

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP

Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações

ISSN 0103-9822

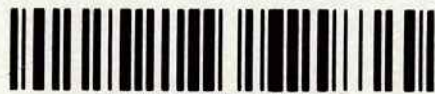
BT/PEF/9401

**Soluções Analíticas para a
Deformação do Material
Elasto-Plástico Cam-Clay úteis na
Interpretação de Ensaios Triaxiais
com Diferentes Trajetórias de Tensão**

José Jorge Nader



Escola Politécnica - EPBC



31200053676

86 96 87

São Paulo - 1994

Nader, José Jorge

Soluções analíticas para a deformação do material elasto-plástico Cam-Clay úteis na interpretação de ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão / J.J. Nader. -- São Paulo : EPUSP, 1994.

14p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9401)

1. Solos - Plasticidade 2. Reologia dos solos 3. Mecânica dos solos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. Título III. Série

CDU 624.131.43

624.131.54

624.131

Soluções Analíticas para a Deformação do Material Elasto-Plástico Cam-Clay Úteis na Interpretação de Ensaios Triaxiais com Diferentes Trajetórias de Tensão

(Analytical Solutions for the Deformation of the Cam-Clay Elastoplastic Material Useful in the Interpretation of Triaxial Tests with Different Stress Paths)

José Jorge Nader

Resumo

Este trabalho apresenta algumas soluções analíticas para a deformação homogênea de um cilindro constituído do material elasto-plástico Cam-Clay, úteis na interpretação de ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão, ou na obtenção, a partir de resultados de ensaios triaxiais, dos parâmetros que caracterizam um solo perante o modelo. Procura-se tornar claras as hipóteses envolvidas na interpretação de ensaios e mostrar, passo a passo, como o problema é solucionado. Normalmente, a aplicação do modelo Cam-Clay a ensaios triaxiais faz-se com o emprego de soluções numéricas. Desse modo, as soluções analíticas apresentadas neste artigo, por serem de aplicação direta, podem ser interessantes para os que trabalham com modelagem do comportamento de solos.

Abstract

This work presents some analytical solutions for the homogeneous deformation of a cylinder constituted of the Cam-Clay elastoplastic material, useful in the interpretation of triaxial tests with different stress paths or in the determination, from the results of triaxial tests, of the parameters which characterize a soil in the model. It is intended to state clearly the hypotheses assumed in the interpretation of tests and to show, step by step, how the problem is solved. Usually the application of the Cam-Clay model to triaxial tests are done by means of numerical solutions. Therefore, the analytical solutions presented in this paper, being of direct application, can be useful to those who work with soil behaviour modelling.

1 Introdução

Ao final deste texto terão sido obtidas relações tensão-deformação, não encontradas na literatura geotécnica, de utilidade tanto na predição, pelo modelo Cam-Clay, do comportamento de solos submetidos a ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão, quanto na própria determinação dos parâmetros do modelo a partir de resultados de ensaios.

A resolução do problema dar-se-á em partes, nas quais as hipóteses adotadas, algumas delas implicitamente aceitas na interpretação de ensaios triaxiais, serão colocadas claramente.

A segunda seção do trabalho reapresenta as equações constitutivas do Cam-Clay, na forma revista num trabalho anterior (Nader, 1993b), no qual o modelo foi construído tendo por base as equações constitutivas elasto-plásticas gerais. Em seguida, na seção 3, estuda-se a cinemática do movimento homogêneo de um cilindro, representando um corpo-de-prova de ensaio triaxial. Como principal resultado obtêm-se a matriz do tensor taxa de deformação (*stretching*) e as relações entre suas componentes e as deformações naturais. Na seção 4, as equações diferenciais constitutivas são integradas em trajetórias de tensão retilíneas no diagrama (p, q) que partem do ponto de intersecção do eixo das abscissas com a curva de plastificação e vão até a linha do estado crítico (derivado do trabalho de Nader, 1993a). São considerados dois grupos de trajetórias. O primeiro reúne aquelas em que há aumento da tensão octaédrica, ao longo das quais o regime é sempre elasto-plástico. No segundo grupo ocorre diminuição da tensão octaédrica; as trajetórias levam, de início, o material ao regime elástico e, após o cruzamento da curva de plastificação, ao regime elasto-plástico. Aliando-se os resultados das integrações das equações constitutivas ao cálculo das deformações efetuado na seção 3, obtêm-se as relações tensão-deformação procuradas.

Finalizando o trabalho, estudam-se as restrições ao movimento ou à força de corpo que advêm da obediência à equação diferencial do movimento.

De início, é conveniente introduzir alguns símbolos e notações freqüentes no texto. I_A e II_A denotam, respectivamente, o primeiro e o segundo invariantes principais de um tensor \mathbf{A} ; \mathbf{A}_0 representa sua parte anti-esférica e \mathbf{A}^T , \mathbf{A} transposto. A operação linear traço é indicada por *tr*. A tensão de Cauchy é designada por \mathbf{T} e sua parte anti-esférica, denominada tensão desviadora, por \mathbf{T}_0 . Um ponto superposto ao símbolo indica a derivada material em relação ao tempo. A convenção da Mecânica do Contínuo para os sinais das tensões e deformações é empregada (*e.g.* tensões de compressão e encurtamentos são negativos). Os parâmetros p , q , ω e γ , utilizados na interpretação de ensaios triaxiais, são definidos de forma a seguir a regra de sinais da Mecânica dos Solos.

2 Relações Constitutivas

O Cam-Clay é um modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico e potencial plástico coincidente com a função de plastificação, cujas equações constitutivas envolvem quatro parâmetros característicos do material (λ , κ , M e G).

Num trabalho anterior (Nader, 1993b), foi apresentada a construção do modelo Cam-Clay, de um modo sistemático, a partir das equações constitutivas elasto-plásticas gerais. Procurou-se lá definir precisamente quais tensores de tensão e taxa de deformação são adequados para o modelo. Foram obtidas relações constitutivas genéricas, que foram, depois, particularizadas para estados de tensão e deformação ocorrentes nos ensaios triaxiais. O que se faz nesta seção é rerepresentar as equações constitutivas obtidas no trabalho anterior, que serão integradas na seção 4.

A função de plastificação do modelo Cam-Clay, coincidente com o potencial plástico, pode-se escrever em termos dos invariantes I_T e II_{T_0} da tensão de Cauchy \mathbf{T} e da tensão desviadora \mathbf{T}_0 , que, para aliviar a notação, serão designados a partir de agora por I e $-J$, respectivamente:

$$f(\mathbf{T}, p_0) = \tilde{f}(I, J, p_0) = -\frac{I}{3} - \frac{9J}{M^2 I} - p_0 \quad (1)$$

em que p_0 (sempre positivo) é um parâmetro de endurecimento isotrópico denominado pressão equivalente (oposto da componente da tensão esférica que leva à plastificação).

A equação $\tilde{f}(I, J, p_0) = 0$, com p_0 fixo, corresponde a uma curva de plastificação em forma de semi-elipse com coordenadas (I, \sqrt{J}) .

Propôs-se, no trabalho anterior, o emprego do tensor taxa de deformação \mathbf{D} (*stretching*) nas equações constitutivas do Cam-Clay como medida da velocidade de deformação. O campo tensorial \mathbf{D} é a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade (*vide* seção 3 ou Gurtin, 1981).

\mathbf{D} divide-se nas parcelas elástica e plástica; $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$, cujas relações com a tensão são rerepresentadas a seguir.

Tanto no regime elástico, quanto no regime elasto-plástico, a taxa de deformação elástica do Cam-Clay é dada por :

$$\mathbf{D}^e = -\frac{\kappa}{3} \frac{\dot{I}}{I} \mathbf{1} + \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (2)$$

No regime elástico, evidentemente, a taxa de deformação plástica é nula: $\mathbf{D}^p \equiv \mathbf{0}$. Por sua vez, no regime elasto-plástico, \mathbf{D}^p é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{D}^p = -\frac{3(\lambda - \kappa)}{I} \frac{1}{1 - (\frac{27J}{M^2 I^2})^2} [(\zeta_1^2 \dot{I} + \zeta_1 \zeta_2 \dot{J}) \mathbf{1} + (\zeta_1 \zeta_2 \dot{I} + \zeta_2^2 \dot{J}) \mathbf{T}_0] \quad (3)$$

em que ζ_1 e ζ_2 são funções dos invariantes I e J :

$$\zeta_1 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial I} = -\frac{1}{3} + \frac{9J}{M^2 I^2} \quad (4)$$

$$\zeta_2 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J} = -\frac{9}{IM^2} \quad (5)$$

Por meio da eq. 3 é possível mostrar que, à medida que J/I^2 tende a $M^2/27$, a norma de \mathbf{D}_0^p , uma medida da taxa de distorção plástica, tende a infinito. Em outras palavras, o estado do material tende ao estado crítico.

A equação:

$$\frac{J}{I^2} = \frac{M^2}{27} \quad (6)$$

(um critério do tipo Drucker-Prager (Drucker e Prager, 1952)) define o estado crítico no que diz respeito à tensão (com I sempre negativo).

Lembrando que $tr\mathbf{D} = \frac{\dot{\epsilon}}{1+e}$, sendo e o índice de vazios, demonstra-se que no estado crítico vale:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{1+e} = -\lambda \frac{\dot{I}}{I} \quad (7)$$

Na interpretação dos ensaios triaxiais convencionais, em que um corpo-de-prova cilíndrico é submetido a pressão confinante e a carga axial, admite-se que o estado de tensão seja o mesmo em todos os pontos, sendo duas tensões principais iguais à tensão radial (σ_r) e a terceira tensão principal igual à tensão axial (σ_a). Os invariantes, expressos em função de σ_a e σ_r , valem $I = \sigma_a + 2\sigma_r$ e $J = (\sigma_a - \sigma_r)^2/3$.

São mais comuns na análise de ensaios triaxiais os parâmetros:

$$p = -\frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} \quad (8)$$

$$q = \sigma_r - \sigma_a \quad (9)$$

que guardam, portanto, com os invariantes I e J , as relações:

$$I = -3p \quad (10)$$

$$J = \frac{q^2}{3} \quad (11)$$

É também empregado o parâmetro η definido por:

$$\eta = \frac{q}{p} \quad (12)$$

Suposta a homogeneidade espacial do campo de tensão, decorre, pela equação constitutiva, que também a taxa de deformação é a mesma em todo o corpo-de-prova, distinguindo-se as componentes axial (D_a) e radial (D_r). Os invariantes I_D e II_{D_0} tornam-se $I_D = D_a + 2D_r$ e $II_{D_0} = (D_a - D_r)^2/3$.

Como parâmetros da taxa de deformação são empregados os escalares taxa de deformação volumétrica (ω) e taxa de distorção (γ) definidos por:

$$\omega = -(D_a + 2D_r) \quad (13)$$

$$\gamma = D_r - D_a \quad (14)$$

que se relacionam com os invariantes através das expressões:

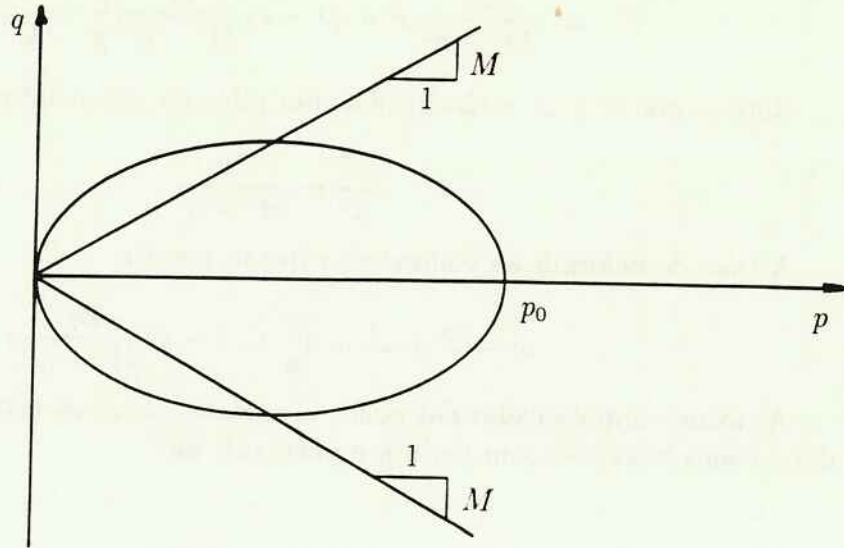


Figura 1: Curva de plastificação

$$I_D = -\omega \quad (15)$$

$$II_{D_0} = \frac{\gamma^2}{3} \quad (16)$$

Da mesma forma definem-se $\omega^e, \gamma^e, \omega^p$ e γ^p , associadas às parcelas D^e e D^p .

Partindo-se da equação geral 1, chega-se à função de plastificação para o caso em discussão, em termos de p e q :

$$\hat{f}(p, q, p_0) = p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_0 \quad (17)$$

A curva de plastificação, para um certo valor de p_0 ,

$$p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_0 = 0 \quad (18)$$

é uma elipse, como mostra a fig.1, onde se vêem também as retas do estado crítico (vide eq.25).

Introduzindo-se $p, q, \eta, \omega^e, \gamma^e, \omega^p$ e γ^p nas equações constitutivas gerais (2 e 3) com auxílio dos invariantes, obtêm-se as relações entre esses parâmetros apropriadas para a análise de ensaios triaxiais:

$$\omega^e = \kappa \frac{\dot{p}}{p} \quad (19)$$

$$\gamma^e = \frac{1}{2G} \dot{q} \quad (20)$$

$$\omega^p = (\lambda - \kappa) \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \quad (21)$$

$$\gamma^p = \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \omega^p = (\lambda - \kappa) \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \quad (22)$$

Note-se que γ^p e ω^p estão ligados, por meio do potencial plástico, pela relação:

$$\frac{\gamma^p}{\omega^p} = \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (23)$$

A taxa de deformação volumétrica (total) resulta:

$$\omega = \omega^e + \omega^p = \lambda \frac{\dot{p}}{p} + (\lambda - \kappa) \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \quad (24)$$

As formas simplificadas das eq.6 e 7, características do estado crítico para o caso dos ensaios triaxiais (com p sempre positivo), são:

$$q = \pm Mp \quad (25)$$

$$\frac{\dot{e}}{1+e} = -\lambda \frac{\dot{p}}{p} \quad (26)$$

3 Estudo da Deformação nos Ensaio Triaxiais

Na interpretação dos ensaios triaxiais, é usualmente admitido que o corpo-de-prova, inicialmente homogêneo e cilíndrico, assim permaneça ao longo do experimento, e que o gradiente da deformação, em cada instante, seja o mesmo em todos os pontos. Esse movimento será estudado nesta seção.

Na configuração inicial (em $t = 0$), os pontos do cilindro ocupam posições designadas por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ (note-se o sistema de coordenadas escolhido na fig.2). Ao longo do movimento os pontos que se encontravam inicialmente em \mathbf{X} , ocuparão as posições $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dadas pelas seguintes equações:

$$x_1 = \frac{R(t)}{R_0} X_1 \quad (27)$$

$$x_2 = \frac{R(t)}{R_0} X_2 \quad (28)$$

$$x_3 = \frac{H(t)}{H_0} X_3 \quad (29)$$

em que R_0 e H_0 são raio e altura iniciais do cilindro e $R(t)$ e $H(t)$, seus valores ao longo do tempo.

Trata-se de um movimento homogêneo da forma $\mathbf{x} = \mathbf{F}_0(t)\mathbf{X}$. O gradiente da deformação é $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}_0(t)$.

Observe-se que, sendo (P, Θ, Z) e (ρ, θ, z) as coordenadas cilíndricas iniciais e ao longo do movimento dos pontos do cilindro, elas se relacionam com as coordenadas retangulares através de:

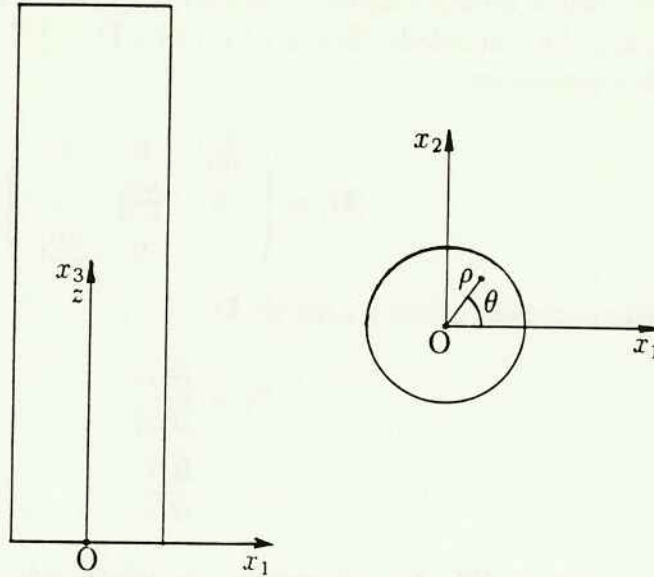


Figura 2: Sistema de coordenadas.

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{R(t)}{R_0} \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \frac{R(t)}{R_0} P \quad (30)$$

$$\theta = \arctg \frac{x_2}{x_1} = \arctg \frac{X_2}{X_1} = \Theta \quad (31)$$

$$z = x_3 = \frac{H(t)}{H_0} X_3 = \frac{H(t)}{H_0} Z \quad (32)$$

mostrando que o corpo permanece cilíndrico, tendo raio e altura alterados, sem girar em torno do eixo vertical.

Os campos de deslocamento ($\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$) e velocidade (descrição material, $\mathbf{v}_m = \dot{\mathbf{x}}$) na base adotada (fig.2) são:

$$\mathbf{u} = \left[\left(\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right) X_1, \left(\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right) X_2, \left(\frac{H(t)}{H_0} - 1 \right) X_3 \right] \quad (33)$$

e

$$\mathbf{v}_m = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R_0} X_1, \frac{\dot{R}(t)}{R_0} X_2, \frac{\dot{H}(t)}{H_0} X_3 \right] \quad (34)$$

A descrição espacial da velocidade pode ser obtida, a partir da descrição material, com o auxílio das equações 27, 28 e 29:

$$\mathbf{v} = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} x_1, \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} x_2, \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} x_3 \right] \quad (35)$$

As equações constitutivas elasto-plásticas do modelo Cam-Clay, na forma apresentada por Nader (1993b), fazem uso da taxa de deformação \mathbf{D} (*stretching*), para

a qual se volta a atenção agora. O campo tensorial \mathbf{D} é a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade ($\mathbf{L} = \text{grad}\mathbf{v}$), i.e., $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$. Sua matriz (na base escolhida) escreve-se:

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \end{pmatrix}$$

As componentes radial e axial de \mathbf{D}

$$D_r = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (36)$$

$$D_a = \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \quad (37)$$

fornecem uma medida das velocidades de deformação radial e axial relativa à configuração atual. Integrando-as no tempo, resultam as deformações naturais (logarítmicas ou de Hencky) radial ($\bar{\epsilon}_r$) e axial ($\bar{\epsilon}_a$) referidas à configuração inicial:

$$\bar{\epsilon}_r(t) = \int_0^t D_r d\tau = \ln \frac{R(t)}{R_0} \quad (38)$$

$$\bar{\epsilon}_a(t) = \int_0^t D_a d\tau = \ln \frac{H(t)}{H_0} \quad (39)$$

A taxa de deformação volumétrica $\text{tr}\mathbf{D}$ é dada por:

$$\text{tr}\mathbf{D} = 2D_r + D_a = 2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \quad (40)$$

e a deformação natural volumétrica, por:

$$\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t \text{tr}\mathbf{D} d\tau = 2 \ln \frac{R(t)}{R_0} + \ln \frac{H(t)}{H_0} = \ln \frac{R^2(t)H(t)}{R_0^2 H_0} = \ln \frac{V(t)}{V_0} \quad (41)$$

em que $V(t)$ e V_0 são o volume do cilindro nos instantes t e $t = 0$.

As equações constitutivas elasto-plásticas fornecem a taxa de deformação \mathbf{D} ¹, que, através das integrações no tempo e das relações vistas acima, produzem $\bar{\epsilon}_a$, $\bar{\epsilon}_r$ e $\bar{\epsilon}_v$. Por seu lado, as medidas de altura e volume efetuadas durante os ensaios permitem obter $\bar{\epsilon}_a$, $\bar{\epsilon}_r$ e $\bar{\epsilon}_v$ experimentais, que podem ser confrontadas com as teóricas.

Uma vez que, na seção 4, serão integradas as equações numeradas de 19 a 22, é importante mostrar o significado das integrais de ω e γ no tempo.

Lembrando que $\omega = -(D_a + 2D_r) = -\text{tr}\mathbf{D}$ e $\gamma = D_r - D_a$, vêem:

$$\int_0^t \omega d\tau = - \int_0^t \text{tr}\mathbf{D} d\tau = -\bar{\epsilon}_v(t) \quad (42)$$

¹Neste trabalho, na forma como estão montadas as equações do Cam-Clay para estados de tensão e deformação de ensaios triaxiais, elas fornecem ω e γ , que são invariantes de \mathbf{D} .



e

$$\int_0^t \gamma d\tau = \int_0^t (D_r - D_a) d\tau = \bar{\epsilon}_r(t) - \bar{\epsilon}_a(t) \quad (43)$$

Finalizando, cabe observar que são mais comuns as seguintes medidas de deformação:

$$\epsilon_a = (H - H_0)/H_0 \quad (44)$$

$$\epsilon_r = (R - R_0)/R_0 \quad (45)$$

$$\epsilon_v = (V - V_0)/V_0 \quad (46)$$

que se relacionam com as deformações naturais por meio de:

$$\bar{\epsilon} = \ln(1 + \epsilon) \quad (47)$$

Note-se que ϵ_a e ϵ_r são componentes do tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} , cuja matriz é, no caso:

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \frac{R(t)}{R_0} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)}{R_0} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H(t)}{H_0} - 1 \end{pmatrix}$$

É importante salientar que:

$$\epsilon_v \neq 2\epsilon_r + \epsilon_a \quad (48)$$

ao passo que:

$$\bar{\epsilon}_v = 2\bar{\epsilon}_r + \bar{\epsilon}_a \quad (49)$$

4 Integração das Equações Constitutivas do Cam-Clay em Trajetórias de Tensão Retilíneas e Obtenção das Relações Tensão-Deformação

Na interpretação dos ensaios triaxiais, onde um corpo-de-prova cilíndrico é submetido a pressão confinante e a carga axial, admite-se, de modo coerente com a hipótese de movimento homogêneo, que o estado de tensão seja o mesmo em todos os pontos, sendo duas tensões principais iguais à tensão radial (σ_r) e a terceira tensão principal igual à tensão axial (σ_a).

A matriz da tensão de Cauchy (\mathbf{T}), na base adotada (fig.2), fica expressa por:

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a \end{pmatrix}$$

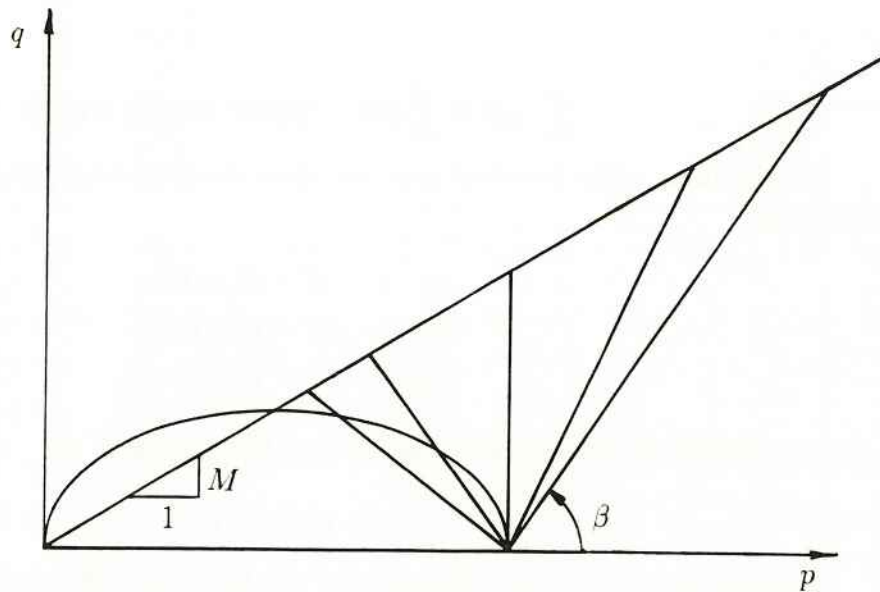


Figura 3: Trajetórias de tensão e curva de plastificação.

Neste trabalho, o interesse está em modelar ensaios triaxiais drenados de compressão ($q > 0$), após adensamento isotrópico, que solicitam o corpo-de-prova segundo trajetórias retilíneas no plano (p, q) , que formam com o eixo das abscissas ângulos designados genericamente por β . A equação dessas trajetórias é do tipo:

$$q = \operatorname{tg} \beta (p - p_c) \quad (50)$$

ou, o que é equivalente:

$$\eta = \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{p_c}{p}\right) \quad (51)$$

em que p_c é a pressão de adensamento isotrópico a que foi submetido o material antes da aplicação de tensão desviadora.

A fig.3 mostra, no plano (p, q) , a curva de plastificação do Cam-Clay vigente quando da aplicação da pressão p_c de adensamento isotrópico e várias trajetórias de tensão, levando à identificação de dois grupos.

Para $\beta \leq \pi/2$, as trajetórias cruzam sucessivas curvas de plastificação, mantendo o material em regime elasto-plástico em direção ao estado crítico ($\eta = M$).

Para $\beta > \pi/2$, as trajetórias levam, inicialmente, o material ao domínio elástico, até que encontrem novamente a curva de plastificação (em $\eta = -M^2/\operatorname{tg} \beta$), quando se inicia o regime elasto-plástico.

Na seção 2 foi visto que as taxas de deformação volumétrica e de distorção do Cam-Clay, na forma direta para a análise de ensaios triaxiais, são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega^e &= \frac{\kappa}{p} \dot{p} \\ \gamma^e &= \frac{1}{2G} \dot{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^p &= (\lambda - \kappa) \left(\frac{1}{p} \dot{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \\ \gamma^p &= (\lambda - \kappa) \left[\frac{3\eta}{(M^2 - \eta^2)p} \dot{p} + \frac{6\eta^2}{M^4 - \eta^4} \dot{\eta} \right]\end{aligned}$$

Passa-se agora à integração destas equações entre dois estados de tensão, o que resultará em relações tensão-deformação, para, em seguida, aplicá-las aos dois grupos de trajetórias. O tempo é utilizado como parâmetro para as trajetórias $(p(t), q(t))$.

A integração das três primeiras equações acima entre dois instantes t_1 e t_2 quaisquer resulta (lembrando que $p > 0$):

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^e dt = \kappa \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (52)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^e dt = \frac{1}{2G} (q_2 - q_1) \quad (53)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^p dt = (\lambda - \kappa) \left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{M^2 + \eta_2^2}{M^2 + \eta_1^2} \right) \quad (54)$$

A integral de γ^p é dependente da trajetória de tensão na sua primeira parcela. Por conveniência escreve-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^p dt = (\lambda - \kappa) (R + S) \quad (55)$$

Calculando-se as parcelas R e S (sendo $\eta < M$), obtêm-se:

$$R = \int_{t_1}^{t_2} \frac{3\eta}{(M^2 - \eta^2)p} \dot{p} dt \quad (56)$$

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{6\eta^2}{M^4 - \eta^4} \dot{\eta} dt \\ &= -\frac{3}{M} \left[\operatorname{arctg} \frac{\eta_2}{M} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{M} \right]\end{aligned} \quad (57)$$

$$+ \frac{3}{2M} \left[\ln \frac{(M + \eta_2)}{(M - \eta_2)} - \ln \frac{(M + \eta_1)}{(M - \eta_1)} \right] \quad (58)$$

$$(59)$$

A integral R , em trajetórias retilíneas expressas por $\eta = N(1 - p/p_c)$, com $N = \operatorname{tg} \beta$ e $\beta \neq \pi/2$, resulta (mudando para p a variável de integração):

$$R = \int_{p_1}^{p_2} \frac{3N(p - p_c)}{(M^2 - N^2)p^2 - 2N^2p_c p - N^2p_c^2} dp = \frac{3}{2(N^2 - M^2)} (T + U) \quad (60)$$

com

$$T = M \left[\ln \frac{(M + \eta_2)}{(M - \eta_2)} - \ln \frac{(M + \eta_1)}{(M - \eta_1)} \right] \quad (61)$$

$$U = -N \left[\ln \frac{(M^2 - \eta_2^2)}{(N - \eta_2)^2} - \ln \frac{(M^2 - \eta_1^2)}{(N - \eta_1)^2} \right] \quad (62)$$

Quando $\beta = \pi/2$, $R = 0$ e $\int_{t_1}^{t_2} \gamma^p dt = (\lambda - \kappa)S$.

Em seguida mostra-se como estes resultados são aplicados aos dois grupos de trajetórias mencionados no início, permitindo que se obtenham, com auxílio das eq.42 e 43, as expressões das deformações naturais, $-\bar{\epsilon}_v$ e $\bar{\epsilon}_r - \bar{\epsilon}_a$, prontas para a análise de ensaios triaxiais.

4.1 1º grupo: $\beta \leq \frac{\pi}{2}$

Neste caso o regime é sempre elasto-plástico. Em qualquer instante $t \geq 0$, com $p(0) = p_c$ e $\eta(0) = 0$, têm-se:

$$-\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t (\omega^e + \omega^p) d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_c} + (\lambda - \kappa) \left[\ln \frac{p(t)}{p_c} + \ln \frac{M^2 + \eta^2(t)}{M^2} \right] \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_r(t) - \bar{\epsilon}_a(t) &= \int_0^t (\gamma^e + \gamma^p) d\tau = \frac{1}{2G} q(t) \\ &+ (\lambda - \kappa) \left[\frac{3}{2(N^2 - M^2)} \left[M \ln \frac{M + \eta(t)}{M - \eta(t)} - N \ln \frac{(M^2 - \eta^2(t))N^2}{(N - \eta(t))^2 M^2} \right] \right. \\ &\left. - \frac{3}{M} \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{M} + \frac{3}{2M} \ln \frac{M + \eta(t)}{M - \eta(t)} \right] \quad (64) \end{aligned}$$

4.2 2º grupo: $\beta > \frac{\pi}{2}$

A trajetória de tensão parte do estado inicial em $t = 0$ (com $p(0) = p_c$ e $\eta(0) = 0$), iniciando o regime elástico que dura até que encontre a curva de plastificação no instante $t = t_*$, com $p(t_*) = p_c N^2 / (N^2 + M^2)$ e $\eta(t_*) = -M^2 / N$, a partir de quando ocorre o regime elasto-plástico. Portanto, para $0 \leq t < t_*$ têm-se:

$$-\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t \omega^e d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_c} \quad (65)$$

$$\bar{\epsilon}_r(t) - \bar{\epsilon}_a(t) = \int_0^t \gamma^e d\tau = \frac{1}{2G} q(t) \quad (66)$$

e, para $t \geq t_*$,

$$-\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t \omega^e d\tau + \int_{t_*}^t \omega^p d\tau = \kappa \ln \frac{p(t)}{p_*} + (\lambda - \kappa) \left[\ln \frac{p(t)}{p_*} + \ln \frac{M^2 + \eta^2(t)}{M^2 + \eta_*^2} \right] \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_r(t) - \bar{\epsilon}_a(t) &= \int_0^t \gamma^e d\tau + \int_{t_*}^t \gamma^p d\tau = \frac{1}{2G} [q(t) - q_*] \\ &+ (\lambda - \kappa) \left[\frac{3}{2(N^2 - M^2)} \left[M \ln \frac{(M + \eta(t))(M - \eta_*)}{(M - \eta(t))(M + \eta_*)} \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N \ln \frac{(M^2 - \eta^2(t))(N - \eta_*)^2}{(N - \eta(t))^2(M^2 - \eta_*^2)} \\
& - \frac{3}{M} \left[\operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{M} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_*}{M} \right] + \frac{3}{2M} \ln \frac{(M + \eta(t))(M - \eta_*)}{(M - \eta(t))(M + \eta_*)} \quad (68)
\end{aligned}$$

5 Restrições Impostas pela Equação do Movimento

Para que o movimento proposto na seção 3 e o campo de tensão proposto na seção 4, além de serem compatíveis no que diz respeito à equação constitutiva, sejam dinamicamente possíveis, eles devem satisfazer a equação do movimento:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (69)$$

onde \mathbf{b} é a força de corpo (campo vetorial expressando força por unidade de volume), ρ é a densidade do material e $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, a aceleração.

O objetivo desta seção é encontrar as restrições à força de corpo e ao movimento que advêm da obediência à equação diferencial do movimento.

No caso em exame, a tensão é espacialmente constante, implicando $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$. Por conseguinte, a equação do movimento simplifica-se, resultando:

$$\mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (70)$$

A aceleração do movimento proposto na seção 3, na sua descrição material, é:

$$\mathbf{a}_m = \ddot{\mathbf{F}}_0(t) \mathbf{X} \quad (71)$$

Introduzindo-se esta na eq.70, chega-se à força de corpo que deve agir, dado $\mathbf{F}_0(t)$, para que o movimento seja possível :

$$\mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{F}}_0(t) \mathbf{X} \quad (72)$$

Noutro sentido, mais natural, pode-se impor a força de corpo e deduzir qual deve ser a aceleração.

Os ensaios são feitos sob a ação do campo gravitacional, onde a força de corpo é $\mathbf{b} = \rho \mathbf{g}$ (\mathbf{g} é a aceleração da gravidade). Com este valor de \mathbf{b} , entretanto, não há $\ddot{\mathbf{F}}_0(t)$ que satisfaça a eq.72 ².

Considerando-se a hipótese de ser $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o que, num ensaio triaxial, poderia ser conseguido pelo efeito de força de percolação de água, a equação do movimento fica satisfeita se a aceleração for nula, ou seja, se $\ddot{\mathbf{F}}_0(t) = \mathbf{0}$. Integrando-se duas vezes no tempo, com a condição inicial $\mathbf{F}_0(0) = \mathbf{1}$ obtém-se:

²Truesdell e Noll, 1965, pág.62, mostram que, para um movimento homogêneo ser possível num corpo simples homogêneo num campo gravitacional uniforme, ele deve ter a forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \mathbf{X} + \mathbf{c}(t). \quad (73)$$

com $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_a(\mathbf{1} + t\mathbf{F}_b)$ e $\mathbf{c}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{e} + \mathbf{f}$, sendo \mathbf{F}_a e \mathbf{F}_b tensores constantes e \mathbf{e} e \mathbf{f} vetores constantes.

$$\mathbf{F}_0(t) = t\mathbf{F}_1 + \mathbf{1} \quad (74)$$

e, portanto:

$$\mathbf{x} = (t\mathbf{F}_1 + \mathbf{1})\mathbf{X} \quad (75)$$

sendo \mathbf{F}_1 um tensor constante.

Logo, raio e altura do cilindro devem modificar-se regidos por equações do primeiro grau:

$$R(t) = R_0 + mt \quad (76)$$

$$H(t) = H_0 + nt \quad (77)$$

com m e n constantes reais.

6 Agradecimentos

O autor é muito grato ao prof. Mário Eduardo Senatore Soares, pelo auxílio na utilização de um programa de computação simbólica, e à Márcia, que fez os desenhos.

Referências Bibliográficas

- [1] DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. (1952). Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. Quart. Appl. Math., vol.10, n.2:157-165.
- [2] GURTIN, M.E. (1981) An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, San Diego, California.
- [3] NADER, J.J. (1993). Modelos Elasto-Plásticos para Solos. O Cam-Clay e sua aplicação a diferentes trajetórias de tensão. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP.
- [4] NADER, J.J. (1993). O Modelo Cam-Clay Revisto. Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.
- [5] TRUESDELL, C.; NOLL, W. (1965) The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik, vol.III/3, Ed. S. Flügge. Springer Verlag, Berlin.

BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite Wu das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos-Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Treliças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8612 - "Erros a Serem Evitados no Cálculo de Pórticos, em Particular no dos Edifícios" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8613 - "Minima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticii" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8614 - "Nova Técnica para Codificações de Procedimentos Envolvendo Matrizes - Avaliação de Desempenho" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8615 - "Casos Especiais de Flambagem de Pórticos de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 8616 - "Vigas Protendidas: Alterações das Tensões, das Deformações e dos Deslocamentos ao Longo do Tempo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8701 - "Consideração sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8702 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminadas Planas" - Parte I - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8703 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminadas Planas" - Parte II - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8704 - "Estado Plano de Tensão (Método dos Resíduos Ponderados e Método dos Elementos Finitos)" - VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8705 - "Aplicação das Equações de Diferenças a um Caso Particular de Estrutura" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8706 - "Verificação da Estabilidade dos Pilares de Pontes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8707 - "Aplicação do Método Variacional ao Cálculo do Empuxo sobre as Paredes de Arrimo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8708 - "Análise das Chapas em Regime Elasto-Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8709 - "Análise das Placas em Regime Elasto-Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8710 - "A Flambagem de Euler e a "Elástica" Revisitadas: Uma Formulação Unificada para os Cinco Casos Clássicos" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8711 - "Laje Protendida e Perdas de Protensão Resultantes da Retração, Fluência do Concreto e do Aço" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8712 - "O Método dos Elementos Finitos na Solução de Placa, Solicitadas no seu Plano ou Fletidas. Vinculação com o Método de Ritz" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8713 - "Sobre o Conceito de Corpo Material Linearmente Elástico" - PAULO BOULOS
- 8714 - "Rotações Finitas" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8715 - "Efeitos Estruturais de Segunda Ordem nas Treliças" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, YZUMI TAGUTI
- 8716 - "Estudo das Placas: Resíduos Ponderados e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8717 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Uniforme" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8718 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Triangular" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8719 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Trapezoidal" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8720 - "Sobre a Matriz de Rigidez Tangente das Barras de Treliças Planas Sujeitas a Rotações Grandes" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8721 - "Um Método Geral para a Redução da Matriz de Rigidez Tangente de Elementos Finitos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8722 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Plano - Teoria de Timoshenko" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8801 - "Distribuição Transversal de Carga nas Pontes de Vigas Justapostas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8802 - "O Método de Galerkin no Problema das Placas Fletidas - Teoria de Reissner" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 8803 - "Um Algoritmo para o Cálculo do Tensor Rotação e do Tensor das Deformações Logarítmicas em Problemas Incrementais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8804 - "Um Algoritmo para a Integração das Tensões na Plasticidade Perfeita" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8805 - "Análise das Cascas Cilíndricas em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8806 - "Consideração do Efeito de Membrana nas Placas pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8807 - "Alteração do Estado de Tensão nas Estruturas Hiperestáticas Devida à Fluência do Aço, do Concreto e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8808 - "O Método dos Mínimos Quadrados no Exame de alguns Casos de Instabilidade, Computada à Fluência do Material" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8809 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Espacial" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8810 - "Consideração da Fluência do Material da Determinação da Carga Crítica das Barras Mergulhadas em Meio Elástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8811 - "Um Programa para Solução do Problema Generalizado de Autovalores e Autovetores para Matrizes Reais Densas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, MÁRCIA CIMERMANN
- 8812 - "Pilar de Pontes: Riscos dos Cálculos Correntes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8813 - "Sugestões à Norma, em Discussão, sobre "Projeto de Estrutura de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8814 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8815 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8816 - "Análise Não-Linear de Arcos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8817 - "Estados Limites das Uniões Pregadas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 8818 - "O Emprego da Técnica de Aceleração da Convergência para a Resolução de Problemas Estruturais Através do Método dos Elementos Finitos por Algoritmo do Tipo Resíduo das Tensões" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., RUBENS AKEL
- 8819 - "Um Critério para o Estabelecimento dos Estimadores de Erro para os Elementos Finitos Adaptativos na Modalidade P" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., JARBAS a. GUEDES
- 8820 - "Non-Linear Finite-Element Formulation in Dynamic" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8821 - "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Newton: 300 Anos - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8822 - "A Estabilidade das Fundações Arenosas Estratificadas, Segundo V. V. Sokolovisky" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8823 - "Flambagem de Estacas Totalmente Enterradas. Solo com Coeficiente de Reação Variável" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8824 - "As Equações de Vlasov e a Estabilidade Espacial das Barras de Seção Delgada" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8825 - "Um Programa para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte - Aplicação à Engenharia de Estruturas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL
- 8826 - "Sobre a Aceleração do Centro Instantâneo de Rotação" - NELSON ACHCAR, PAULO BOULOS
- 8827 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8828 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8901 - "A Estimativa da Coesão para o Cálculo da Estabilidade de Aterros e Fundações sobre Argilas Moles" - CARLOS DE SOUSA PINTO
- 8902 - "Trelças Espaciais de Madeira em Regime Viscoelástico sob Não-Linearidade Geométrica" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO

- 8903 - "O Método dos Prismas Equivalentes Aplicado ao Cálculo das Variações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Seções de Concreto" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8904 - "Efeitos de Laje Concretada Posteriormente sobre Viga Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ, JOSÉ LOURENÇO BRAGA DE ALMEIDA CASTANHO
- 8905 - "O Cálculo das Grelhas de Pontes pelo Método de Courbon: Uma Hipótese por Demonstrar" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8906 - "Erosão - Erosão em Área Urbana - Erosão Associada à Construção de Estradas Vicinais" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8907 - "Solos Tropicais - Proposta de Classificação Baseada nas Características de Compactação" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8908 - "Método Variacional de Cálculo de Construções Estaiadas sob Cargas Dinâmicas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8909 - "Métodos Aproximados de Determinação de Frequência de Vibração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8910 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer I. Quasi-Static Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8911 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer II. Dynamic Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8912 - "Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements I. Straight Bar Elements" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8913 - "A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method I. Small Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8914 - "A Stress Integration Algorithm For the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Elements Method II. Large Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8915 - "Flambagem de Estacas Parcialmente Enterradas Solo com Coeficiente de Recalque Constante" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8916 - "Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade Linear" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8917 - "Um Pacote de Subrotinas Matemáticas para o LMC" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8918 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (I)" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8919 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (II)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8920 - "Viga Contínua Mista Aço-Concreto, Conectada Elasticamente, sob a Ação da Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8921 - "Relatórios de Subrotinas Matemáticas (III)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8922 - "O Problema da Flexão Plana na Teoria da Elasticidade dos Corpos Não Homogêneos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8923 - "Alterações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Concreto Protendido, devidas à Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9001 - "Os Deslocamentos Devidos à Flexão das Vigas Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9002 - "Dinâmica das Estruturas Apertadas Planas e Comportamento Geometricamente Não Linear" - REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, CARLOS e.N. MAZZILLI
- 9003 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9004 - "Influência das Tensões de Cisalhamento na Deformação da Viga sob o Regime Elasto-Plástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9005 - "Ainda a Estabilidade dos Sistemas Elásticos. Aceno Histórico. o Erro de Euler" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9006 - "A Origem das Funções de Bessel com algumas Aplicações em Problemas Estruturais" - AUGUSTO CARLOS DE VASCONCELOS
- 9007 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9008 - "Non-linear Finite-element Formulation in Dynamics II" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9009 - "Fatores de Forma e Fatores de Carga Generalizados" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9010 - "Corpos Hiperelásticos Homogêneos Transversalmente Isotrópicos Não Ortotrópicos" - NELSON ACHCAR
- 9011 - "Análise das Cascas de Revolução em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - JOSÉ MARQUES FILHO, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9012 - "O Algoritmo de Mínimo Grau para Reordenação e Solução de Sistemas Lineares Esparsos" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, SÉRGIO PINHEIRO
- 9101 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte I" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9102 - "Introdução ao Estudo dos Pórticos Esbeltos - Matriz de Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, ALFONSO PAPPALARDO JR.
- 9103 - "Cálculo de Estruturas Sujeitas a Terremotos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA H. SHIMURA
- 9104 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais - Parte I: Teoria e Método dos Elementos Finitos" - PAULO M. PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9105 - "Flambagem de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9106 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas nos Domínios do Tempo e da Frequência" - REYOLANDO M.L.R. DA F. BRASIL
- 9107 - "Variação nas Peças Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9108 - "Análise das Placas Sujeitas a Grandes Rotações Mediante o Uso do Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9109 - "Consideração Tópica sobre o Código Modelo 1990 do CEB-FIP" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9110 - "Materiais Compatíveis com as Barras Cujas Secções Normais Permanecem Planas" - NELSON ACHCAR
- 9111 - "Dinâmica das Placas: Elementos Finitos via Resíduos Ponderados" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, FLÁVIO JOSCE GARZERI, REYOLANDO M.L.R. FONSECA BRASIL
- 9112 - "Estabilidade do Equilíbrio dos Sistemas no Campo Conservativo de Forças" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9113 - "Sobre a Estabilidade Elástica de Arcos Abatidos" - REYOLANDO M.L.R. FONSECA BRASIL, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9114 - "Considerações Teóricas sobre o Adensamento Secundário" - HELOÍSA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9115 - "Teoria de Vlasov sobre Barras, Placas e Cascas, de Parede Fina, Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9201 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte II" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9202 - "Sobre a Interpretação de Provas de Carga em Estacas Considerando as Cargas Residuais de Ponta e a Reversão do Atrito Lateral" - FAIÇAL MASSAD
- 9203 - "Um Programa para Análise Limite de Pórticos Planos em Regime Elasto-Plástico" - REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL
- 9204 - "Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas" - NELSON ACHCAR
- 9205 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Madeira" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9206 - "Perda de Estabilidade à Tração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9207 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Tangente" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9208 - "Vibrações Não-Lineares de Placas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL, PAULO SHIGUEME IDE
- 9209 - "Variedades Vinculadas Reduzidas" - PAULO BOULOS, NELSON ACHCAR
- 9210 - "Estudo da Perda de Estabilidade. Segundo Critérios Dinâmicos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9211 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas - Parte II - Vários Graus de Liberdade" - REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL
- 9212 - "Otimização da Deposição de Rejeitos" - LUIZ GUILHERME F.S. DE MELLO
- 9213 - "Andros - a Finite Element Program From Nonlinear Dynamics" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL
- 9214 - "Considerações sobre o Cálculo Dinâmico de Estruturas Usando Transformadas de Fourier" - ALFREDO PINTO DA CONCEIÇÃO NETO, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9215 - "Placas Delgadas" - ALFONSO PAPPALARDO JUNIOR, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9216 - "Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade" - MÁRIO EDUARDO SENATORE SOARES, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9301 - "PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas - Parte IV" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA, MARCIA CIMERMAN
- 9302 - "Vibrações de Pórticos com Vigas de Rigidez Infinita" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9303 - "Direct Along-Wind Dynamic Analysis of Tall Structures" - MARIO FRANCO
- 9304 - Comportamento Pós-Crítico de Barra Delgada Protendida - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9305 - Os Polinômios Trigonométricos na Solução de Problemas de Vibração Mecânica - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9306 - Linhas de Influência Dinâmicas para Deslocamentos, Momentos Fletores e Forças Cortantes nas Vigas Simples - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9307 - O Modelo Clam-Clay Revisto - JOSÉ JORGE NADER
- 9308 - Patologia da Concepção Estrutural: Danos por Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Altos, um Exemplo - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9309 - Vibração de Sistemas Não Lineares: Método de Aproximações Sucessivas - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9310 - Normalização dos Símbolos Gráficos para Projetos de Estruturas de Madeira - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9311 - Ensaio de Adensamento - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9312 - Comentários sobre a Normalização das Ações e Segurança nas Estruturas - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9313 - Introdução à Análise Dinâmica de Estruturas por Meio de Elementos Finitos - Parte I - Galerkin e Elementos Finitos - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA HISSAE SHIMURA
- 9314 - Vibrações Aleatórias na Dinâmica de Estruturas - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9315 - Determinação da Equação para Cálculo do Momento Crítico à Flambagem Lateral - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9316 - Efeito dos Sismos nas Estruturas Aporticadas - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9317 - As Estruturas Aporticadas com Vigas de Rigidez Infinita, Submetidas ao Sismo - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9318 - Uma Proposta de Normalização das Resistências da Madeira Estrutural - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9319 - Resistência dos Materiais Anisotrópicos - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO