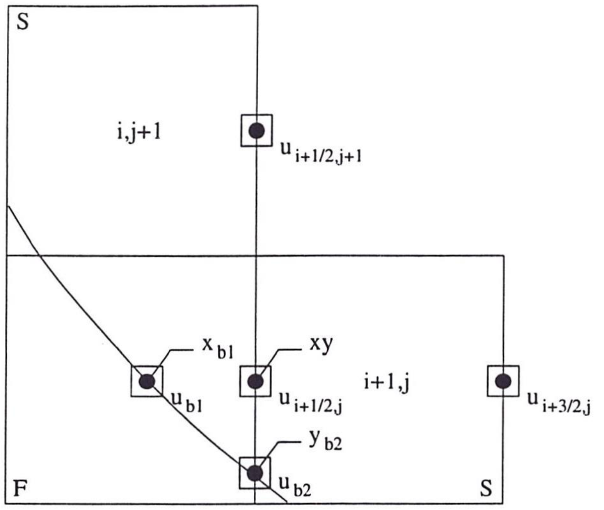


Figura 1.51: Célula F com as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.51, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1}-xy$ ou $y_{b2}-xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1}-xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.52.

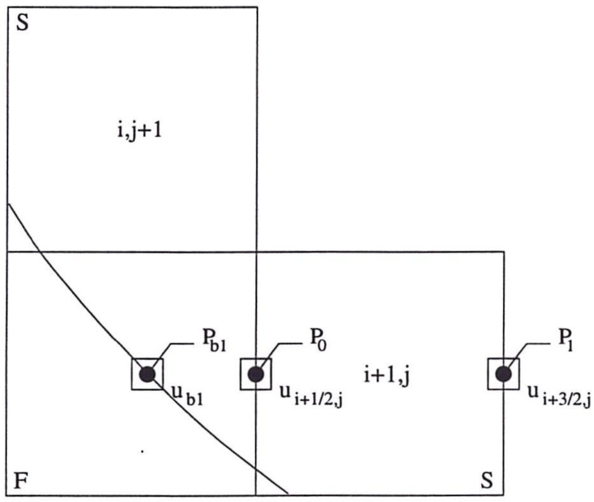


Figura 1.52: Célula F com as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$ na direção x

Seja $P_0=(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)$, $P_1=(x_{i+\frac{3}{2}},y_j)$ e $P_{b1}=(x_{b1},y_j)$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{b1}}{x_{i+\frac{3}{2}} - x_{b1}}.u_{i+\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i+\frac{3}{2}}}.u_{b1},$$

onde $\delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{3}{2}}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.53.

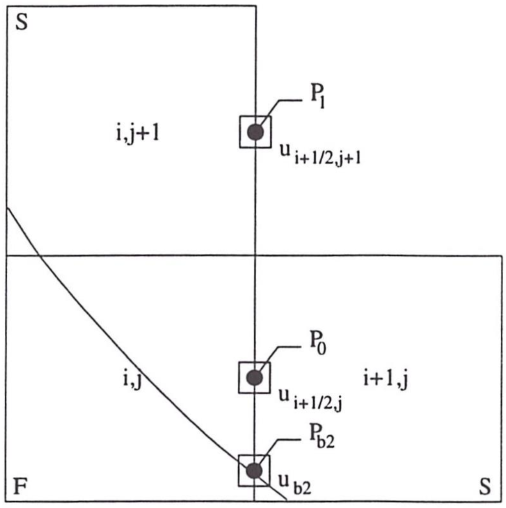


Figura 1.53: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+1})$ e $P_{b2} = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{b2}}{y_{j+1} - y_{b2}}.u_{i+\frac{1}{2},j+1} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j+1}}.u_{b2},$$

onde $\delta y = y_j - y_{j+1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.54.

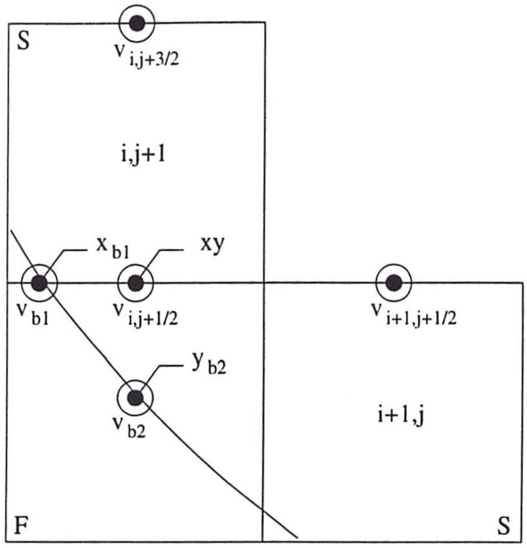


Figura 1.54: Célula F com a face $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.54, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1}-xy$ ou $y_{b2}-xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1}-xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.55.

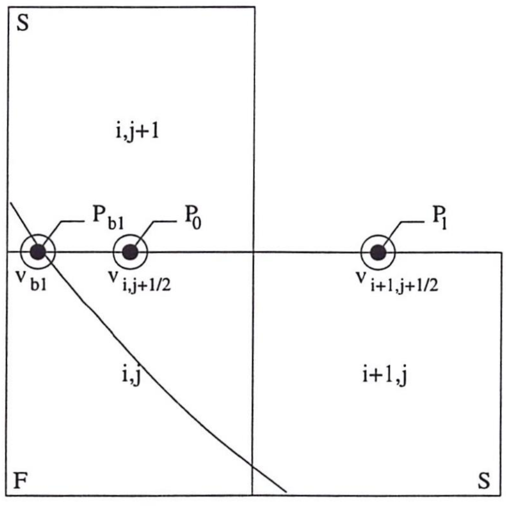


Figura 1.55: Célula F com as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ na direção x

Seja $P_0=(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1=(x_{i+1}, y_{j+\frac{1}{2}})$ e $P_{b1}=(x_{b1}, y_{j+\frac{1}{2}})$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{b1}}{x_{i+1} - x_{b1}}.v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i+1}}.v_{b1},$$

onde $\delta x = x_i - x_{i+1}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.56.

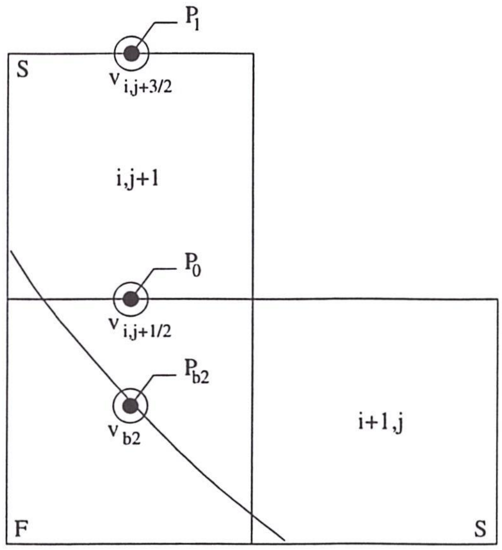


Figura 1.56: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_i, y_{j+\frac{3}{2}})$ e $P_{b2} = (x_i, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{b2}}{y_{j+\frac{3}{2}} - y_{b2}}.v_{i,j+\frac{3}{2}} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j+\frac{3}{2}}}.u_{b2},$$

onde $\delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j+\frac{3}{2}}$;

- células F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.57.

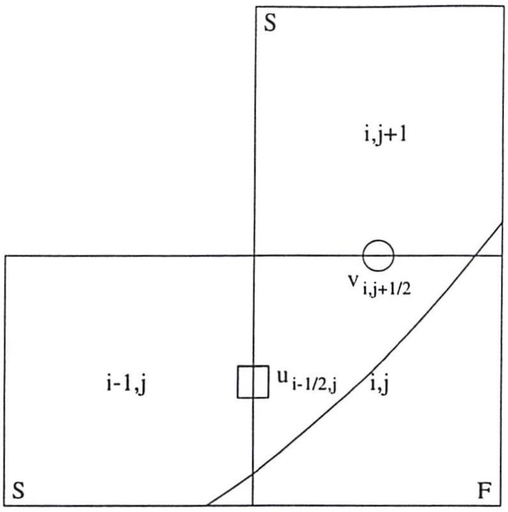


Figura 1.57: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.57 pode-se observar que as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{5}{2},j}$, $u_{i-\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida. E para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{3}{2},j+1}$, $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+2}$ são conhecidadas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.58.

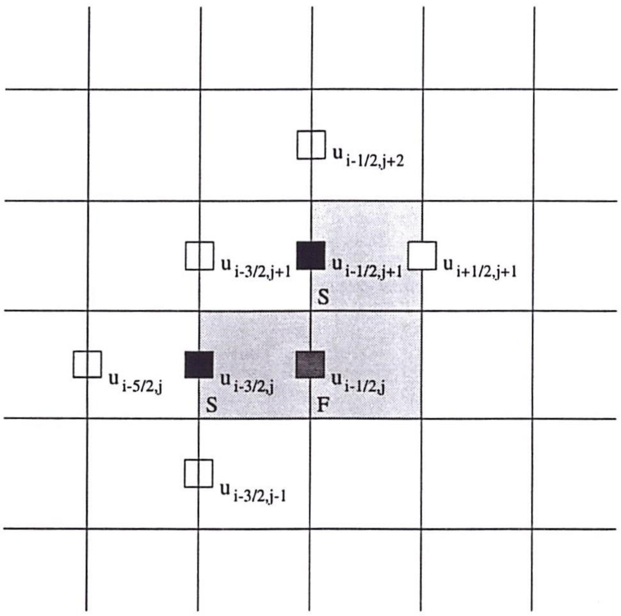


Figura 1.58: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$

Para o cálculo de $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-2,j+\frac{1}{2}}$, $v_{i-1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida. E para o cálculo de $v_{i,j+\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j+\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j+\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.59.

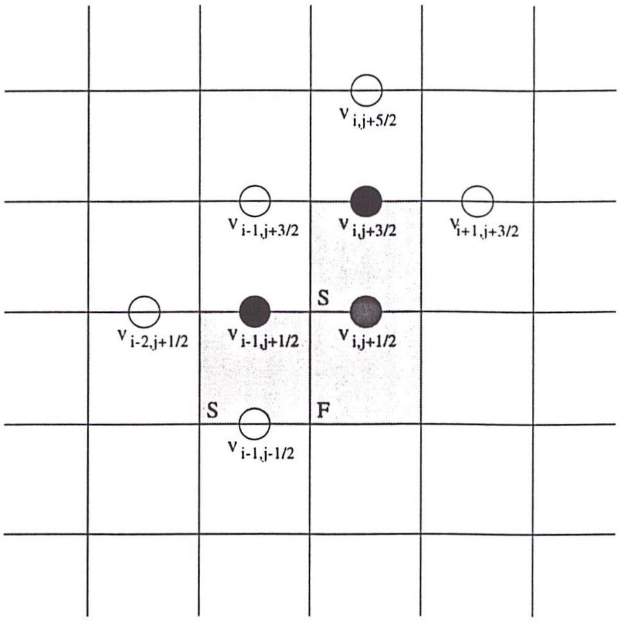


Figura 1.59: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j+\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear. Quando tem-se células F com duas faces em contato com células S ou C pode ocorrer de se ter duas opções para interpolar, uma na direção x e outra na direção y.

Para o cálculo da velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.60.

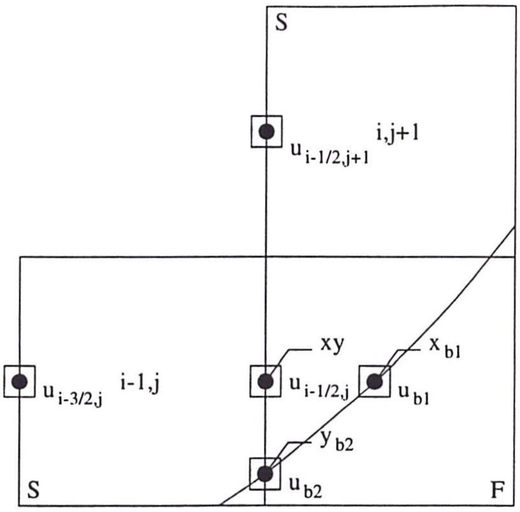


Figura 1.60: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.60, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1} - xy$ ou $y_{b2} - xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1} - xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.61.

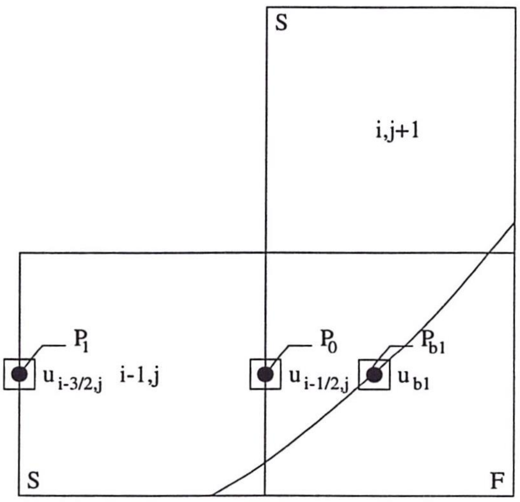


Figura 1.61: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$ na direção x

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_{b1} = (x_{b1}, y_j)$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x_{b1}}{x_{i-\frac{3}{2}} - x_{b1}}.u_{i-\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i-\frac{3}{2}}}.u_{b1},$$

onde $\delta x = x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{3}{2}}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.62.

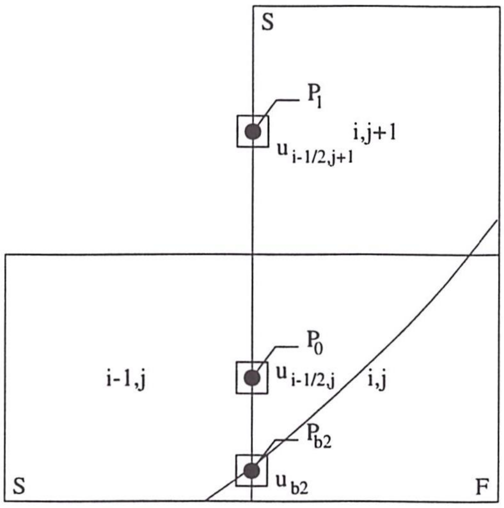


Figura 1.62: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+1})$ e $P_{b2} = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{b2}}{y_{j+1} - y_{b2}}.u_{i-\frac{1}{2},j+1} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j+1}}.u_{b2},$$

onde $\delta y = y_j - y_{j+1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.63.

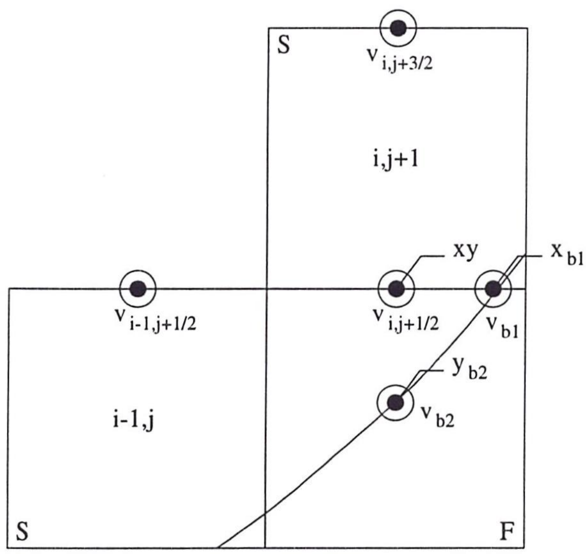


Figura 1.63: Célula F com a face $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.63, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1}-xy$ ou $y_{b2}-xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1}-xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.64.

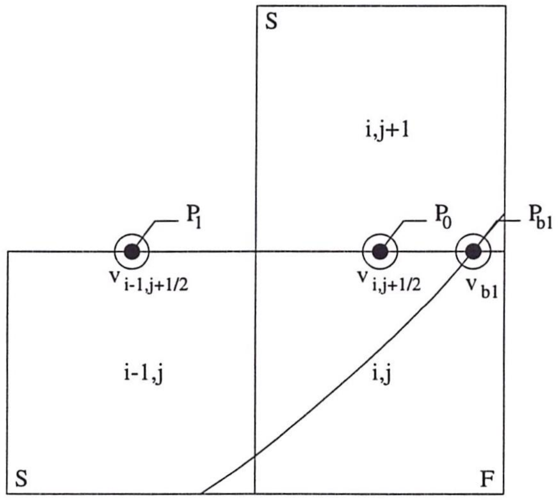


Figura 1.64: Célula F com as faces $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ na direção x

Seja $P_0=(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1=(x_{i-1}, y_{j+\frac{1}{2}})$ e $P_{b1}=(x_{b1}, y_{j+\frac{1}{2}})$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{b1}}{x_{i-1} - x_{b1}}.v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i-1}}.v_{b1},$$

onde $\delta x = x_i - x_{i-1}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.65.

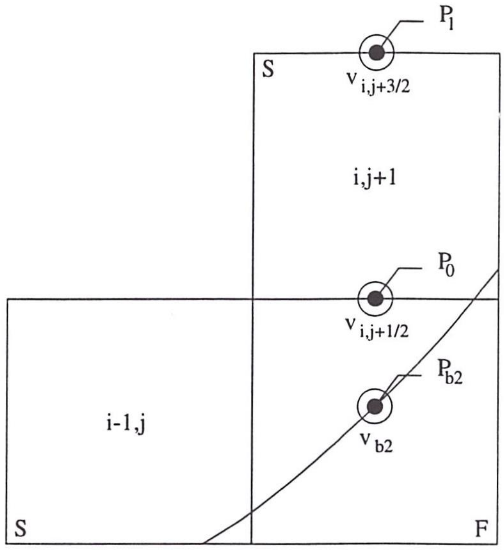


Figura 1.65: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_i, y_{j+\frac{3}{2}})$ e $P_{b2} = (x_i, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{b2}}{y_{j+\frac{3}{2}} - y_{b2}}.v_{i,j+\frac{3}{2}} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j+\frac{3}{2}}}.v_{b2},$$

onde $\delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j+\frac{3}{2}}$;

- células F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.66.

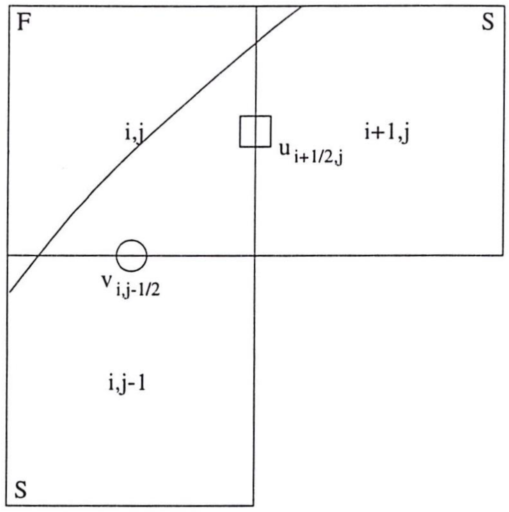


Figura 1.66: Célula F com a face $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.66 pode-se observar que as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i+\frac{5}{2},j}$, $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i+\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida. E para o cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$, $u_{i+\frac{3}{2},j-1}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j-2}$ são conhecidadas e, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.67.

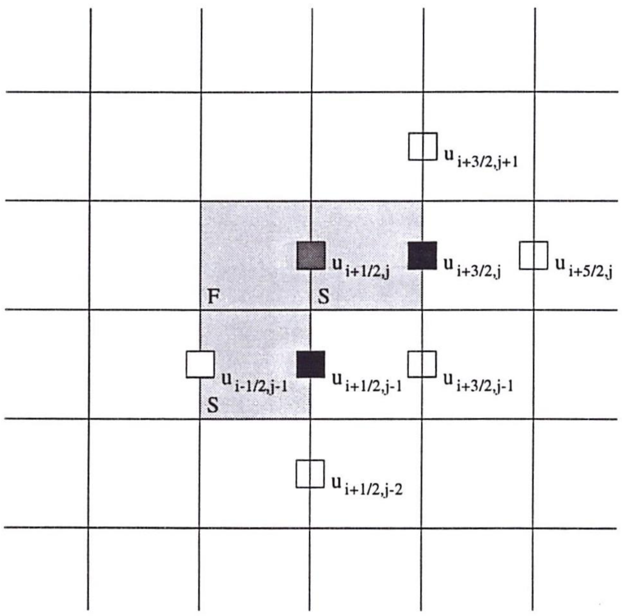


Figura 1.67: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i+\frac{3}{2},j}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$

Para o cálculo de $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i+2,j-\frac{1}{2}}$, $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i+1,j-\frac{3}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida. E para o cálculo de $v_{i,j-\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j-\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j-\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.68.

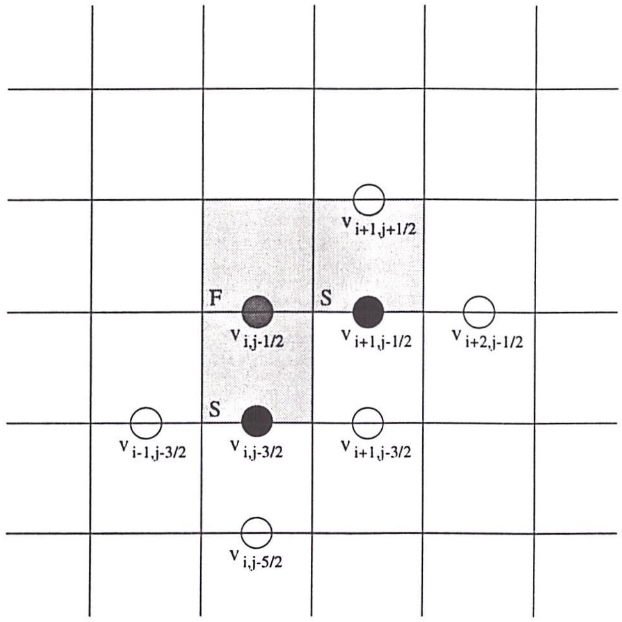


Figura 1.68: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear. Quando tem-se células F com duas faces em contato com células S ou C pode ocorrer de se ter duas opções para interpolar, uma na direção x e outra na direção y.

Para o cálculo da velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.69.

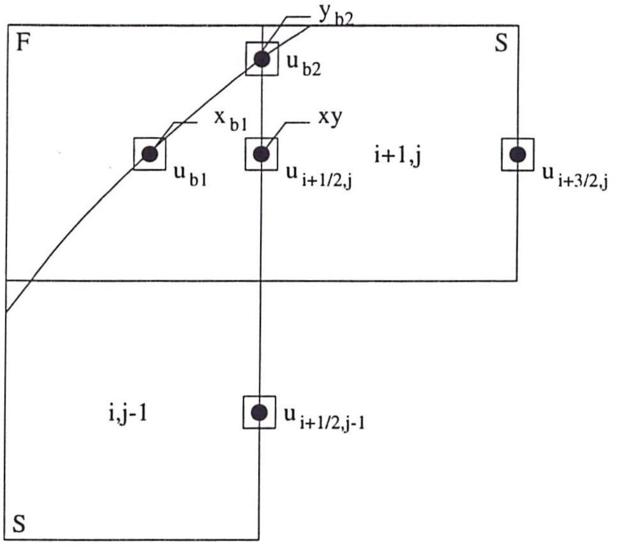


Figura 1.69: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.69, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1} - xy$ ou $y_{b2} - xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1} - xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.70.

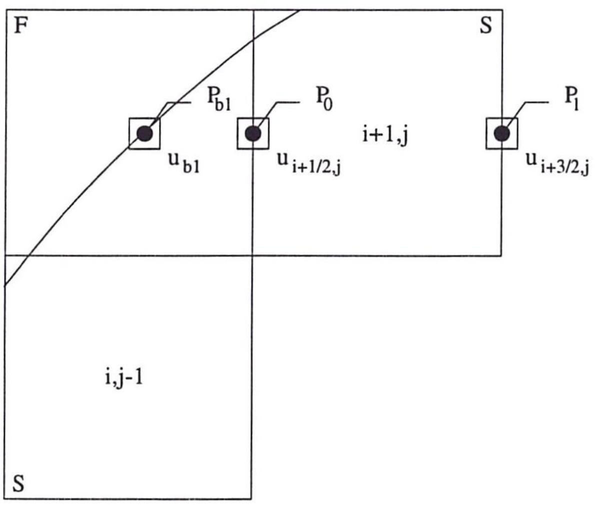


Figura 1.70: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$ na direção x

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_{b1} = (x_{b1}, y_j)$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{b1}}{x_{i+\frac{3}{2}} - x_{b1}}.u_{i+\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i+\frac{3}{2}}}.u_{b1},$$

onde $\delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{3}{2}}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.71.

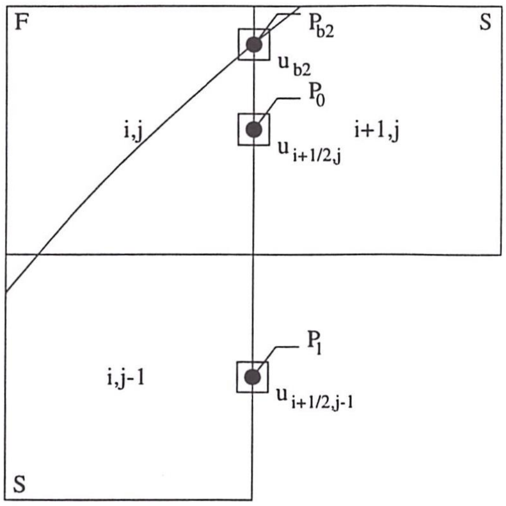


Figura 1.71: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i+\frac{1}{2},j}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-1})$ e $P_{b2} = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{b2}}{y_{j-1} - y_{b2}}.u_{i+\frac{1}{2},j-1} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j-1}}.u_{b2},$$

onde $\delta y = y_j - y_{j-1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.72.

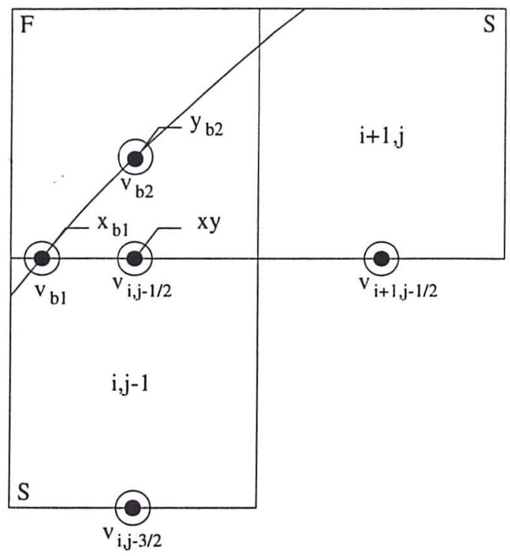


Figura 1.72: Célula F com a face $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.72, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1} - xy$ ou $y_{b2} - xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1} - xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.73.

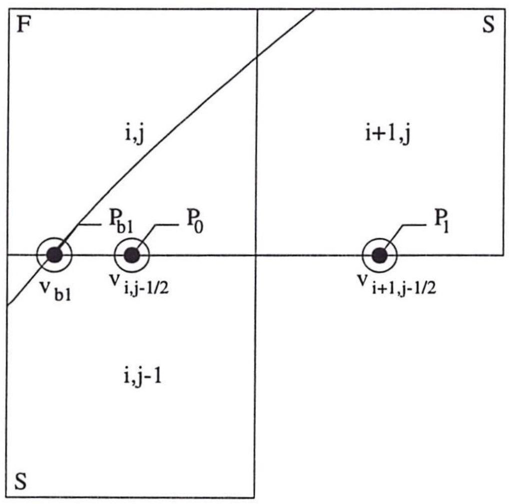


Figura 1.73: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ na direção x

Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i+1}, y_{j-\frac{1}{2}})$ e $P_{b1} = (x_{b1}, y_{j-\frac{1}{2}})$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{b1}}{x_{i+1} - x_{b1}}.v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i+1}}.v_{b1},$$

onde $\delta x = x_i - x_{i+1}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.74.

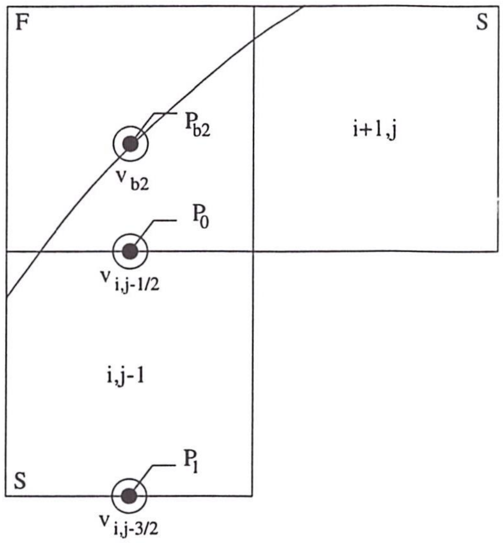


Figura 1.74: Célula F com as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_i, y_{j-\frac{3}{2}})$ e $P_{b2} = (x_i, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{y_{j-\frac{1}{2}} - y_{b2}}{y_{j-\frac{3}{2}} - y_{b2}}.v_{i,j-\frac{3}{2}} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j-\frac{3}{2}}}.v_{b2},$$

onde $\delta y = y_{j-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{3}{2}}$;

- células F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C: como mostra a figura 1.75.

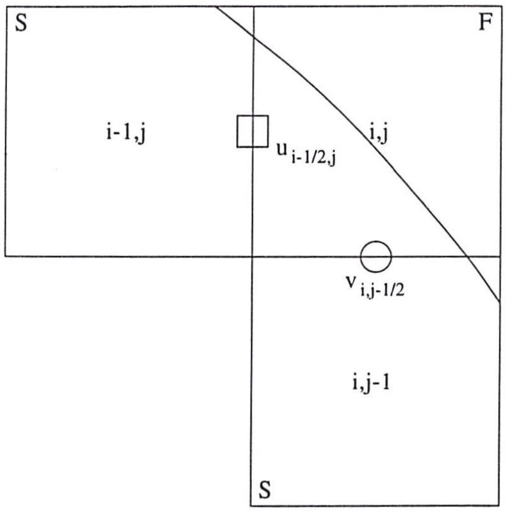


Figura 1.75: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C

Na figura 1.75 pode-se observar que as velocidades $u_{i-\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ são exigidas, pois para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{5}{2},j}$, $u_{i-\frac{3}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{3}{2},j-1}$ são conhecidadas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida. E para o cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $u_{i-\frac{3}{2},j-1}$, $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j-2}$ são conhecidadas e, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.76.

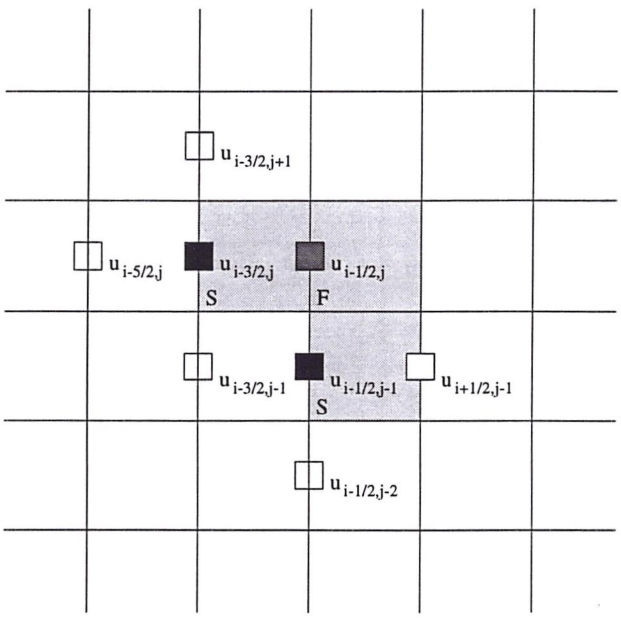


Figura 1.76: Velocidades utilizadas para o cálculo de $u_{i-\frac{3}{2},j}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$

Para o cálculo de $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-2,j-\frac{1}{2}}$, $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{3}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida. E para o cálculo de $v_{i,j-\frac{3}{2}}$ utiliza-se as quatro velocidades mais próximas, onde as velocidades $v_{i-1,j-\frac{3}{2}}$, $v_{i+1,j-\frac{3}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{5}{2}}$ são conhecidas e, $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ é desconhecida, como mostra a figura 1.77.

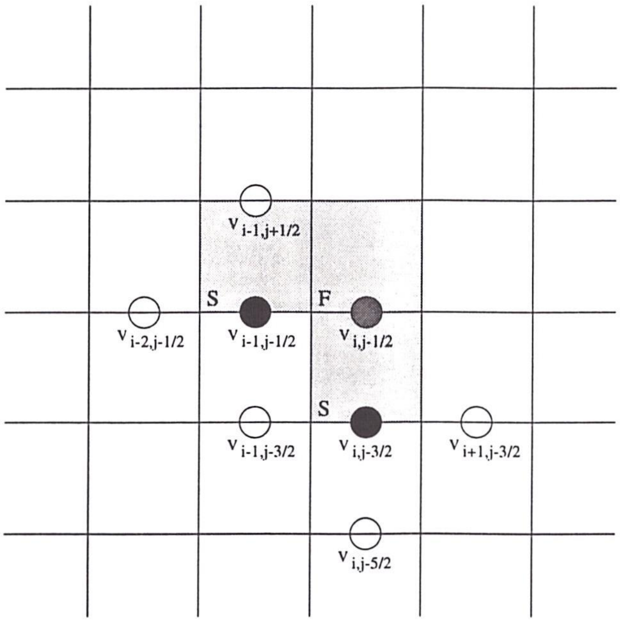


Figura 1.77: Velocidades utilizadas para o cálculo de $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ e $v_{i,j-\frac{3}{2}}$

Então deve-se calcular as velocidades u e v desconhecidas nas faces das células F através de interpolação linear. Quando tem-se células F com duas faces em contato com células S ou C pode ocorrer de se ter duas opções para interpolar, uma na direção x e outra na direção y.

Para o cálculo da velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ considere a figura 1.78.

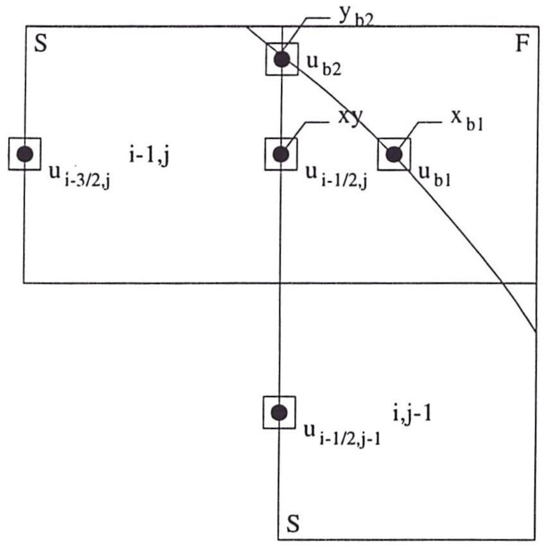


Figura 1.78: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.78, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1} - xy$ ou $y_{b2} - xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1} - xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.79.

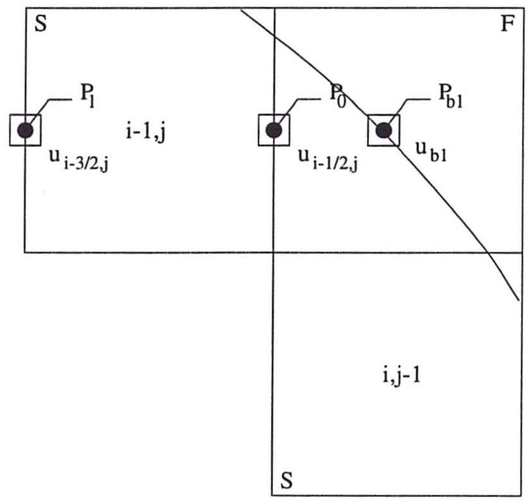


Figura 1.79: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$ na direção x

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{3}{2}}, y_j)$ e $P_{b1} = (x_{b1}, y_j)$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x_{b1}}{x_{i-\frac{3}{2}} - x_{b1}}.u_{i-\frac{3}{2},j} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i-\frac{3}{2}}}.u_{b1},$$

onde $\delta x = x_{i-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{3}{2}}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.80.

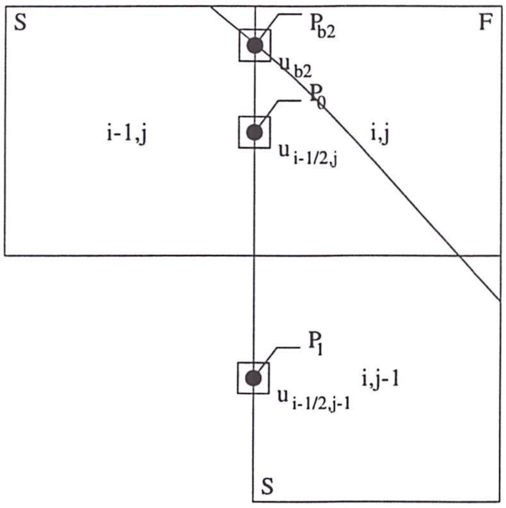


Figura 1.80: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $u_{i-\frac{1}{2},j}$ na direção y

Seja $P_0 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$, $P_1 = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-1})$ e $P_{b2} = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $u_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{y_j - y_{b2}}{y_{j-1} - y_{b2}}.u_{i-\frac{1}{2},j-1} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j-1}}.u_{b2},$$

onde $\delta y = y_j - y_{j-1}$.

Para o cálculo da velocidade $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ considere a figura 1.81.

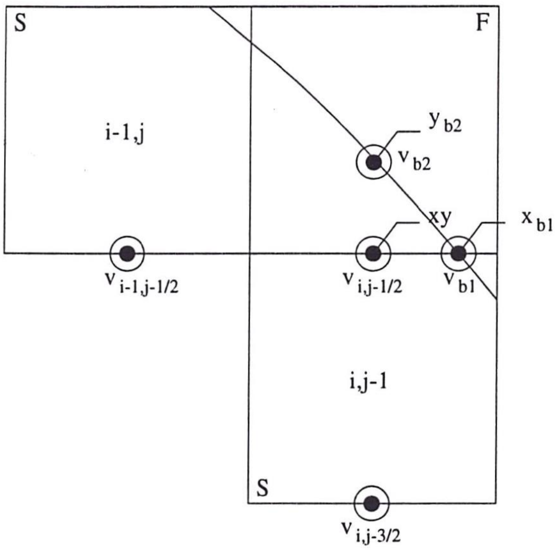


Figura 1.81: Célula F com a face $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$

Tem-se duas opções para a interpolação, como pode ser observado na figura 1.81, uma na direção x, outra na direção y. Escolhe-se a direção onde $x_{b1} - xy$ ou $y_{b2} - xy$ for menor em módulo.

Se a menor distância for $x_{b1} - xy$ então a interpolação é feita na direção x, como mostra a figura 1.82.

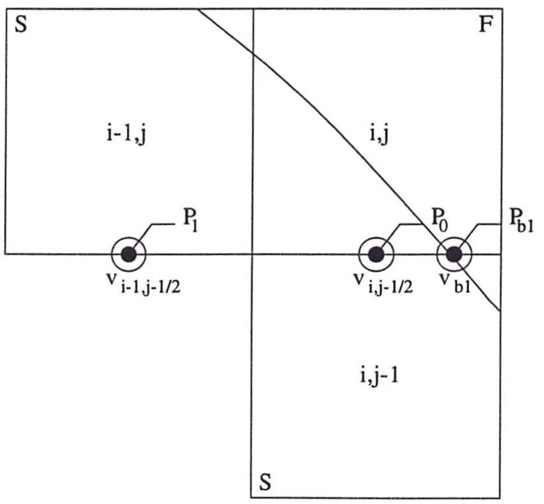


Figura 1.82: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ na direção x

Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}})$ e $P_{b1} = (x_{b1}, y_{j-\frac{1}{2}})$, onde x_{b1} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b1} e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{b1}}{x_{i-1} - x_{b1}}.v_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta x}{x_{b1} - x_{i-1}}.v_{b1},$$

onde $\delta x = x_i - x_{i-1}$.

Se a menor distância for $y_{b2} - xy$ então a interpolação é feita na direção y, como mostra a figura 1.83.

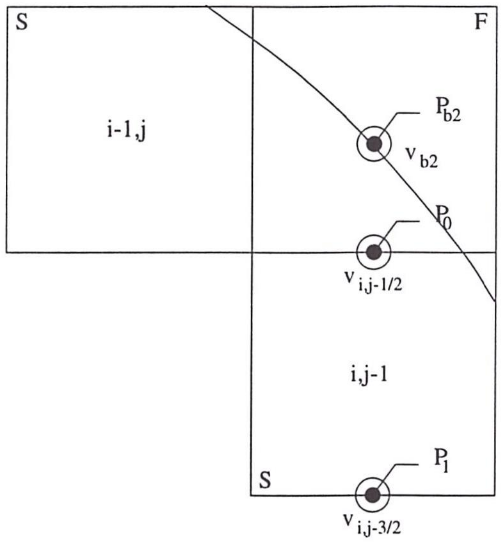


Figura 1.83: Célula F com as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células S ou C - cálculo de $v_{i,j-\frac{1}{2}}$ na direção y

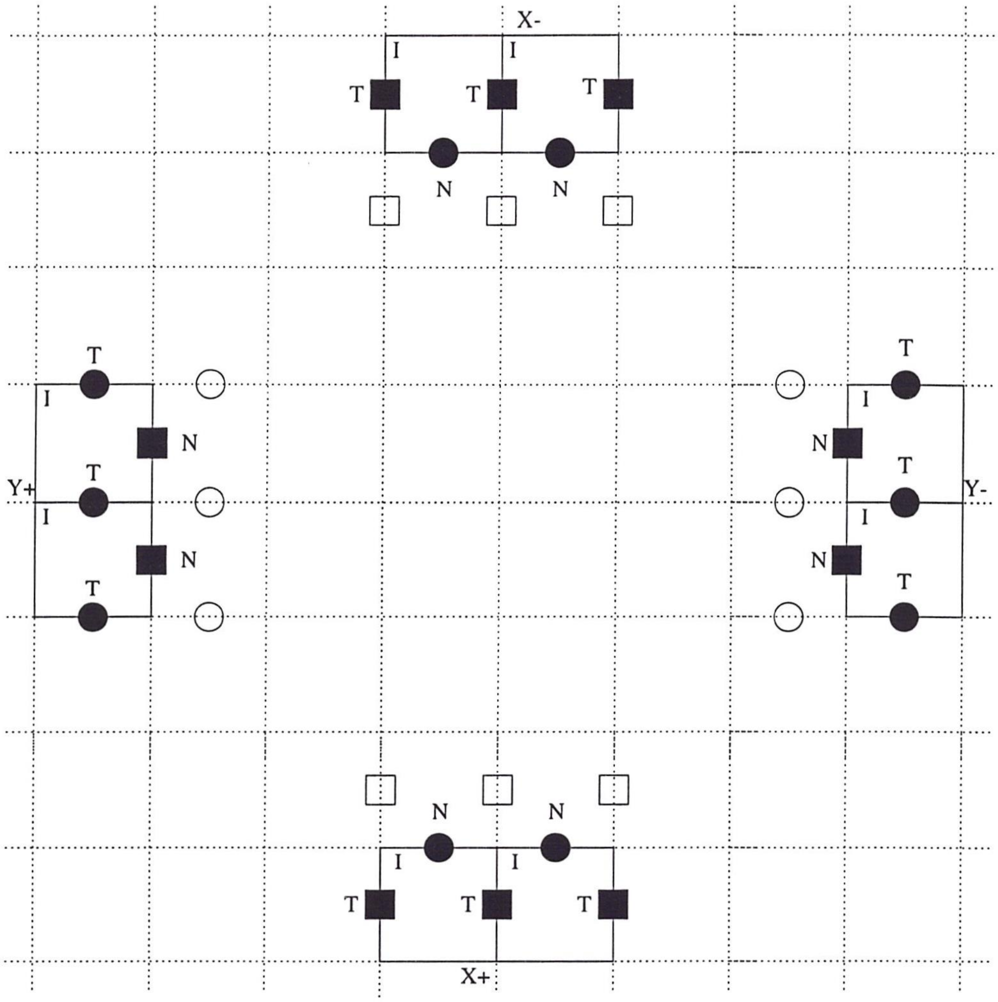
Seja $P_0 = (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, $P_1 = (x_i, y_{j-\frac{3}{2}})$ e $P_{b2} = (x_i, y_{b2})$, onde y_{b2} denota a intersecção entre a linha definida por P_0 e P_1 com a superfície da fronteira. Então por interpolação linear entre P_{b2} e P_1 calcula-se $v_{i,j-\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{y_{j-\frac{1}{2}} - y_{b2}}{y_{j-\frac{3}{2}} - y_{b2}}.v_{i,j-\frac{3}{2}} + \frac{\delta y}{y_{b2} - y_{j-\frac{3}{2}}}.v_{b2},$$

onde $\delta y = y_{j-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{3}{2}}$.

1.5 Cálculo das Velocidades Tangenciais u e v nos Injetores

Para o cálculo das velocidades tangenciais u e v no injetor. Observe a figura 1.84.



X-	plano x, orientação negativa
X+	plano x, orientação positiva
Y-	plano y, orientação negativa
Y+	plano y, orientação positiva
N	normal
T	tangencial
I	célula injetora

Figura 1.84: Plano x e y, e orientação dos possíveis injetores

Então, tem-se dois planos x e y, e cada plano tem duas orientações positiva e negativa:

• plano x (de acordo com a figura 1.84 o plano x fica na região superior e inferior do domínio):

- orientação positiva (de acordo com a figura 1.84 o plano x com orientção positiva fica na região inferior do domínio):

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = -u_{i+\frac{1}{2},j+1}$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = -u_{i-\frac{1}{2},j-1};$$

- orientação negativa (de acordo com a figura 1.84 o plano x com orientação negativa fica na região superior do domínio):

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = -u_{i+\frac{1}{2},j-1}$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = -u_{i-\frac{1}{2},j-1};$$

- plano y (de acordo com a figura 1.84 o plano y fica na região a esquerda e direita do domínio):

  - orientação positiva (de acordo com a figura 1.84 o plano y com orientção positiva fica na região a esquerda do domínio):

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j-\frac{1}{2}};$$

  - orientação negativa (de acordo com a figura 1.84 o plano y com orientção negativa fica na região a direita do domínio):

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = -v_{i-1,j-\frac{1}{2}}.$$

1.6 Cálculo da Pressão p nas Condições de Contorno na Superfície Livre

Para o cálculo da pressão p nas condições de contorno na superfície livre o método utilizado é o seguinte: percorre-se todas as células S e estuda-se as células vizinhas, então calcula-se p pela equação (1.3)

$$-p + \frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x n_y + \frac{\partial v}{\partial y}n_y^2\right) = 0. \tag{1.3}$$

Para o caso bidimensional, deve-se considerar quinze casos que se agrupam em três conjuntos:

- células S tendo apenas uma face em contato com células V:

- células S tendo a face $i+\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.85.

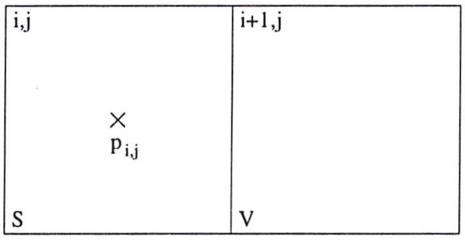


Figura 1.85: Célula S tendo a face $i+\frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n=(1,0)$ e 1.3 fica:

$$p=\frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\delta u}{\partial x}\right),$$

que discretizada torna-se:

$$p_{i,j}=\frac{2\nu(q_{i,j})}{Re}\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}\right);$$

- células S tendo a face $i-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.86.

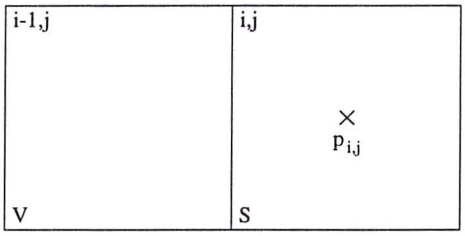


Figura 1.86: Célula S tendo a face $i-\frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n=(-1,0)$ e 1.3 fica:

$$p=\frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\delta u}{\partial x}\right),$$

que discretizada torna-se:

$$p_{i,j}=\frac{2\nu(q_{i,j})}{Re}\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}\right);$$

- células S tendo a face $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.87.

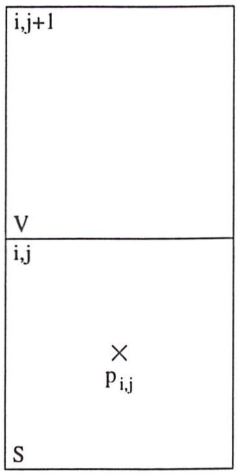


Figura 1.87: Célula S tendo a face $j+\frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n=(0,1)$ e 1.3 fica:

$$p=\frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\delta v}{\partial y}\right),$$

que discretizada torna-se:

$$p_{i,j}=\frac{2\nu(q_{i,j})}{Re}\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}-v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}\right);$$

- células S tendo a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.88.

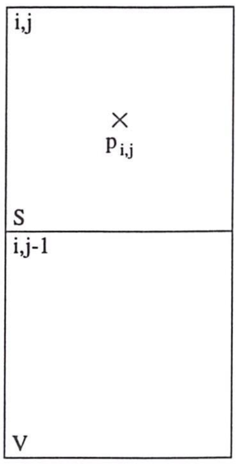


Figura 1.88: Célula S tendo a face $j-\frac{1}{2}$ em contato com a célula V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n=(0,-1)$ e 1.3 fica:

$$p = \frac{2\nu(q)}{Re}\left(\frac{\delta v}{\partial y}\right),$$

que discretizada torna-se:

$$p_{i,j} = \frac{2\nu(q_{i,j})}{Re}\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}\right);$$

- células S com duas faces em contato com células V:

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.89.

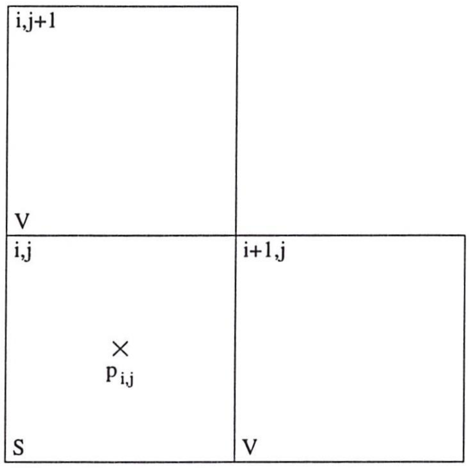


Figura 1.89: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e 1.3 fica:

$$p = \frac{\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

que discretizada fica:

$$p_{i,j} = \frac{\nu(q_{i,j})}{2Re}\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y}\right) + \right.$$
$$\left.\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x}\right)\right.;$$

- células S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.90.

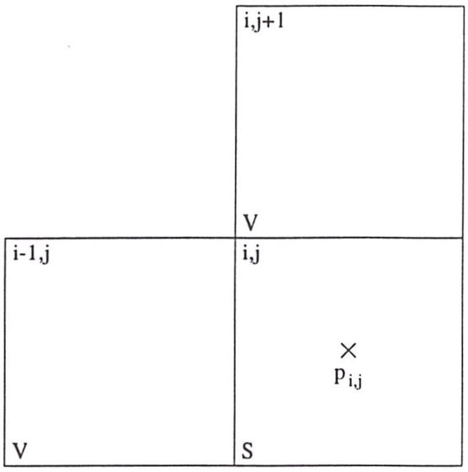


Figura 1.90: Célula S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e 1.3 fica:

$$p = \frac{-\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

que discretizada fica:

$$p_{i,j} = \frac{-\nu(q_{i,j})}{2Re}\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x}\right)\right];$$

- células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.91.

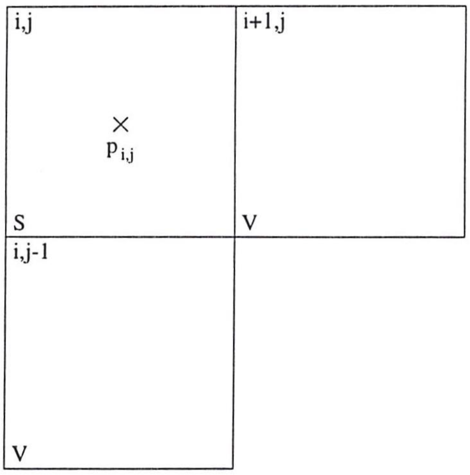


Figura 1.91: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$ e 1.3 fica:

$$p = \frac{-\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

que discretizada fica:

$$p_{i,j} = \frac{-\nu(q_{i,j})}{2Re}\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x}\right)\right];$$

- células S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.92.

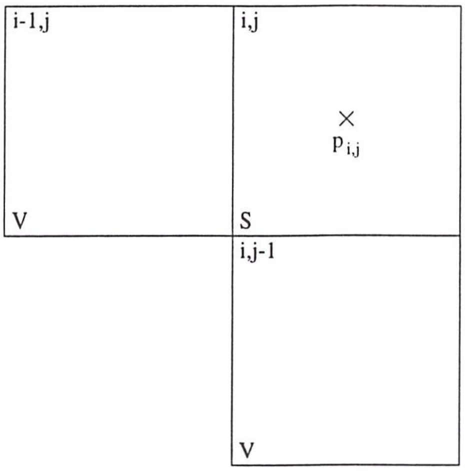


Figura 1.92: Célula S tendo as faces $i - \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V

Para este caso assume-se que o vetor normal é $n = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$ e 1.3 fica:

$$p = \frac{\nu(q)}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

que discretizada fica:

$$p_{i,j} = \frac{\nu(q_{i,j})}{2Re}\Bigg[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\delta y}\right) +$$

$$\left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x}\right)\Bigg];$$

- células S com dois lados opostos, três ou quatro faces em contato com células V: para estes casos a pressão é zero, pois não se consegue determinar o vetor normal.

Existem sete casos:

- células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.93;

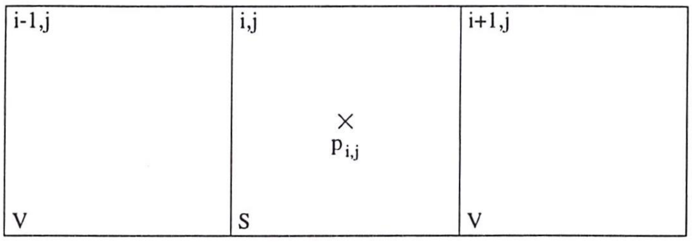


Figura 1.93: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.94;

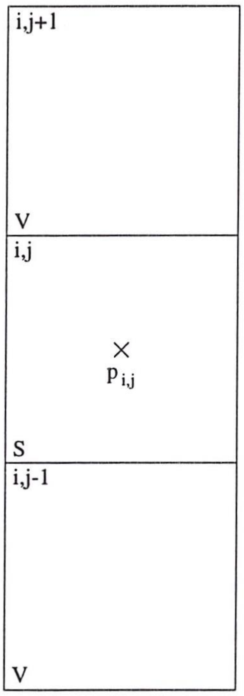


Figura 1.94: Célula S tendo as faces $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$ e $j + \frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.95;

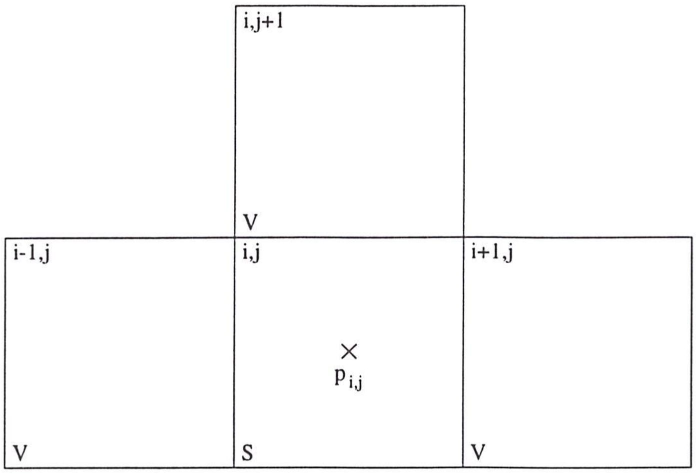


Figura 1.95: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j+\frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.96;

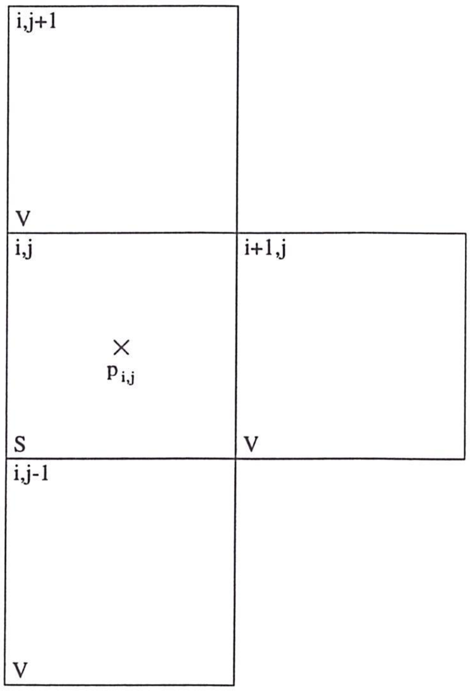


Figura 1.96: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.97;

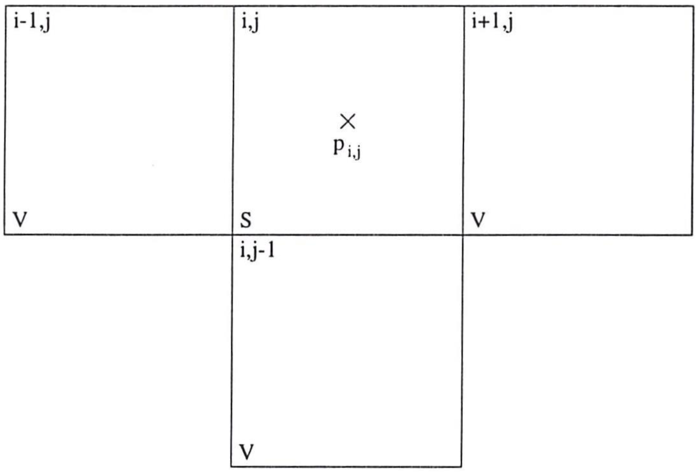


Figura 1.97: Célula S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.98;

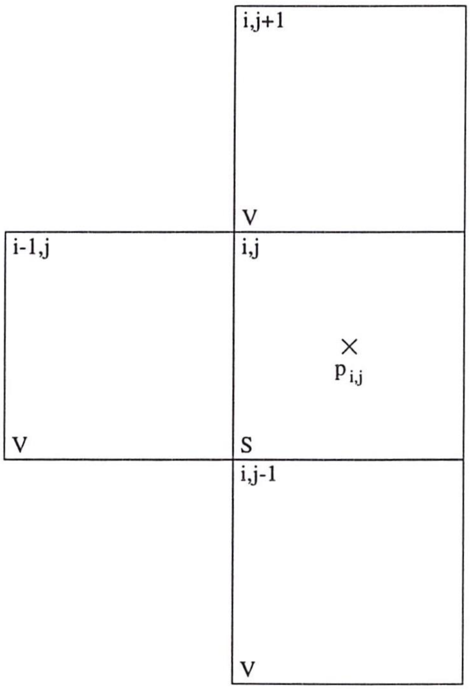


Figura 1.98: Célula S tendo as faces $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V

- células S tendo as faces $i+\frac{1}{2}$, $i-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$ e $j-\frac{1}{2}$ em contato com células V: como mostra a figura 1.99;

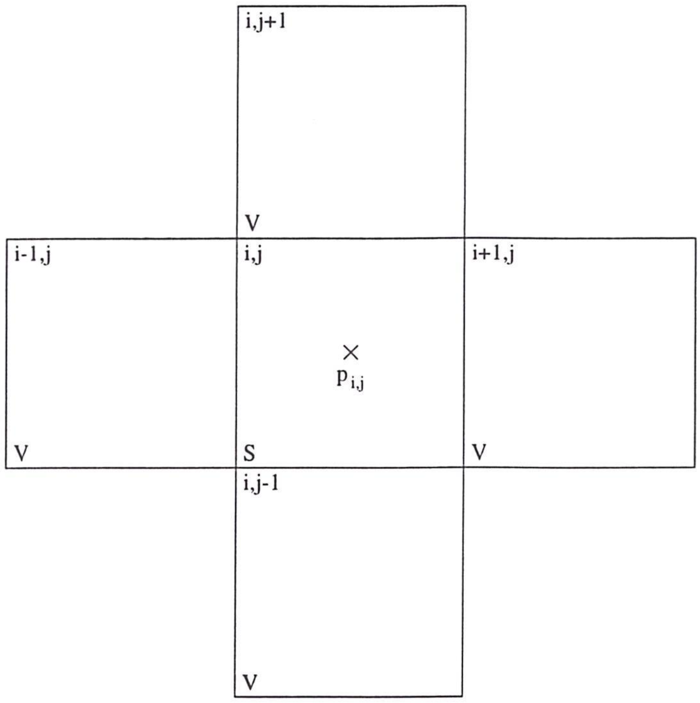


Figura 1.99: Célula S tendo as faces $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ e $j - \frac{1}{2}$ em contato com células V

1.7 Cálculo das Velocidades Intermediárias

Cálcula-se as velocidades intermediárias $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ pelas equações do momento discretizadas 1.4 e 1.5 em [1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta t} &= -\left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta x}\right) - \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}.u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}.u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y}\right. \\
&\quad \left.\frac{+u_{i+\frac{1}{2},j+1}(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}) - u_{i+\frac{1}{2},j-1}(v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}})}{\delta y}\right] \\
&\quad +\frac{1}{Re}\nu(q_{i+\frac{1}{2},j})\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2}\right) - \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y}\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{Re}\left[2\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta x}\right)\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\right. \\
&\quad \left. +\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\delta y}\right) + \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta x}\right)\right]\left[\frac{\partial \nu}{\partial y}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\right] \\
&\quad +\frac{1}{Fr^2}g_x \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

e

$$\frac{\tilde{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta t} = -\left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta y}\right) - \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}.v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}.v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x}\right.$$

$$\left.+\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}(u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1})}{\delta x}\right]$$

$$-\frac{1}{Re}\nu(q_{i,j+\frac{1}{2}})\left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x\delta y}\right) + \left(\frac{2v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{Re}\left[2\left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta y}\right)\left[\frac{\partial \nu}{\partial y}\right]_{i,j+\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2\delta x}\right) + \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta y}\right)\right]\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\right]_{i,j+\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{Fr^2}g_y, \qquad (1.5)$$

O método utilizado é o seguinte. Percorre-se todas as células C e estuda-se as células seguinte e superior, depois percorre-se todas as células S e faz o mesmo estudo. Então:

- se a célula i, j for C:

  - se a célula $i + 1, j$ for C: como mostra a figura 1.100.

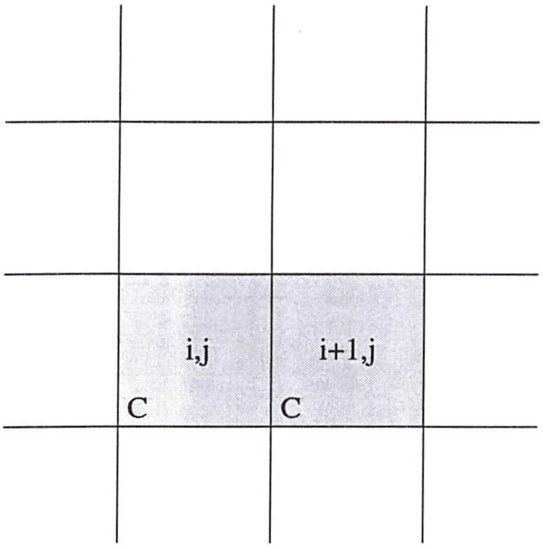


Figura 1.100: Células i, j e $i+1, j$ são C

Então por 1.4 calcula-se $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}$, $\tilde{p}$ nas células C é zero;

- se a célula $i+1, j$ for S: como mostra a figura 1.101.

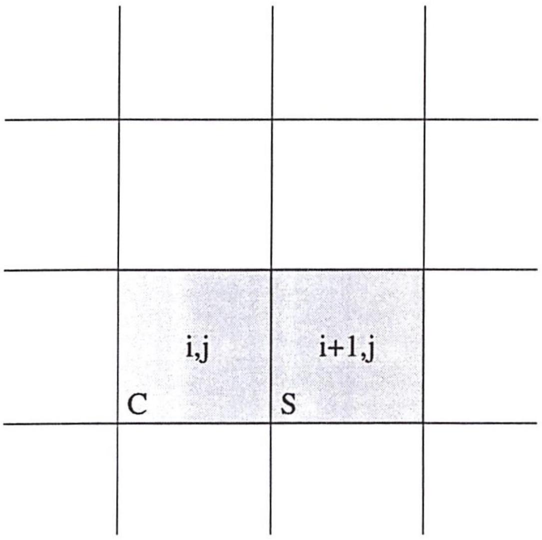


Figura 1.101: Célula i, j é C e $i+1, j$ é S

Então por 1.4 calcula-se $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}$, nota-se que há pressão somente na célula $i+1, j$, pois é S;

- se a célula $i, j+1$ for C: como mostra a figura 1.102.

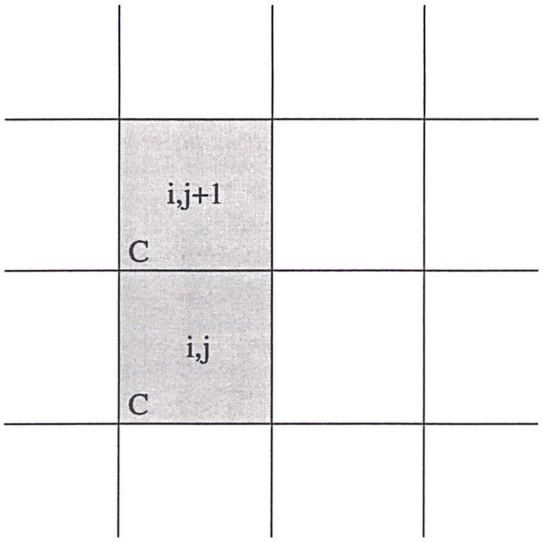


Figura 1.102: Células i, j e $i, j+1$ são C

Então por 1.5 calcula-se $\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\tilde{p}$ nas células C é zero;

- se a célula $i, j+1$ for S: como mostra a figura 1.103.

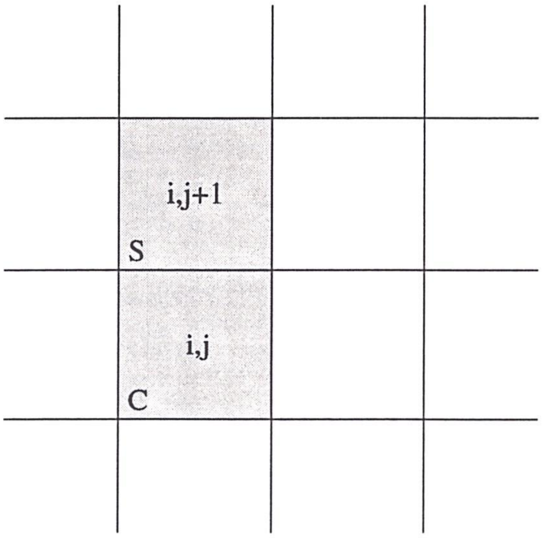


Figura 1.103: Célula i, j é C e $i, j+1$ é S

Então por 1.5 calcula-se $\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$, nota-se que há pressão somente na célula $i, j+1$, pois é S;

- se a célula i, j for S:

  - se a célula $i+1, j$ for C: como mostra a figura 1.104.

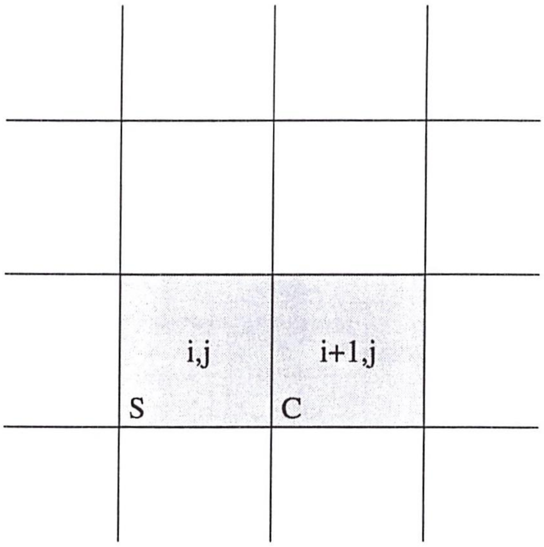


Figura 1.104: Célula i, j é S e $i+1, j$ é C

Então por 1.4 calcula-se $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}$, nota-se que há pressão somente na célula i, j, pois é S;

- se a célula $i+1, j$ for S: como mostra a figura 1.105.

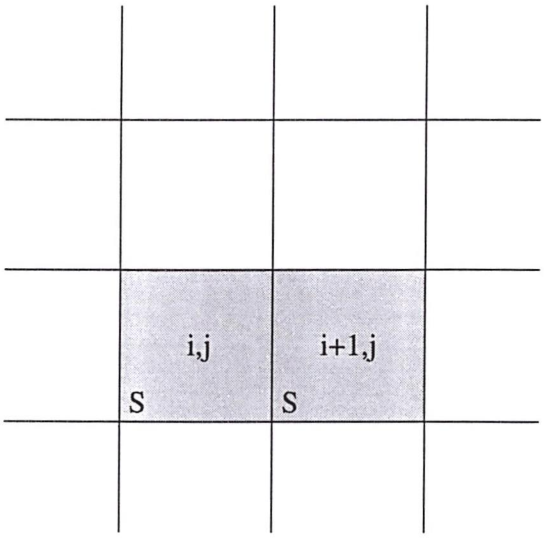


Figura 1.105: Células i, j e $i+1, j$ são S

Então por 1.4 calcula-se $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}$, nota-se que há pressão nas células i, j e $i+1, j$, pois são S;

- se a célula $i, j+1$ for C: como mostra a figura 1.106.

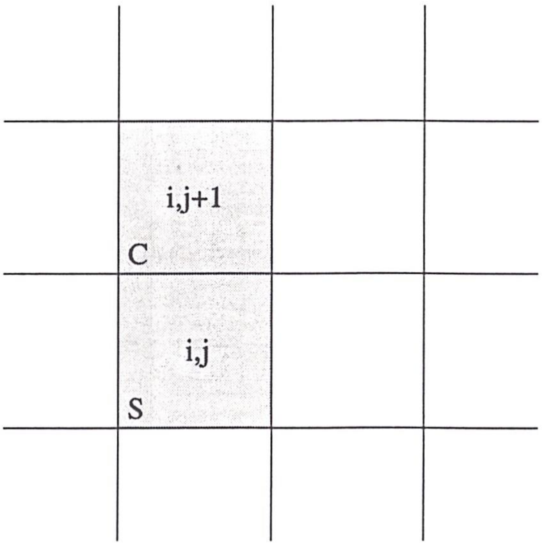


Figura 1.106: Célula i, j é S e $i, j+1$ é C

Então por 1.5 calcula-se $\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$, nota-se que há pressão somente na célula i, j, pois é S;

- se a célula $i, j+1$ for S: como mostra a figura 1.107.

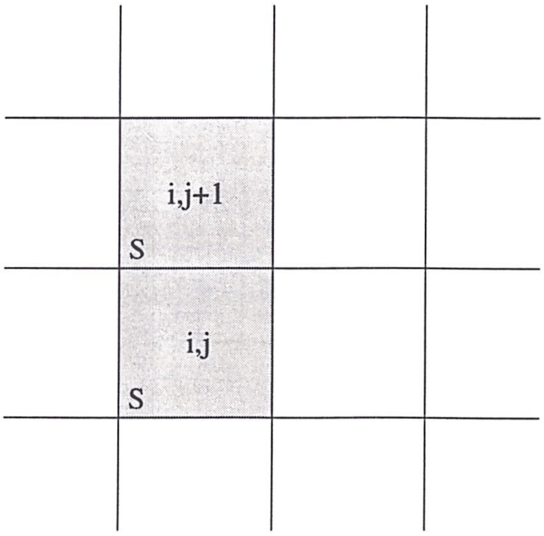


Figura 1.107: Células i, j e $i, j+1$ são S

Então por 1.5 calcula-se $\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$, nota-se que há pressão nas células i, j e $i+1, j$, pois são S.

1.8 Resolução da Equação de Poisson

Resolve-se a equação de Poisson 1.6 através do método dos gradientes conjugados,

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \tilde{D}_{i,j}. \tag{1.6}$$

Mas primeiramente é preciso montar a matriz. Como exemplo considerando que $\Delta x = \Delta y = h$, então a equação de Poisson 1.6 fica:

$$4\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1} = -h^2\tilde{D}_{i,j}. \tag{1.7}$$

Utilizando as condições de fronteira adequadas, onde:

$$\psi = 0 \qquad \text{na superfície livre} \qquad \text{(condição homogênea de Dirichlet)} \tag{1.8}$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{fronteira rígida} \quad \text{(condição homogênea de Newmann)}, \tag{1.9}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é a direção normal ao contorno rígido.

Quando se impõe as condições de contorno de não escorregamento e de escorregamento livre em 1.9, a velocidade normal ao contorno deve ser nula. Para a equação $\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},t) = \nabla.\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ tem-se que $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ satisfaz as mesmas condições de contorno impostas para $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. Como as "fronteiras virtuais" coincidem com as linhas da malha, obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0,$$

onde se $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ então $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ e se $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ então $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$.

A condição 1.8 deriva do fato que $\tilde{p}$ satisfaz a correta condição de fronteira sobre a superfície livre, como $p = \tilde{p} + \frac{\psi}{\delta t}$, isto implica que $\psi = 0$.

Então como exemplo considere a figura 1.108.

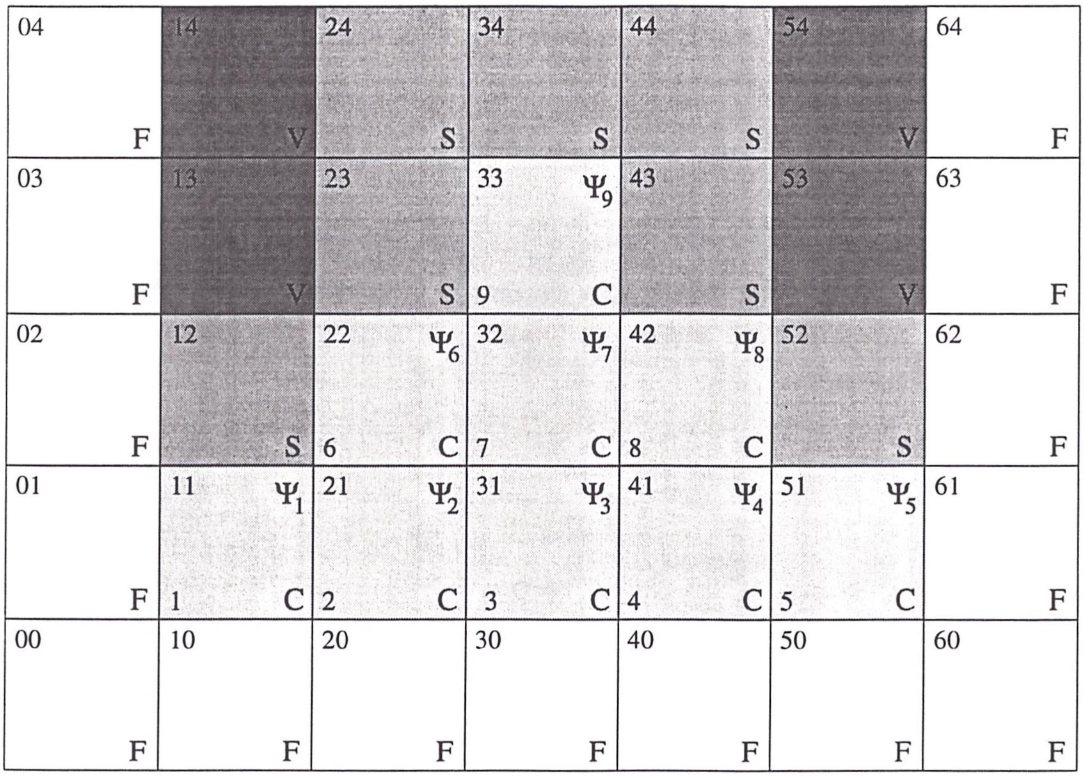


Figura 1.108: Exemplo para montar a matriz

Agora, fazendo os cálculos para montar a matriz:

- $i = 1$, $j = 1$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{1,1} - \psi_{2,1} - \psi_{0,1} - \psi_{1,2} - \psi_{1,0} = -h^2\tilde{D}_{1,1}.$$

Por 1.8 tem-se que $\psi_{1,2} = 0$ e por 1.9, tem-se que:

$$\frac{\psi_{1,1} - \psi_{0,1}}{\delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{0,1} = \psi_{1,1},$$

$$\frac{\psi_{1,1} - \psi_{1,0}}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{1,0} = \psi_{1,1}.$$

Então,

$$2\psi_{1,1} - \psi_{2,1} = -h^2\tilde{D}_{1,1} \quad \Rightarrow \quad 2\psi_1 - \psi_2 = -h^2\tilde{D}_{1,1};$$

- $i = 2$, $j = 1$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{2,1} - \psi_{3,1} - \psi_{1,1} - \psi_{2,2} - \psi_{2,0} = -h^2\tilde{D}_{2,1}.$$

Por 1.9, tem-se que:

$$\frac{\psi_{2,1} - \psi_{2,0}}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{2,0} = \psi_{2,1}.$$

Então,

$$3\psi_{2,1} - \psi_{3,1} - \psi_{1,1} - \psi_{2,2} = -h^2\tilde{D}_{2,1} \quad \Rightarrow \quad 3\psi_2 - \psi_3 - \psi_1 - \psi_6 = -h^2\tilde{D}_{2,1};$$

- $i = 3$, $j = 1$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{3,1} - \psi_{4,1} - \psi_{2,1} - \psi_{3,2} - \psi_{3,0} = -h^2\tilde{D}_{3,1}.$$

Por 1.9, tem-se que:

$$\frac{\psi_{3,1} - \psi_{3,0}}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{3,0} = \psi_{3,1}.$$

Então,

$$3\psi_{3,1} - \psi_{4,1} - \psi_{2,1} - \psi_{3,2} = -h^2\tilde{D}_{3,1} \quad \Rightarrow \quad 3\psi_3 - \psi_4 - \psi_2 - \psi_7 = -h^2\tilde{D}_{3,1};$$

- $i = 4$, $j = 1$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{4,1} - \psi_{55,1} - \psi_{3,1} - \psi_{4,2} - \psi_{4,0} = -h^2\tilde{D}_{4,1}.$$

Por 1.9, tem-se que:

$$\frac{\psi_{4,1} - \psi_{4,0}}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{4,0} = \psi_{4,1}.$$

Então,

$$3\psi_{4,1} - \psi_{5,1} - \psi_{3,1} - \psi_{4,2} = -h^2\tilde{D}_{4,1} \quad \Rightarrow \quad 3\psi_4 - \psi_5 - \psi_3 - \psi_8 = -h^2\tilde{D}_{4,1};$$

- $i = 5$, $j = 1$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{5,1} - \psi_{6,1} - \psi_{4,1} - \psi_{5,2} - \psi_{5,0} = -h^2\tilde{D}_{5,1}.$$

Por 1.8 tem-se que $\psi_{5,2} = 0$ e por 1.9, tem-se que:

$$\frac{\psi_{6,1} - \psi_{5,1}}{\delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{6,1} = \psi_{5,1},$$

$$\frac{\psi_{5,1} - \psi_{5,0}}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{5,0} = \psi_{5,1}.$$

Então,

$$2\psi_{5,1} - \psi_{4,1} = -h^2\tilde{D}_{5,1} \quad \Rightarrow \quad 2\psi_5 - \psi_4 = -h^2\tilde{D}_{5,1};$$

- $i = 2$, $j = 2$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{2,2} - \psi_{3,2} - \psi_{1,2} - \psi_{2,3} - \psi_{2,1} = -h^2\tilde{D}_{2,2}.$$

Por 1.8 tem-se que $\psi_{1,2} = 0$ e $\psi_{2,3} = 0$. Então,

$$4\psi_{2,2} - \psi_{3,2} - \psi_{2,1} = -h^2\tilde{D}_{2,2} \quad \Rightarrow \quad 4\psi_6 - \psi_7 - \psi_2 = -h^2\tilde{D}_{2,2};$$

- $i = 3$, $j = 2$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{3,2} - \psi_{4,2} - \psi_{2,2} - \psi_{3,3} - \psi_{3,1} = -h^2\tilde{D}_{3,2} \quad \Rightarrow \quad 4\psi_7 - \psi_8 - \psi_6 - \psi_9 - \psi_3 = -h^2\tilde{D}_{3,2};$$

- $i = 4$, $j = 2$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{4,2} - \psi_{5,2} - \psi_{3,2} - \psi_{4,3} - \psi_{4,1} = -h^2\tilde{D}_{4,2}.$$

Por 1.8 tem-se que $\psi_{5,2} = 0$ e $\psi_{4,3} = 0$. Então,

$$4\psi_{4,2} - \psi_{3,2} - \psi_{4,1} = -h^2\tilde{D}_{4,2} \quad \Rightarrow \quad 4\psi_8 - \psi_7 - \psi_4 = -h^2\tilde{D}_{4,2};$$

- $i = 3$, $j = 3$: pela equação de Poisson 1.7, tem-se:

$$4\psi_{3,3} - \psi_{4,3} - \psi_{2,3} - \psi_{3,4} - \psi_{3,2} = -h^2\tilde{D}_{3,3}.$$

Por 1.8 tem-se que $\psi_{4,3} = 0$, $\psi_{2,3} = 0$ e $\psi_{3,4} = 0$. Então,

$$4\psi_{3,3} - \psi_{3,2} = -h^2\tilde{D}_{3,3} \quad \Rightarrow \quad 4\psi_9 - \psi_7 = -h^2\tilde{D}_{3,3}.$$

Então a matriz que será usada pelo método dos gradientes conjugados é:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 & \psi_9 \end{array} \\
\begin{array}{c} i=1,j=1 \\ i=2,j=1 \\ i=3,j=1 \\ i=4,j=1 \\ i=5,j=1 \\ i=2,j=2 \\ i=3,j=2 \\ i=4,j=2 \\ i=3,j=3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

1.9 Cálculo das Velocidades Finais u e v

Para o cálculo das velocidades finais u e v o método utilizado é o seguinte, percorre-se todas as células C e estuda-se as células seguinte e superior, depois percorre-se todas as células S e faz o mesmo estudo. Então, calcula-se as velocidades finais nas células C e S através das equações 1.10 e 1.11:

$$u = \tilde{u} - \nabla\psi \tag{1.10}$$

e

$$v = \tilde{v} - \nabla\psi \tag{1.11}$$

Então:

- se a célula i, j for C:

  - se a célula $i+1, j$ for C: como mostra a figura 1.109.

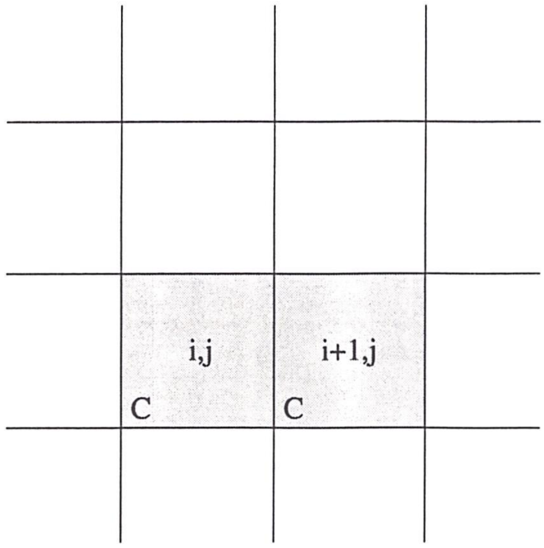


Figura 1.109: Células i,j e $i+1,j$ são C

Então por 1.10 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\frac{p_{i,j} - p_{i+1,j}}{\delta x}\right);$$

- se a célula $i+1,j$ for S: como mostra a figura 1.110.

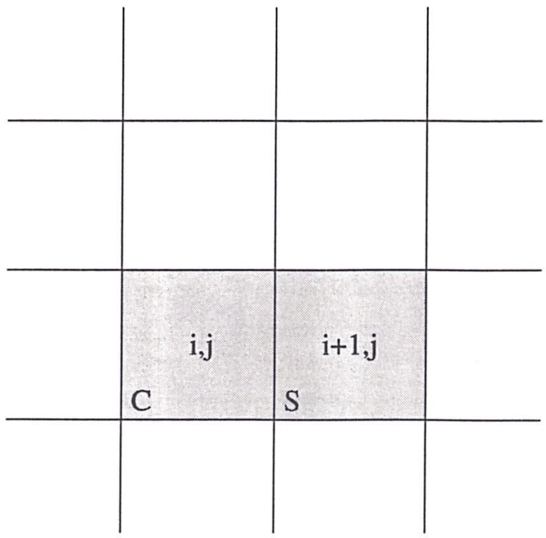


Figura 1.110: Célula i,j é C e $i+1,j$ é S

Então por 1.10 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{p_{i,j}}{\delta x};$$

- se a célula $i, j+1$ for C: como mostra a figura 1.111.

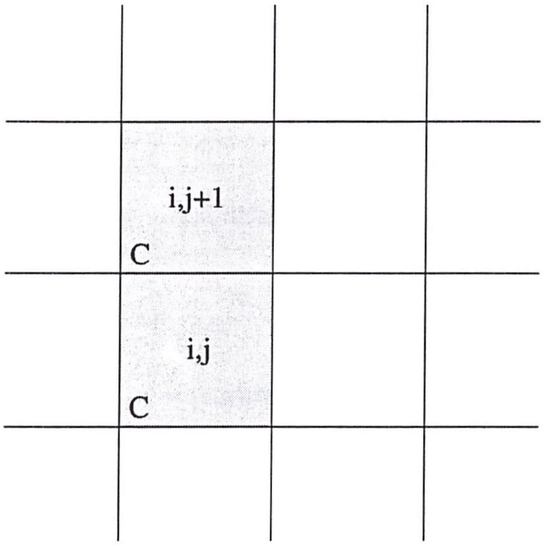


Figura 1.111: Células i, j e $i, j+1$ são C

Então por 1.11 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{\delta y}\right);$$

- se a célula $i, j+1$ for S: como mostra a figura 1.112.

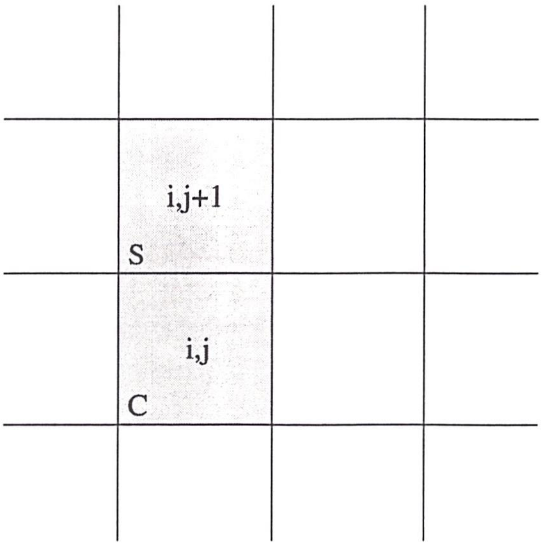


Figura 1.112: Célula i, j é C e $i, j+1$ é S

Então por 1.11 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{p_{i,j}}{\delta y};$$

- se a célula i, j for S:

  - se a célula $i+1, j$ for C: como mostra a figura 1.113.

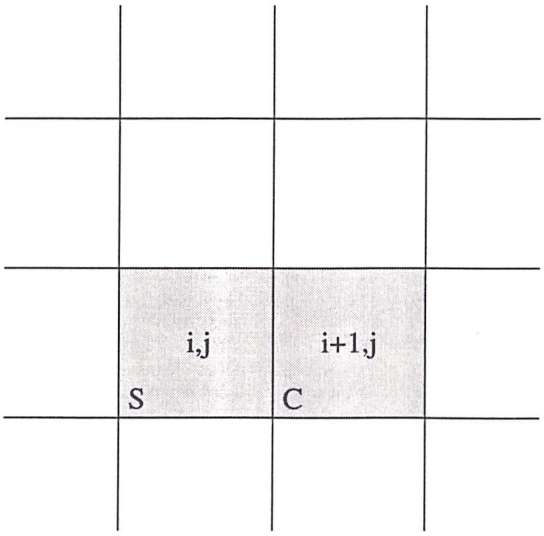


Figura 1.113: Célula i, j é S e $i+1, j$ é C

Então por 1.10 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{p_{i+1,j}}{\delta x};$$

- se a célula $i+1,j$ for S: como mostra a figura 1.114.

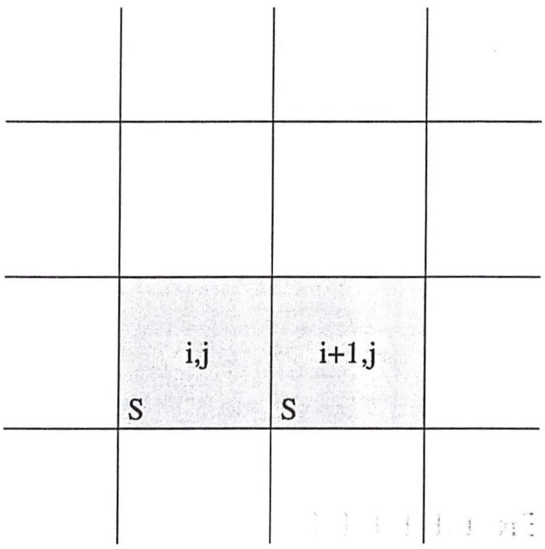


Figura 1.114: Células i,j e $i+1,j$ são S

Então por 1.10 calcula-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j};$$

- se a célula $i,j+1$ for C: como mostra a figura 1.115.

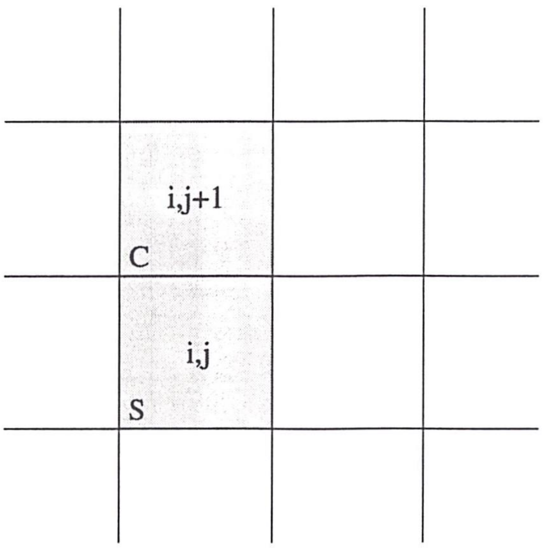


Figura 1.115: Célula i, j é S e $i, j+1$ é C

Então por 1.11 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{p_{i,j+1}}{\delta y};$$

- se a célula $i, j+1$ for S: como mostra a figura 1.116.

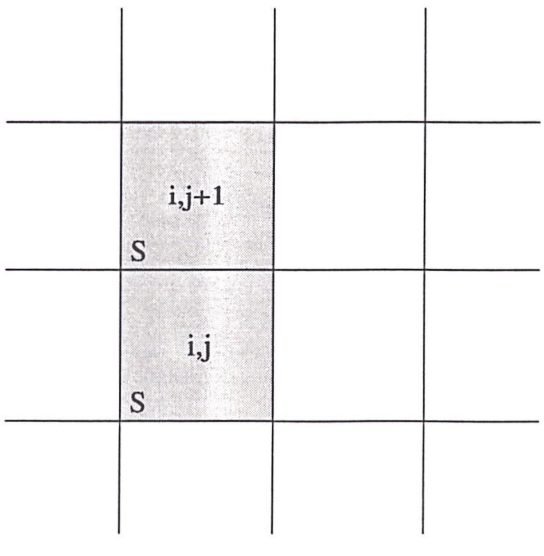


Figura 1.116: Células i, j e $i, j+1$ são S

Então por 1.11 calcula-se $v_{i,j+\frac{1}{2}}$:

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}.$$

1.10 Eliminação das Partículas Virtuais

A eliminação das partículas virtuais é necessária para a diminuição de dados. Uma aresta deve ser removida quando o tamanho da aresta for menor que $0.05 * min\{dx, dy\}$ e pertencer a uma mesma célula. Considere a figura 1.117.

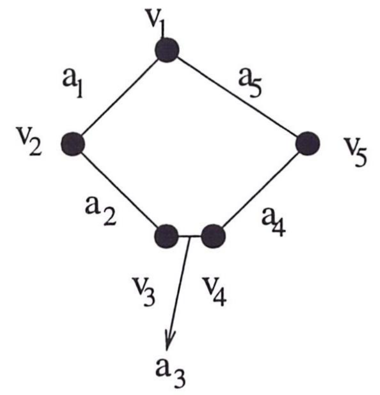


Figura 1.117: Eliminação do vértice v_3 e da aresta a_3

Como exemplo, considere que se queira eliminar o vértice v_3 e a aresta a_3, então o vértice v_3 é removido e o v_2 é a média entre o v_2 e o v_3, ficando como na figura 1.118.

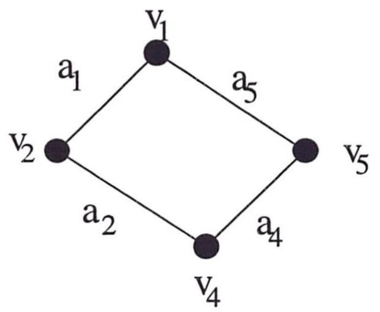


Figura 1.118: Vértice v_3 e aresta a_3 eliminadas

1.11 Cálculo das Velocidades u e v das Partículas Virtuais

O cálculo das velocidades u e v das partículas virtuais é feito por interpolação bilinear, envolvendo as quatro velocidades mais próximas.

O método utilizado identifica a posição da partícula que pode ter quatro posições, assim, tem-se quatro casos. Considera-se uma célula e a divida em quatro partes, como mostra a figura 1.119, pois é preciso saber as quatro velocidades mais próximas da partícula virtual.

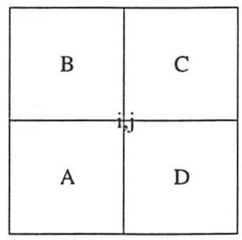


Figura 1.119: Célula dividida em quatro partes

Então, a partícula pode estar no quadrante A, B, C, ou D:

- se a partícula está no quadrante A: como mostra a figura 1.120.

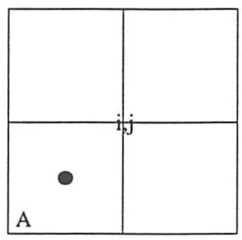


Figura 1.120: Partícula virtual está no quadrante A

Então para o cálculo da velocidade u, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante A, considere a figura 1.121.

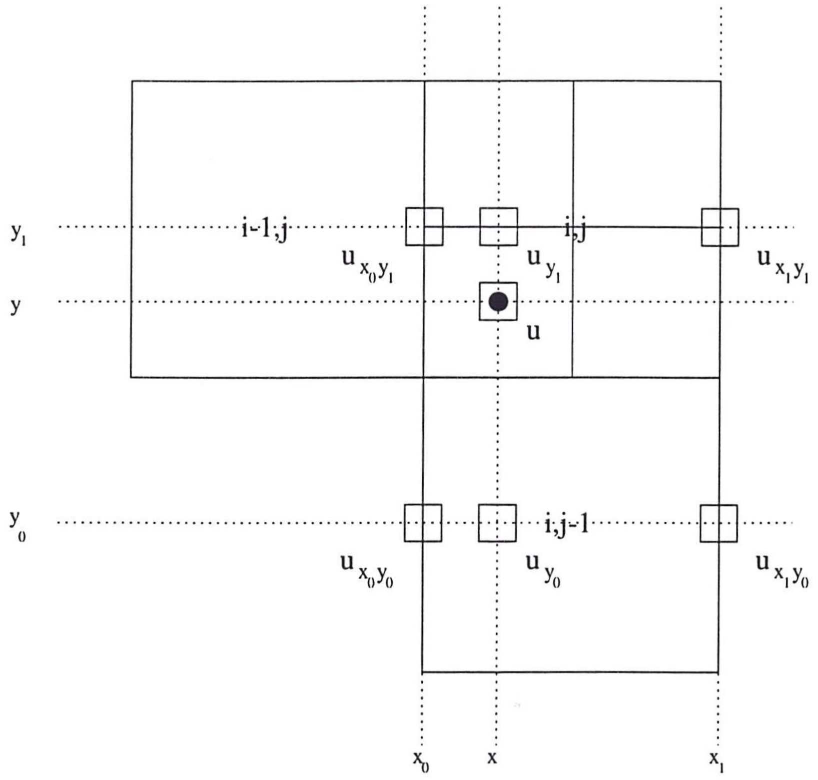


Figura 1.121: Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante A

Então por interpolação linear:

$$u = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} u_{y0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} u_{y1},$$

onde u_{y_0} e u_{y_1} também são calculados por interpolação linear:

$$u_{y0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x0y0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x1y0},$$

$$u_{y1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x0y1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x1y1}.$$

Para o cálculo da velocidade v, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante A, considere a figura 1.122.

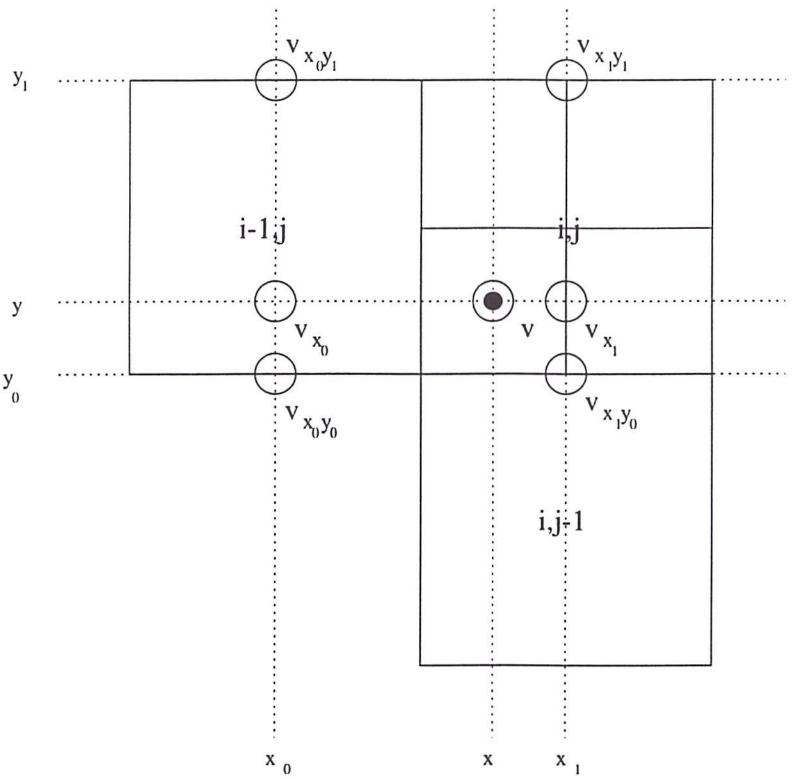


Figura 1.122: Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante A

Então por interpolação linear:

$$v = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} v_{x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} v_{x_1},$$

onde v_{x_0} e v_{x_1} também são calculados por interpolação linear:

$$v_{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_0 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_0 y_1},$$

$$v_{x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_1 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_1 y_1};$$

- se a partícula está no quadrante B: como mostra a figura 1.123.

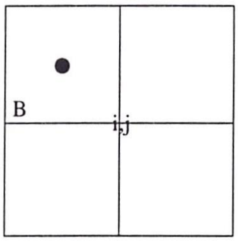


Figura 1.123: Partícula virtual está no quadrante B

Então para o cálculo da velocidade u, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante B, considere a figura 1.124.

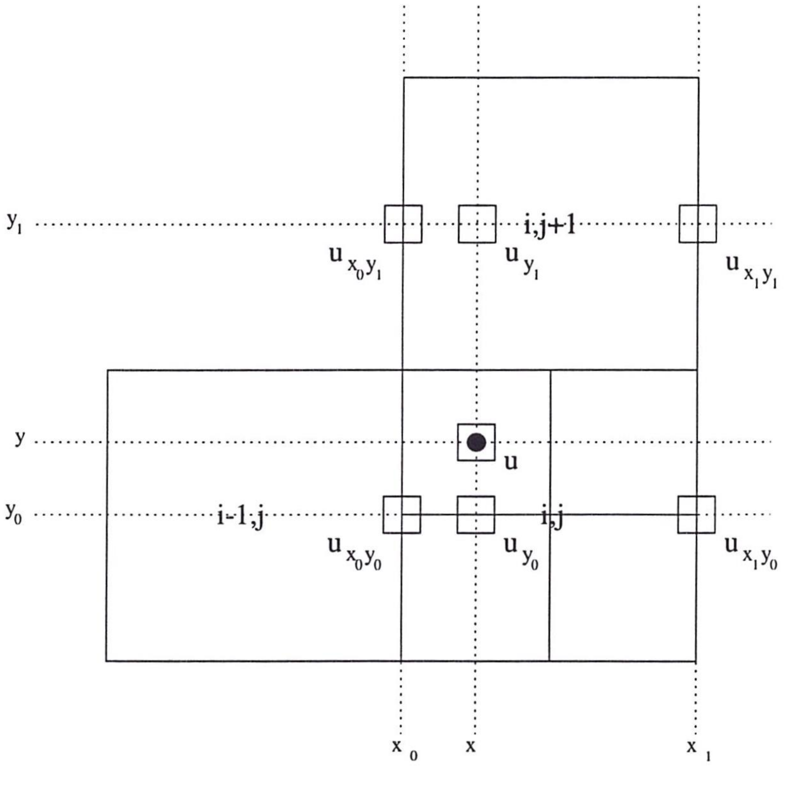


Figura 1.124: Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante B

Então por interpolação linear:

$$u = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} u_{y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} u_{y_1},$$

onde u_{y_0} e u_{y_1} também são calculados por interpolação linear:

$$u_{y_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_0},$$

$$u_{y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_1}.$$

Para o cálculo da velocidade v, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante B, considere a figura 1.125.

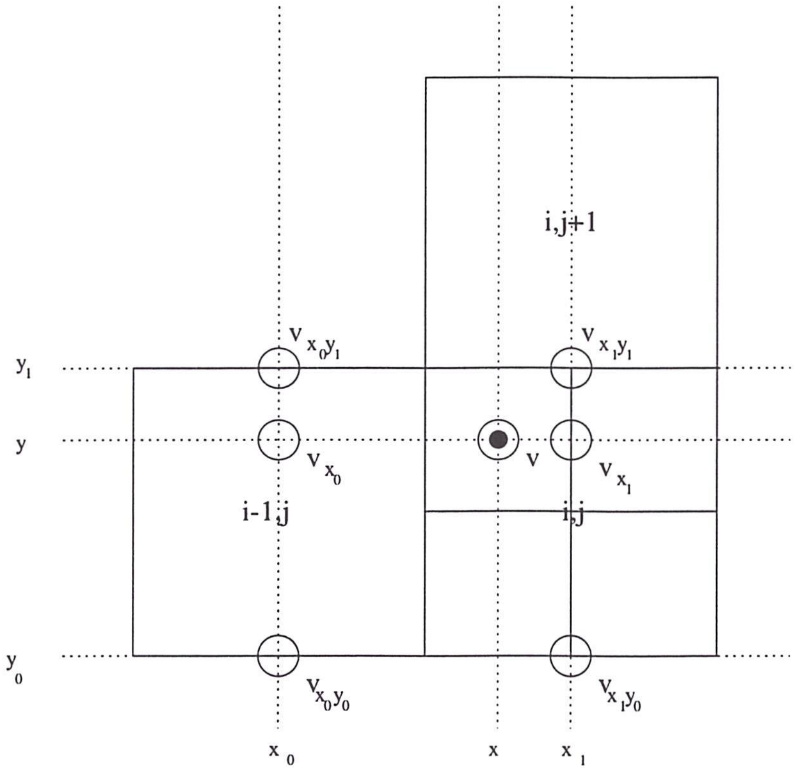


Figura 1.125: Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante B

Então por interpolação linear:

$$v = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} v_{x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} v_{x_1},$$

onde v_{x_0} e v_{x_1} também são calculados por interpolação linear:

$$v_{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_0 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_0 y_1},$$

$$v_{x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_1 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_1 y_1};$$

• se a partícula está no quadrante C: como mostra a figura 1.126.

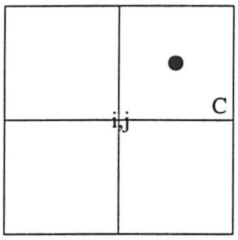


Figura 1.126: Partícula virtual está no quadrante C

Então para o cálculo da velocidade u, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante C, considere a figura 1.127.

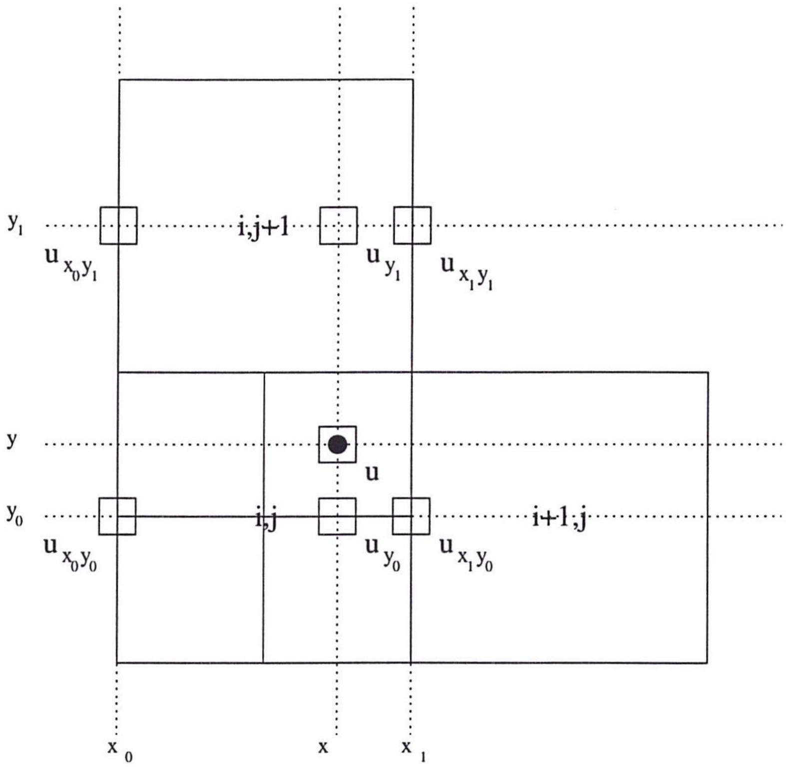


Figura 1.127: Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante C

Então por interpolação linear:

$$u = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} u_{y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} u_{y_1},$$

onde u_{y_0} e u_{y_1} também são calculados por interpolação linear:

$$u_{y_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_0},$$

$$u_{y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_1}.$$

Para o cálculo da velocidade v, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante C, considere a figura 1.128.

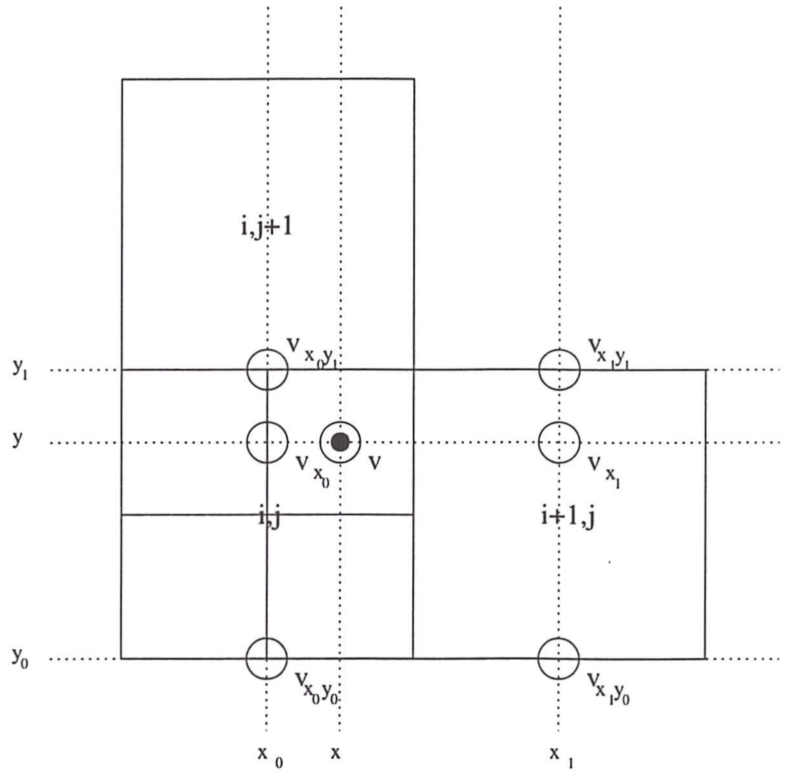


Figura 1.128: Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante C

Então por interpolação linear:

$$v = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} v_{x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} v_{x_1},$$

onde v_{x_0} e v_{x_1} também são calculados por interpolação linear:

$$v_{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_0 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_0 y_1},$$

$$v_{x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_1 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_1 y_1};$$

- se a partícula está no quadrante D: como mostra a figura 1.129.

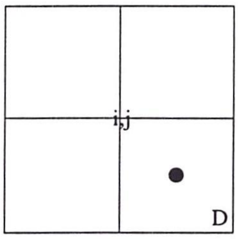


Figura 1.129: Partícula virtual está no quadrante D

Então para o cálculo da velocidade u, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante D, considere a figura 1.130.

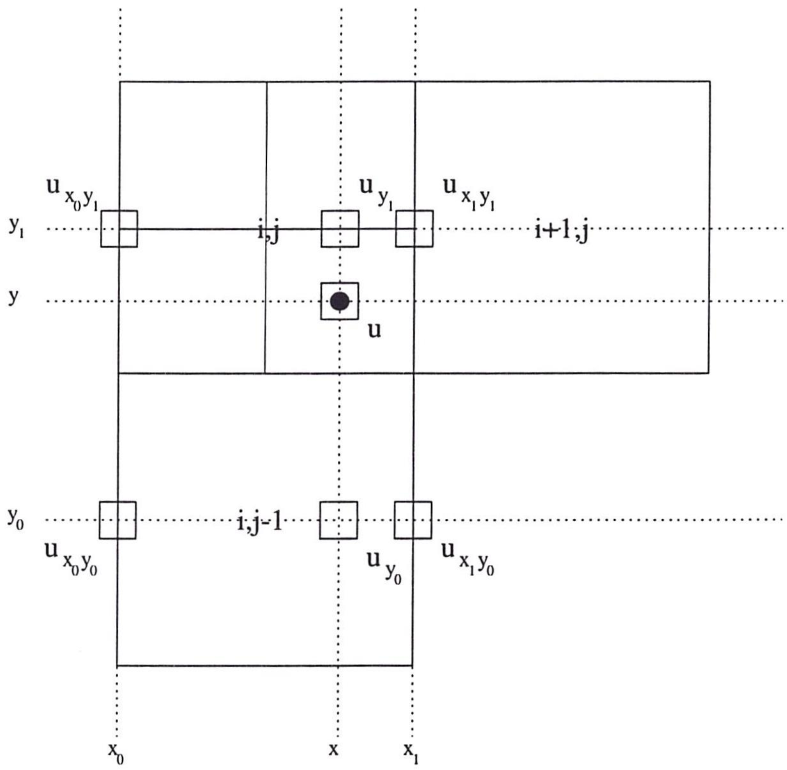


Figura 1.130: Cálculo das quatro velocidades u mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante D

Então por interpolação linear:

$$u = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} u_{y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} u_{y_1},$$

onde u_{y_0} e u_{y_1} também são calculados por interpolação linear:

$$u_{y_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_0},$$

$$u_{y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_{x_0 y_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_{x_1 y_1}.$$

Para o cálculo da velocidade v, usando as quatro velocidades mais próximas, de uma partícula no quadrante D, considere a figura 1.131.

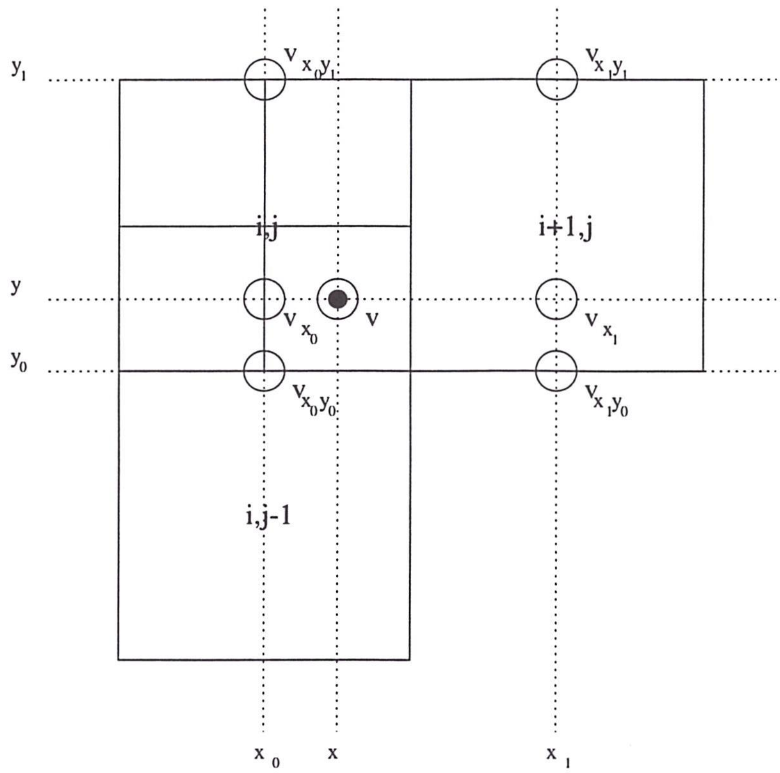


Figura 1.131: Cálculo das quatro velocidades v mais próximas da partícula virtual pertencente ao quadrante D

Então por interpolação linear:

$$v = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} v_{x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} v_{x_1},$$

onde v_{x_0} e v_{x_1} também são calculados por interpolação linear:

$$v_{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_0 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_0 y_1},$$

$$v_{x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} v_{x_1 y_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} v_{x_1 y_1}.$$

Após o cálculo das velocidades das partículas virtuais atualiza-se suas posições fazendo o movimento das partículas virtuais. Denomina-se as células como C, S ou V. Se as células forem C ficam S, se as células forem V ficam S e calcula-se a velocidade nas células vizinhas.

1.12 Inserção das Partículas Virtuais

A inserção das partículas virtuais no fluido é importante, pois conforme o fluido se move, as partículas que representam a superfície podem ficar distantes uma das outras e assim perde-se os detalhes de representação. Pode ocorrer também que uma célula da superfície livre não contenha partículas devido a definição das células ser feita no instante de tempo anterior, podendo haver confusão no algoritmo de definição das células no tempo atualizado.

Para se inserir partículas no fluido considera-se o comprimento de cada aresta que representa a superfície livre, como mostra a figura 1.132.

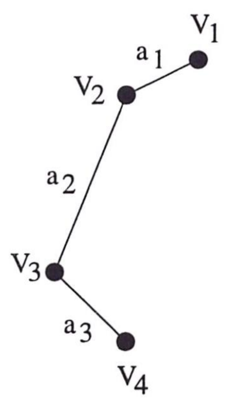


Figura 1.132: Inserção de um vértice entre os vértices v_2 e v_3

Subdividindo essa aresta em arestas menores toda vez que seu comprimento for superior a $0.8 * min\{dx, dy\}$ como mostra a figura 1.133.

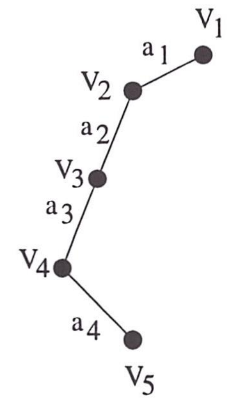


Figura 1.133: Um vértice inserido entre os vértices v_2 e v_3

1.13 Redefinição das Células Após o Movimento das Partículas Virtuais

E por fim , redefine-se as células após o movimento das partículas virtuais. Considere a figura 1.134, como o problema inicial.

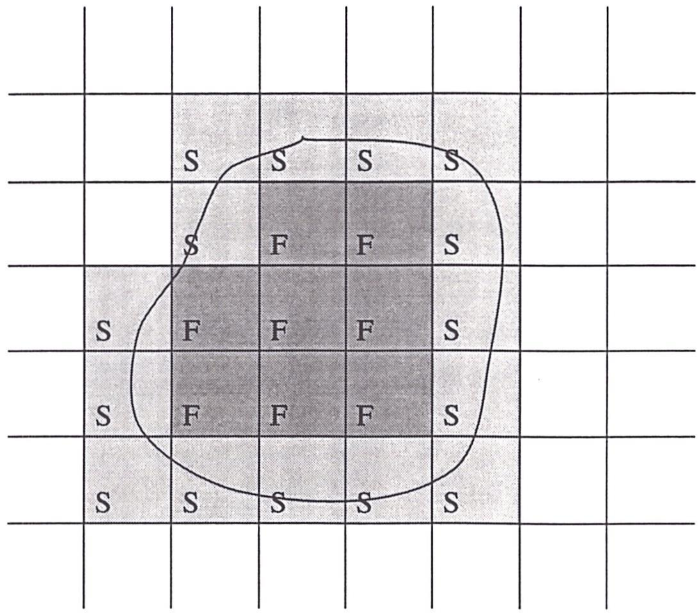


Figura 1.134: Redefinição das células, problema inicial

Quando movimentou-se as partículas virtuais, as células C e V tornaram-se S, como mostra a figura 1.135. Agora as células que contêm a superfície livre são marcadas por terem partículas virtuais.

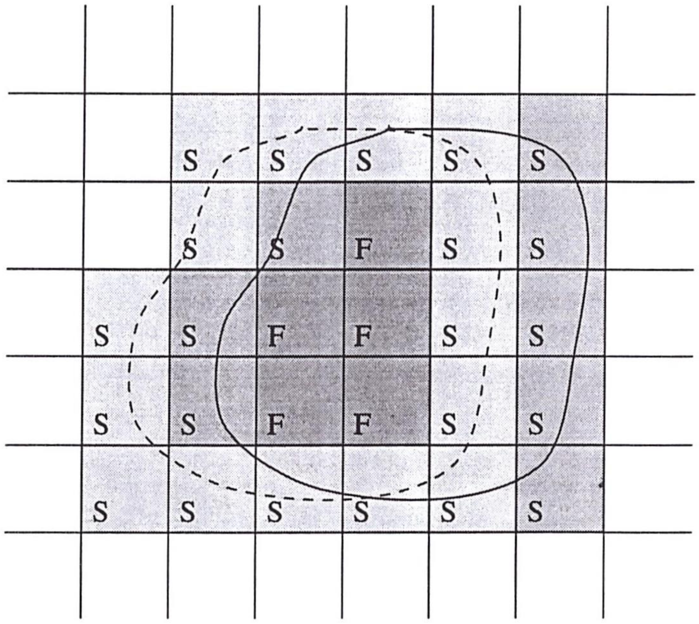


Figura 1.135: Redefinição das células S, após o movimento da superfície livre

As células S que não fazem vizinhança com nenhuma célula V ficam C. As células S que não foram marcadas por não terem partículas virtuais transformam-se em V e a velocidade nestas células é zero. As células S que não têm contato com nenhuma célula V tornam-se C e as células C que têm algum contato com as células V ficam S. Como mostra a figura 1.136

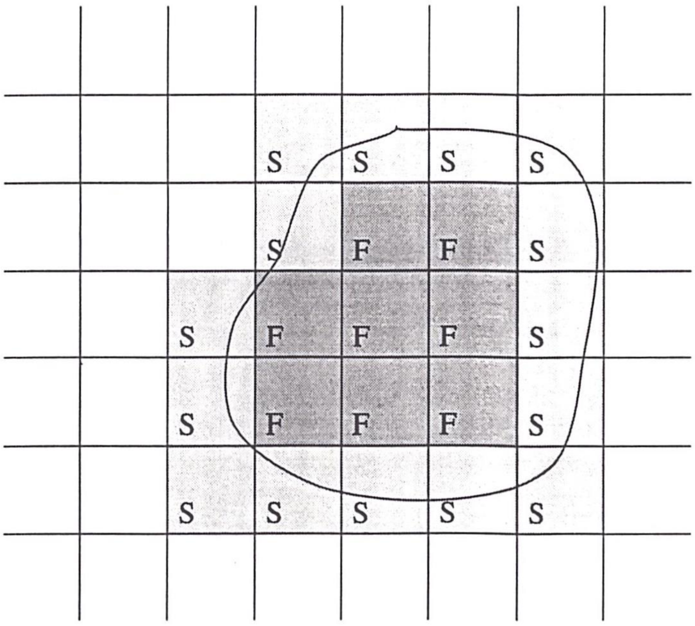


Figura 1.136: Redefinição das células V e C, último passo

1.14 Considerações Finais

Este relatório é importante pois em cada seção foi detalhado os passos que o simulador segue. Sendo um complemento da dissertação [1].

Capítulo 2

Modelador

2.1 Considerações Iniciais

O modelador é um sistema interativo para a especificação de um modelo de escoamento de fluidos que inclui a definição de elementos no domínio do escoamento como moldes, injetores, fluidos e a definição de propriedades do escoamento. Foi implementado em linguagem C sobre o sistema UNIX, a interface gráfica do Modflow-2D utiliza o sistema de gerenciamento de janelas Xview sobre o Xwindows.

Neste relatório será detalhado como é feito as intersecções nas células e a estrutura dos objetos geométricos.

2.2 Intersecções nas Células

O cálculo das intersecções nas células é importante para a definição das células e os cálculos das velocidades nas condições de contorno rígido. Os dados são armazenados em árvores e atualizados a cada movimento da superfície livre.

As intersecções são calculadas da seguinte maneira, observe as figuras 2.1.

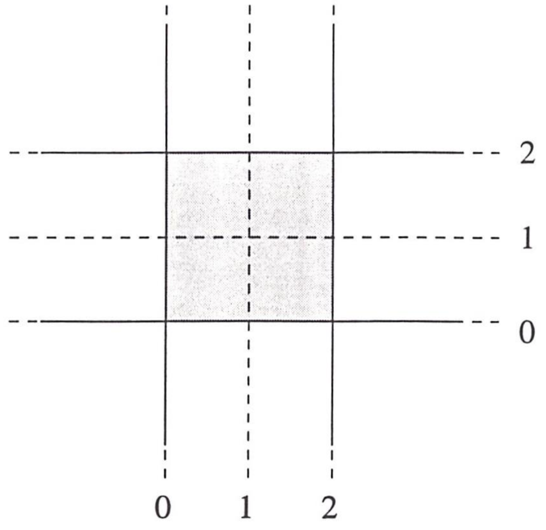


Figura 2.1: Intersecções possíveis nas direções x e y

Há duas orientações: uma em x e outra em y. A orientação em x será feita pelo número [0] e a orientação em y será feita pelo número [1]. Então para a orientação em x a intersecção é dada por intersec[0][?] e para a orientação em y a intersecção é dada por intersec[1][?]. O segundo campo é o número que defini a posição na célula. A célula é dividida em três partes: [0], [1] e [2]. Então tem-se seis intersecções possíveis:

- na direção x: como mostra a figura 2.2.

intersec[0][0]
intersec[0][1]
intersec[0][2]

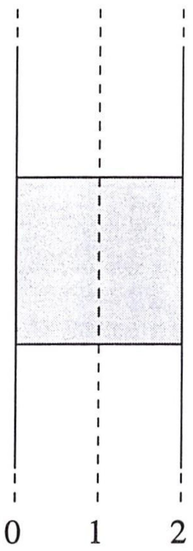


Figura 2.2: Intersecções na direção x

- na direção y: como mostra a figura 2.3.

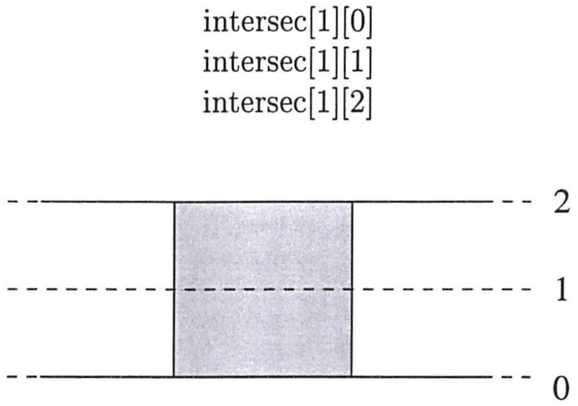


Figura 2.3: Intersecções na direção y

De forma geral as intersecções ficam como mostra a figura 2.1. Como exemplo, considere a figura 2.4.

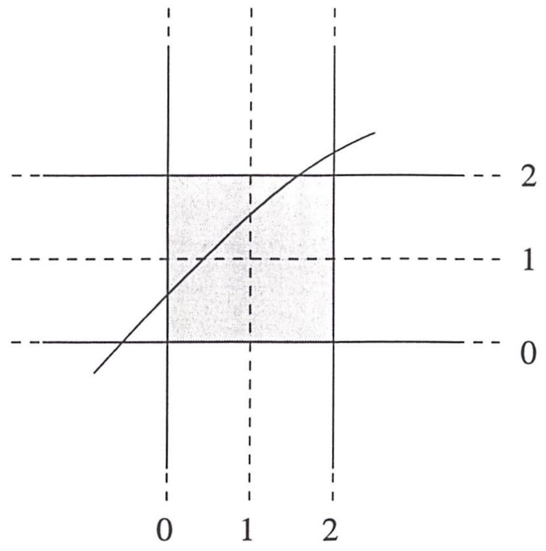


Figura 2.4: Exemplo de intersecções

Para este exemplo, figura 2.5, as intersecções possíveis na direção x são: intersec[0][0], intersec[0][1]. E as intersecções possíveis na direção y são: intersec[1][1], intersec[1][2].

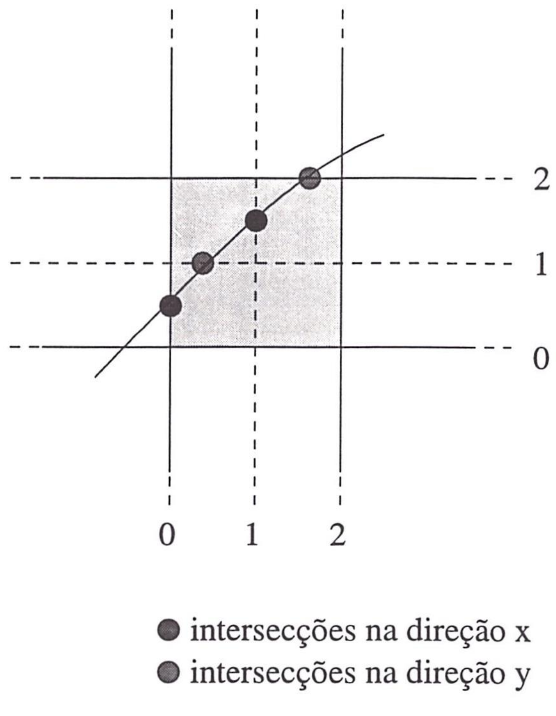


Figura 2.5: Exemplo de intersecções nas direções x e y

Como exemplo geral, considere a figura 2.6.

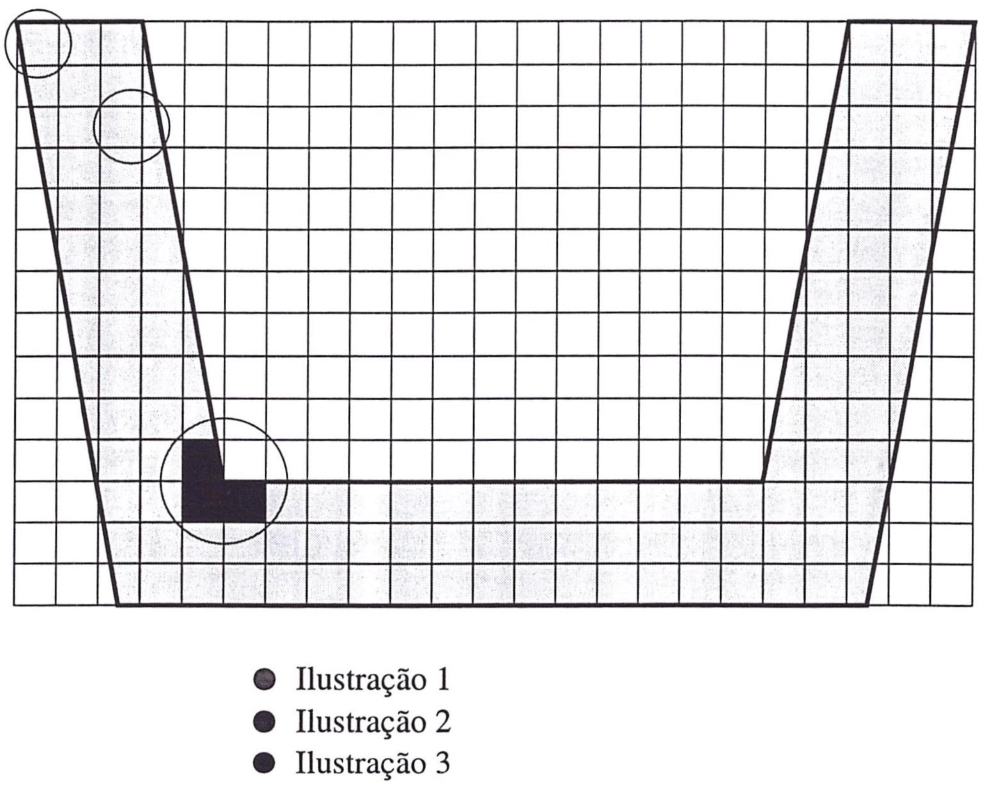


Figura 2.6: Contêiner tipo *Box* Inclinado com detalhes que serão exemplificados

Agora, será feito algumas intersecções como ilustração. Considere como primeira ilustração a figura 2.7.

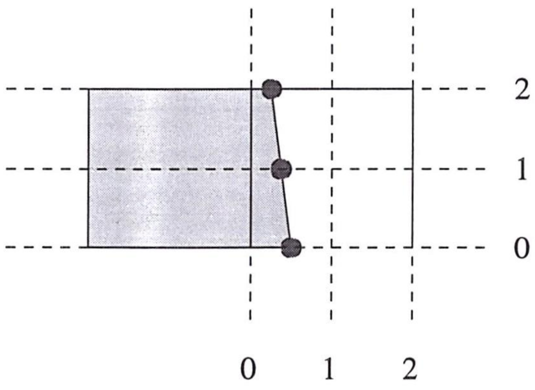


Figura 2.7: Primeira ilustração

Neste caso, tem-se as três intersecções da direção y, intersec[1][0], intersec[1][1] e intersec[1][2], que serão armazenadas na árvore. Após ter calculado as intersecções verifica-se se a célula é F ou não. Como esta célula não é F as informações das intersecções desta célula é passada para a célula vizinha anterior sendo esta considerada uma célula F. Como segunda ilustração, considere a figura 2.8.

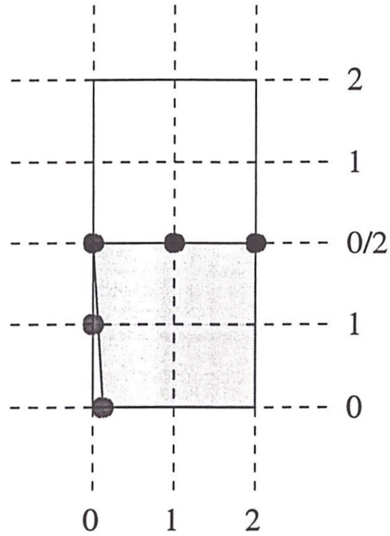


Figura 2.8: Segunda Ilustração

Neste caso, tem-se as intersecções: intersec[0][0], intersec[0][1], intersec[0][2], intersec[1][0], intersec[1][1], intersec[1][2]. As intesecções intersec[0][0], intersec[0][1], intersec[0][2] e intersec[1][0] são calculadas para as duas células, mas a célula superior não é F, então suas informações são transferidas para a célula vizinha de baixo que é F. Como terceira ilustração, considere a figura 2.9.

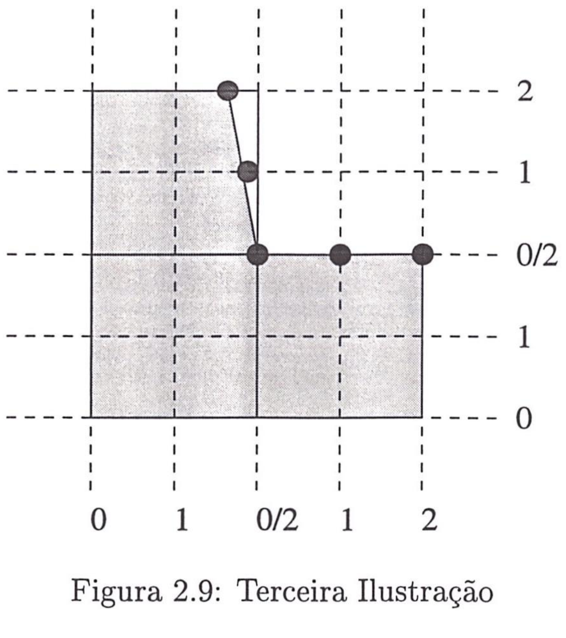


Figura 2.9: Terceira Ilustração

Neste caso, tem-se as intersecções: intersec[0][0], intersec[0][1], intersec[0][2], intersec[1][0], intersec[1][1], intersec[1][2]. As intesecções intersec[0][0], intersec[0][1], intersec[0][2] e intersec[1][0] são calculadas para as duas células, mas a célula superior não é F, então suas informações são transferidas para a célula vizinha de baixo. E as informações das intersecções intersec[1][0], intersec[1][1], intersec[1][2] são armazenas na célula F.

Então de uma forma geral, antes de verificar quais células são realmente F algumas células estão definidas de forma equivocada, como mostra a figura 2.10.

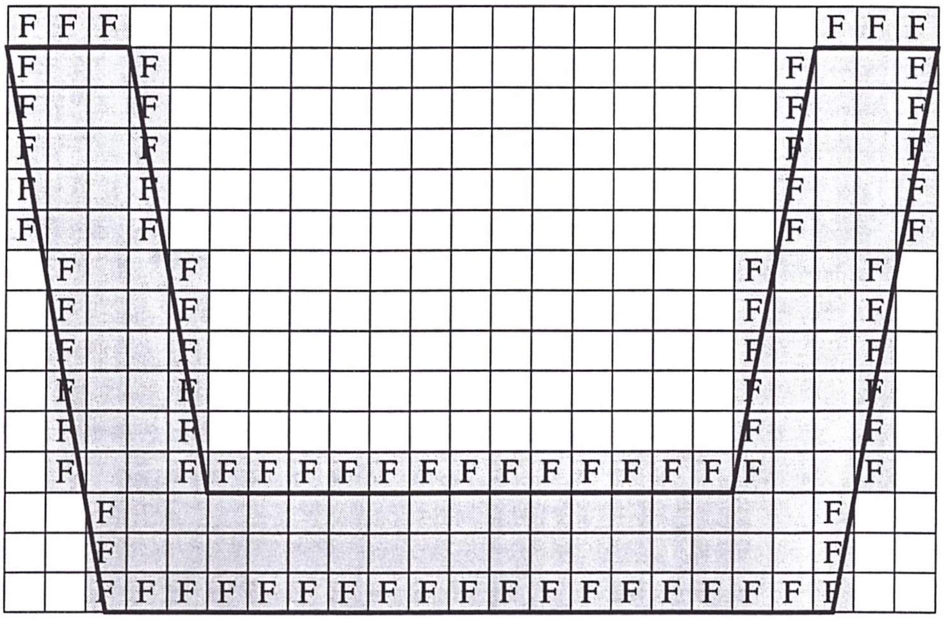


Figura 2.10: Células definidas equivocadamente

Depois de se fazer os cálculos das intersecções, armazenar os dados das intersecções nas células corretas e determinar as células que realmente são F o contêiner fica como mostra a figura 2.11.

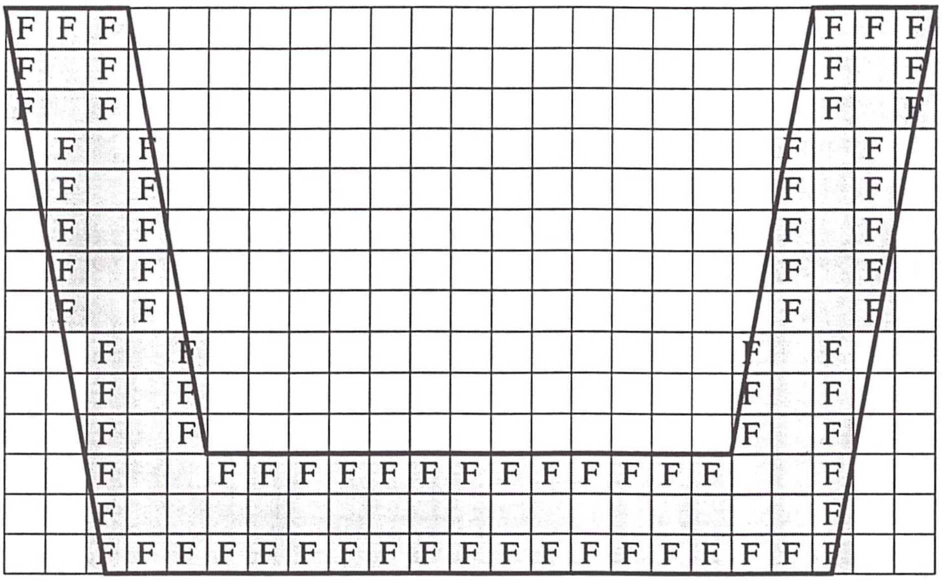


Figura 2.11: Células definidas corretamente

Uma observação importante é que a expessura do contêiner deve conter três células, assim se evitando confusão do algoritmo com relação a orientação.

2.3 Estrutura dos Objetos Geométricos

A estrutura de dados do Freeflow-2D foi explicada em [1]. Nesta seção será montado a estrutura de dados de um objeto geométrico.

Os objetos geométricos são curvas fechadas com orientação anti-horária e são representados por um tipo de estrutura de dados B-Rep (*Boundary Representation*) para representar objetos geométricos pela sua fronteira.

Então como exemplo quer se criar um contêiner do tipo *Cube* [1], como mostra a figura 2.12.

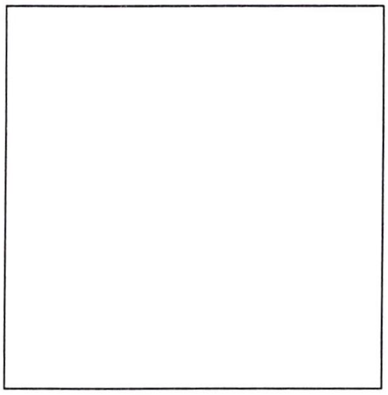


Figura 2.12: Contêiner do tipo *Cube*

Então primeiramente, cria-se na estrutura uma fatia, figura 2.13.

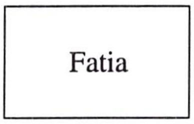


Figura 2.13: Primeiro passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

Em seguida, cria-se uma face, como mostra a figura 2.14.

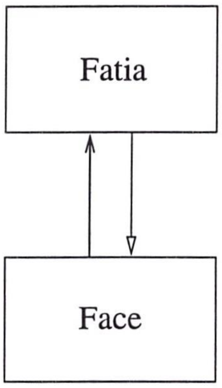


Figura 2.14: Segundo passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

Depois, o primeiro vértice é criado e em seguida a primeira semi-aresta. Como mostra a figura 2.15 na estrutura e 2.16 o objeto.

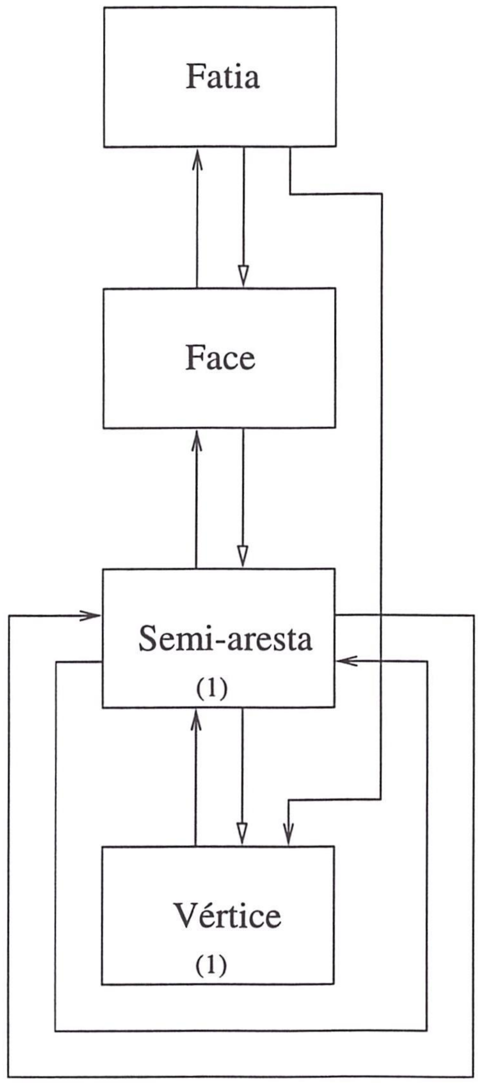


Figura 2.15: Terceiro passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

Figura 2.16: Primeiro passo para se criar um contêiner do tipo *Cube*

Em seguida, cria-se o segundo vértice e a segunda semi-aresta. Como mostra a figura 2.17 na estrutura e 2.18 o objeto.

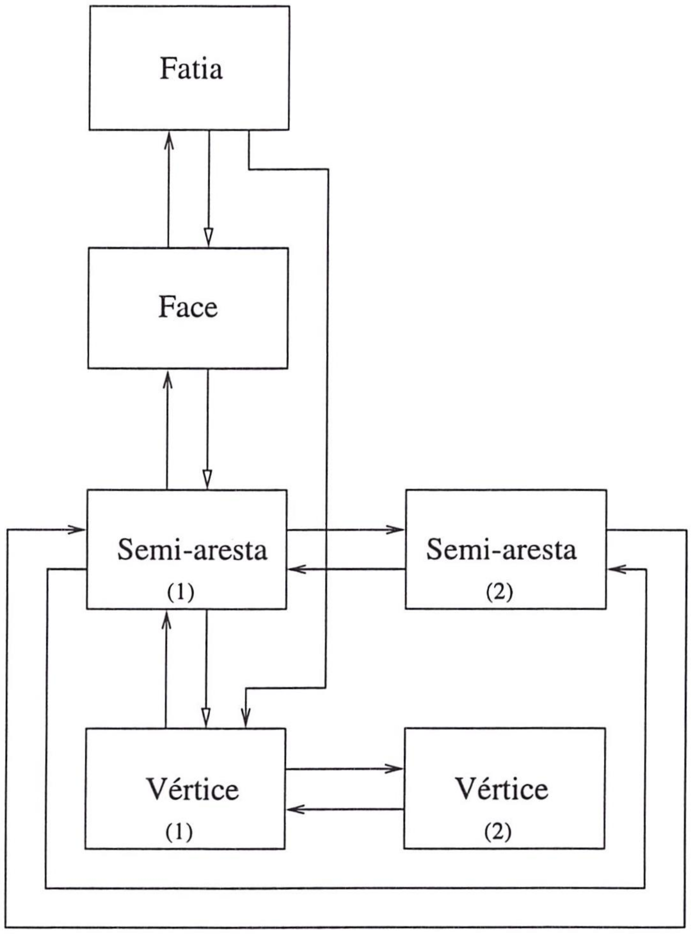


Figura 2.17: Quarto passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

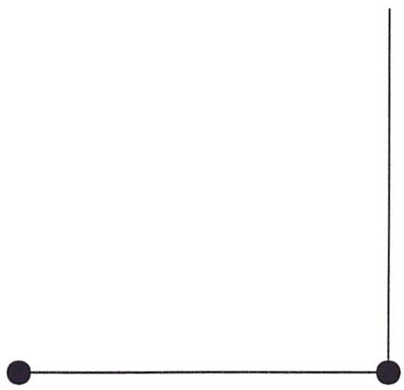


Figura 2.18: Segundo passo para se criar um contêiner do tipo *Cube*

Depois, cria-se o terceiro vértice e a terceira semi-aresta. Como mostra a figura 2.19 na estrutura e 2.20 o objeto.

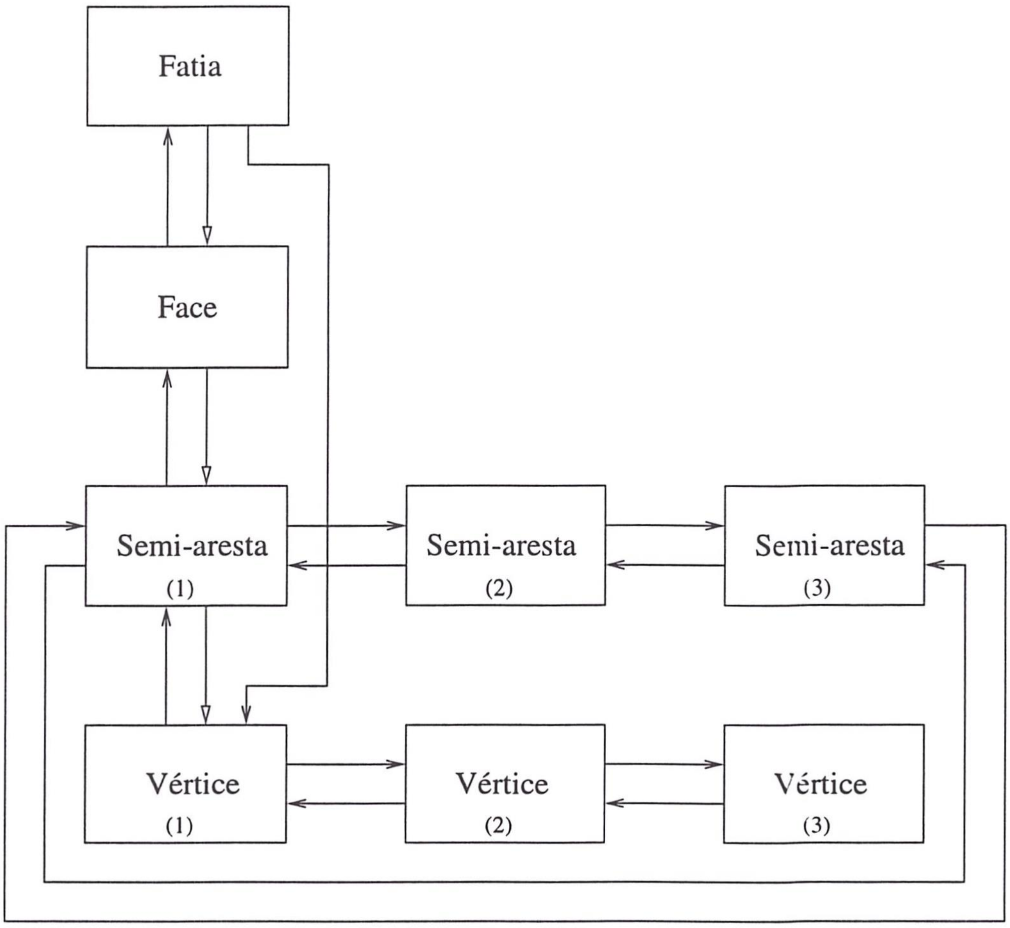


Figura 2.19: Quinto passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

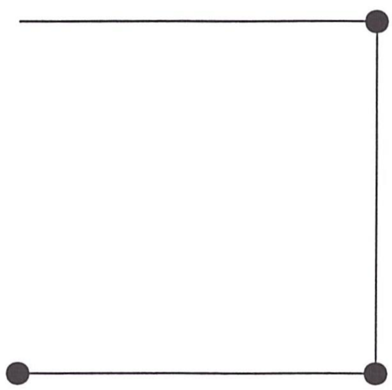


Figura 2.20: Terceiro passo para se criar um contêiner do tipo *Cube*

E por fim, cria-se o quarto vértice e a quarta semi-aresta. Como mostra a figura 2.21 na estrutura e 2.22 o objeto.

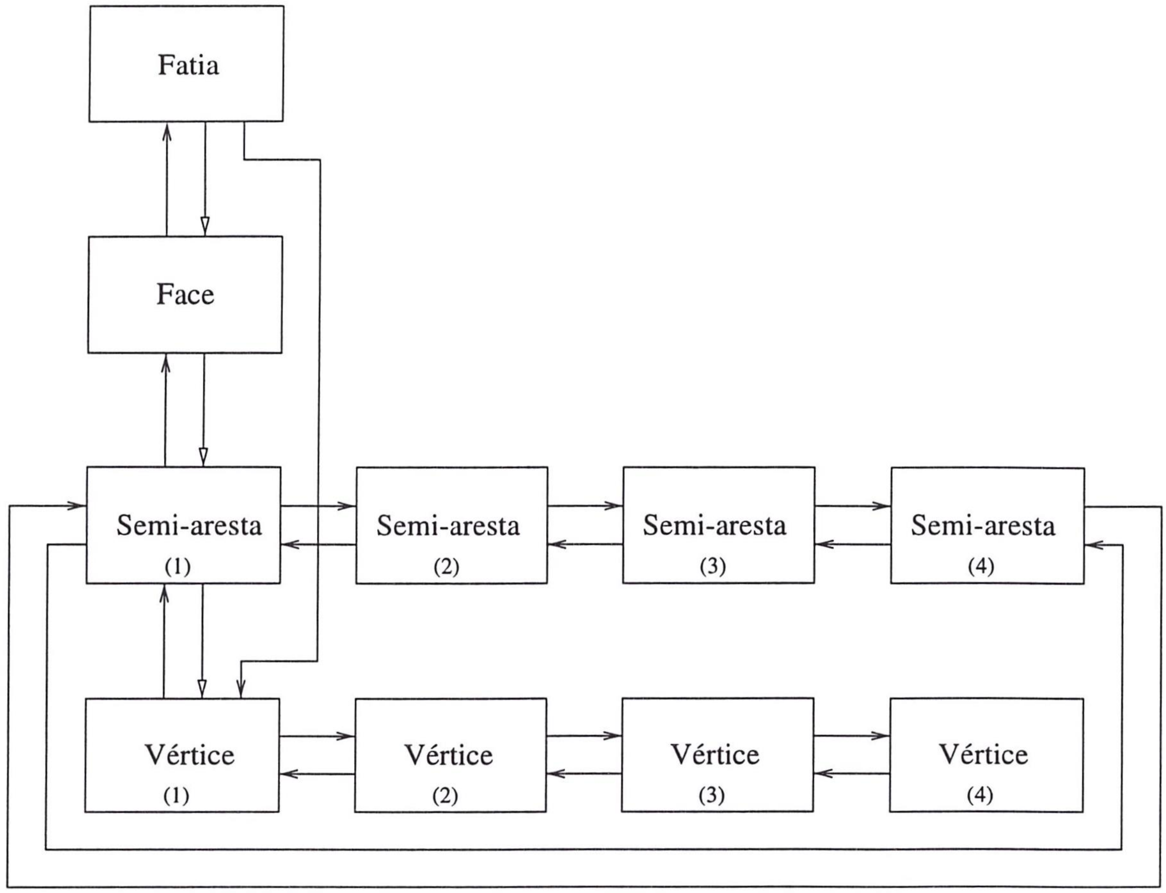


Figura 2.21: Sexto passo para se criar a estrutura de um contêiner do tipo *Cube*

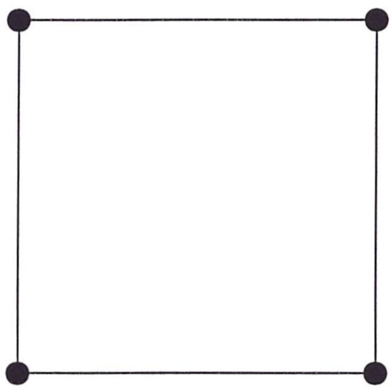


Figura 2.22: Quarto passo para se criar um contêiner do tipo *Cube*

2.4 Considerações Finais

Conclui-se então que o modelador de moldes e escoamentos Modflow-2D é de grande importância para o sistema Freeflow-2D, pois é por ele que se faz a especificação de um modelo de escoamento de fluidos que inclui a definição de elementos no domínio do escoamento como moldes, injetores, fluidos e a definição de propriedades do escoamento.

Neste capítulo foi detalhado como é feito as intersecções nas células e como é montada a estrutura dos objetos geométricos.

Referências Bibliográficas

[1] OLIVEIRA, J. *Desenvolvimento de um Sistema de Simulação de Escoamentos de Fluidos com Superfícies Livres Bidimensionais.* São Carlos, 1999. p.133. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo.

[2] TOMÉ, M. F.; MCKEE, S. *GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains.* J. Comp. Phys., V.110, n.1, pp.171-186, 1994.